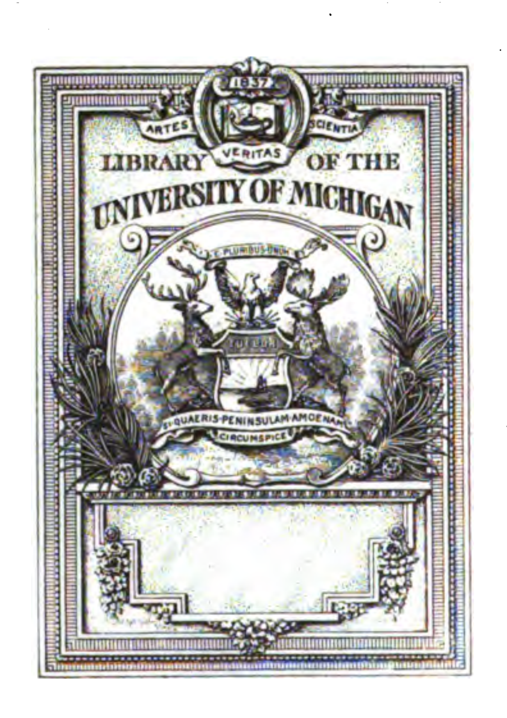

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

Élémentaires et Spéciales

A L'USAGE

DE TOUS LES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT
ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

Publié sous la direction

DE MM.

J. BOURGET
Recteur de l'Académie d'Aix
Ex-directeur des études
à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

KŒHLER
Ancien répétiteur à l'École polytechnique
Directeur des études
à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

Avec la collaboration

DE MM.

AUG. MOREL, COCHEZ ET BOQUEL
Professeurs de Mathématiques

TOME CINQUIÈME



ANNÉE 1881

PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

1880

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

Élémentaires et Spéciales

NOTE D'ALGÈBRE

Par M. Landry.

PROCÉDÉ NOUVEAU POUR DÉTERMINER LES VALEURS NUMÉRIQUES DES RACINES RÉELLES DE L'ÉQUATION $x^2 + px + q = 0$, p ET q ÉTANT DES NOMBRES ENTIERS *positifs* OU *négatifs*.

I. — Comment se pose la question.

Dans nos travaux (*) sur la décomposition des nombres, nous avons eu à déterminer n' à l'aide de deux équations telles que

$$n + n' = p, \quad nn' = q \quad \text{ou} \; n - n' = p, \quad nn' = q.$$

L'élimination de n, dans l'un ou dans l'autre cas, conduit à une équation du second degré dont la résolution donne n'. Mais le calcul qui exige la formation du carré de $\frac{p}{2}$ suivie d'une extraction de racine nous ayant paru trop laborieux lorsque *p est un nombre considérable*, nous avons été amené à chercher une autre méthode. C'est cette méthode que nous nous proposons d'exposer aujourd'hui, après nous en être servi pendant de longues années.

L'équation $x^2 + px + q = 0$, se résoudra par le premier des deux procédés que nous allons exposer si, dans cette équation, q est *positif* et que les racines soient réelles; et, par le second si q est *négatif*.

(*) *Nouvelle Correspondance mathématique*, septembre 1880, p. 417.

II. — Résolution de $n + n' = p$, $nn' = q$, n' *étant, au plus, égal à* n.

La réalité des racines exige que $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ soit, au moins, égal à q. Mais il n'est pas indispensable de s'en assurer.

Nous supposons que p est un nombre *positif* ainsi que q; mais, s'il était *négatif*, les racines seraient toutes deux *négatives;* et l'on déterminerait, de la même manière, leurs valeurs numériques, après avoir fait $n = -n_1$, $n' = -n'_1$.

Voici la méthode :

On pose $n' = a + n'_1$, a étant la partie de n' exprimée par son premier chiffre, celui de ses plus hautes unités. Il en résulte

$$n = p - a - n'_1, \quad nn' = (p - a - n'_1)(a + n'_1);$$

puis $\quad (p - 2a - n'_1)n'_1 = q - (p - a)a = q'.$

Si on fait alors

$$p - 2a = p'; \quad p - 2a - n'_1 = n_1,$$

il vient $\quad n_1 + n'_1 = p', \quad n_1 n'_1 = q',$

c'est-à-dire que l'on obtient, pour déterminer n_1, n'_1, deux équations semblables à celles qui sont données pour déterminer n et n'. Notons, de plus, cette concordance

$$n_1 = n - a, \quad n'_1 = n' - a.$$

On pourra donc découvrir le second chiffre de n', comme on aura découvert le premier, et ainsi de suite.

Pour trouver a, on divise q par p; mais, comme pour avoir la valeur exacte de n' il faudrait diviser q par $p - n$ et non par p, le premier chiffre donné par la division peut être trop petit, puisqu'on emploie un diviseur trop grand. On devra donc essayer, successivement, les nombres entiers immédiatement supérieurs à ce chiffre, jusqu'à ce qu'on en trouve un qui serait trop grand.

Dans le cas des racines imaginaires, on se trouve immédiatement averti par l'impossibilité de déterminer a.

Les quelques essais auxquels le travail peut donner lieu, sont en très petit nombre, puisque, le diviseur employé p étant au moins le double de n', le rapport $\frac{p}{p - n'}$, que

l'on peut mettre sous la forme $\dfrac{1}{1 - \dfrac{n'}{p}}$, est compris entre 2 et 1.

Dans la division partielle qui suit, on a

$$\frac{p'}{p' - n'_1} = \frac{p'}{n_1} = \frac{n_1 + n'_1}{n_1} = 1 + \frac{n'_1}{n_1} = 1 + \frac{n' - a}{n - a}.$$

Or c'est un principe démontré que, si les deux termes d'une fraction $\frac{n'}{n}$ $(n' < n)$ varient en moins d'une même quantité, la valeur de cette fraction diminue. Le rapport des deux diviseurs p', $p' - n'_1$, sera donc plus près de l'unité que celui des deux diviseurs p, $p - n'$; et ainsi de suite pour les divisions partielles qui suivent. Ainsi, dans l'application du procédé, les diviseurs successifs π, $\pi - \nu'$ tendent vers l'égalité.

On peut voir, dans l'exemple qui suit, la marche et la simplicité du calcul.

$n + n' = 3842$	$nn' = 1330945$
3	10626
3542	26834
3	25296
3242	15385
8	15385
3162	0
8	
3082	
5	
3077	
5	
$n' = 385$,	$n = 3457$,

Si les racines n'étaient pas des nombres entiers, on pourrait poursuivre l'opération. Ce sera l'objet du paragraphe IV.

III. — *Résolution de* n — n' = p, nn' = q.

Les lettres p et q représentent toujours des nombres entiers *positifs*; mais si p était *négatif*, on aurait, en changeant les signes, $n' - n = -p$; et l'application du procédé resterait la même,

On pose, comme précédemment, $n' = a + n'_1$, et il vient

$$(a + n'_1)(p + a + n'_1) = q,$$
$$(p + 2a + n'_1)n'_1 = q - a(p + a) = q';$$

de sorte que, si l'on fait $p + 2a = p'$, $p + 2a + n'_1 = n_1$, on trouve $n_1 - n'_1 = p'$, $n_1 n'_1 = q'$.

La seule difficulté qui se présente alors est de trouver a, c'est-à-dire le premier chiffre de la valeur de n'. La raison en est que, p pouvant différer beaucoup de $p + n'$, la division de q par p ne peut pas toujours donner a avec une approximation suffisante, comme dans le paragraphe qui précède.

Voici, dès lors, le moyen auquel on aura recours.

On fera, successivement, dans $(p + n')\, n' = q$, $n' = 10$, 100, 1000 ... etc., jusqu'à ce que l'on trouve que n' est compris entre 10^α et $10^{\alpha+1}$

On cherchera, ensuite, entre quels termes de la série

$$1.10^\alpha, \quad 2.10^\alpha, \quad 3.10^\alpha \ldots \text{etc.}$$

se trouve comprise la valeur de n'.

Si elle est comprise entre $b10^\alpha$ et $(b + 1)10^\alpha$, $b10^\alpha$ sera la valeur de a. Le calcul se poursuivra alors comme dans le cas précédent.

Ainsi, pour avoir le second chiffre de n', on divisera q' par p'. Seulement le chiffre obtenu peut être trop grand, puisqu'on emploie un diviseur trop petit p' au lieu de $p' + n'_1$, tandis que, dans le paragraphe II, c'est le contraire qui avait lieu.

Les essais à faire, s'il y en a, se réduisent à fort peu de chose, puisque le rapport des deux diviseurs, qui est $\frac{p'}{p' + n'}$ ou $\frac{1}{1 + \frac{n_1}{p + 2a}}$, est compris entre $\frac{1}{2}$ et 1, n'_1 étant moindre que a.

Pour les divisions partielles qui doivent donner les autres chiffres, le rapport des deux diviseurs que l'on a successivement à considérer, π et $\pi + \nu'$, est $\frac{\pi}{\pi + \nu'}$ ou $\frac{1}{1 + \frac{\nu'}{\pi}}$.

Or ce rapport se rapproche constamment de l'unité, et même

très rapidement, puisque, d'une opération à l'autre, v' diminue, tandis que π augmente. Il en résulte que ces deux diviseurs tendent constamment vers l'égalité.

Soit pris pour exemple $n = n' = 1002$, $nn' = 9874123$. On a $(1002 + n')\,n' = 9874123$; et l'on trouve d'abord que n' est compris entre 1000 et 10000. On trouve, ensuite, que sa valeur est comprise entre 2000 et 3000. Ainsi $a = 2 . 10^3$. Voici, dès lors, le calcul :

1002	9874 123
2	6004
3002	38701
2	33612
5002	50892
6	50256
5602	6363
6	6363
6202	0
8	
6282	
8	
6362	
1	
6363	
1	

IV. — Du cas où, n' *n'étant pas un nombre entier, on veut poursuivre l'opération pour déterminer les premiers chiffres de la partie décimale.*

Le calcul se poursuit, dans les deux cas, de la manière indiquée pour chacun d'eux. Mais l'observation faite aux paragraphes II et III sur les diviseurs π, $\pi \mp v'$, trouve, ici, une application heureuse.

En effet, puisque ces diviseurs tendent vers l'égalité, il doit venir un moment où, suivant le degré d'approximation que l'on veut obtenir, on peut terminer le calcul par une dernière division, en divisant par π, ce qui est une grande simplification.

Seulement il devient nécessaire de se rendre compte de la différence qui peut exister entre le quotient que l'on

obtient en divisant un nombre donné N par π, et celui que l'on obtiendrait si on le divisait par $\pi - \nu'$ ou par $\pi + \nu'$.

La différence serait

$$\Delta_1 = \frac{N}{\pi - \nu'} - \frac{N}{\pi} = \frac{N\nu'}{\pi(\pi - \nu')}$$

ou

$$\Delta_2 = \frac{N}{\pi} - \frac{N}{\pi + \nu'} = \frac{N\nu'}{\pi(\pi + \nu')}.$$

Soit pris, au lieu de ν', le nombre exprimé par son premier chiffre augmenté de 1, et soit ν_1' ce nombre. Comme ν'_1 est plus grand que ν' et, par conséquent aussi, plus grand que $\frac{\nu}{\pi}$, la différence des deux quotients sera moindre que $\frac{\nu_1'^2}{\pi \mp \nu'}$. Et, si l'on prend, au lieu de $\pi \mp \nu'$, le nombre π, exprimé par le premier chiffre de π, on aura définitivement, pour apprécier l'erreur commise, l'expression très simple $E < \frac{\nu_1'^2}{\pi_1}$.

L'exemple suivant fera voir l'avantage considérable qui résulte de cette modification au procédé, avantage d'autant plus marqué, on le comprend, que π sera plus grand.

Appliquons à $n + n' = 237$, $nn' = 11453$, la méthode du paragraphe II. Nous trouvons :

237	101,78
6	5
177	101,775
6	5
117	101,770
7	3
110	101,7697
7	3
103	101,7694
6	2
102,4	101,76938
6	2
101,8	101,76936
1	6
101,79	101,769354
1	6
101.78	

```
11453
1062
-----
  833
  770
 ----
   63
   61,44
   -----
    1,56
    1,0179
    ------
    0,5421
      508875
    --------
    0,033225
       3053091
    ----------
    0,00269409
        20353876
    ------------
    0,0006587024
         610616124
    ---------------
    0,000048086276
```

On aurait donc $n' = 67,615326...$ $n = 169,384673...$

On voit que le calcul se complique parce que le diviseur augmente d'un chiffre, d'une division à l'autre.

Mais, si l'on s'arrête, dans le travail, au chiffre 1 des centièmes, que donne la division de 1,56 par 101,79, et que l'on continue la division du reste 0,5421 par ce diviseur, l'erreur sera moindre que $\frac{2^2}{100.10^2}$ ou $\frac{4}{1000000}$.
C'est-à-dire que l'erreur très faible ne pourra porter que sur le sixième chiffre décimal après la virgule. Voici cette division finale de 0,5421 par 101,79.

```
54,21          10179
54,210         0,005325
 3,3150
 0,26130
 0,057720
    6825
```

Ces chiffres décimaux complémentaires auraient donc donné $n' = 67,615325$, au lieu de $n' = 67,615326...$

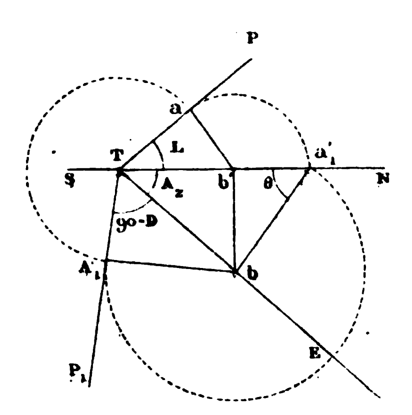
Avec une valeur un peu plus grande pour π, il suffirait généralement de s'arrêter, dans le premier travail, au chiffre des dixièmes.

NOTE DE COSMOGRAPHIE

Par M. S. B.

Etant données la déclinaison d'une étoile et la latitude d'un lieu, calculer la durée de la présence de l'étoile au-dessous de l'horizon du lieu, en temps sidéral.

Prenons pour plan horizontal le plan de l'horizon du lieu, pour plan vertical celui du méridien. La ligne de terre SN est la méridienne. Soit T la Terre, TP la droite allant au pôle nord, et située sur le plan vertical; l'angle PTN est la latitude du lieu. Soit TE la droite allant de la Terre à l'étoile *au moment de son lever.* ETP est le plan horaire de l'étoile; ses traces sont TE et TP. L'angle de ce plan avec le méridien (plan vertical), converti en temps à raison de 1^h pour $15°$, mesure la demi-durée de la présence de l'étoile au-dessous de l'horizon. Soit θ cet angle, dont la figure indique la construction ordinaire; rabattons le plan dans le plan horizontal autour de TE. Le triangle $bb'a'_1$ donne



$$\cos\theta = \frac{b'a'_1}{ba'_1}. \qquad (1)$$

Or, dans le triangle $Ta'b'$, on a

$$b'a' = b'a'_1 = Ta' \operatorname{tg} \lambda;$$

puis, par le triangle TbA_1, on a

$$bA'_1 = ba'_1 = TA'_1 \operatorname{tg} ETP_1 = Ta' \operatorname{tg} ETP_1.$$

Or, l'angle ETP_1 est la distance polaire de l'étoile, c'est-

à-dire le complément de la déclinaison; donc

$$ba'_1 = Ta' \times \frac{1}{\operatorname{tg} \delta};$$

substituant dans l'équation (1), on trouve

$$\cos \theta = \operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \delta.$$

La discussion se ferait comme on l'a déjà vu dans un article précédemment publié *(4e Année*, p. 443).

La même figure permet de calculer l'azimuth de l'étoile à son lever, azimuth représenté par l'angle NTE. Car le triangle bb'T donne $\cos Az = \frac{Tb'}{Tb}$.

On a d'autre part

$$Tb = \frac{Ta'}{\cos \lambda},$$

$$Tb' = \frac{Ta'}{\sin \delta}.$$

En substituant, on trouve

$$\cos Az = \frac{\sin \delta}{\cos \lambda}.$$

Pour une déclinaison nulle, on trouve

$$\cos Az = 0, \quad Az = 90^\circ.$$

Pour une latitude complémentaire de la déclinaison, on trouve

$$\cos \lambda = \sin \delta,$$

d'où

$$\cos Az = 1, \quad Az = 0.$$

En effet, l'étoile affleure alors l'horizon, sans se coucher.

Lorsque $\lambda < 90 - D$, $\cos Az$ est plus grand que 1; donc Az est imaginaire; en effet, dans ce cas l'étoile reste toujours au-dessus de l'horizon.

Si on substitue au temps sidéral le temps solaire, on trouve la demi-durée de la nuit, c'est-à-dire l'heure du lever du soleil (heure vraie). On admet alors que la déclinaison et la vitesse du mouvement en ascension droite restent constantes pendant toute la durée du jour.

Etant données deux des quatre quantités: latitude, déclinaison du soleil, azimuth au lever et heure du lever, on peut, avec les deux formules précédentes, ou directement, calculer les deux quantités inconnues.

NOTE D'ARITHMÉTIQUE

Par M. **P. A. G. Colombier,** professeur à Sainte-Barbe.

DÉTERMINATION D'UNE LIMITE SUPÉRIEURE DU NOMBRE DES DIVISIONS A EFFECTUER DANS LA RECHERCHE DU P. G. C. D. DE DEUX NOMBRES.

1. **Théorème.** — *Si deux nombres entiers,* A *et* B, *ont pour diviseurs communs les nombres* α, β, γ,... *quelconques, deux à deux, le plus petit multiple commun,* M, *de ces diviseurs est un diviseur du p. g. c. d.* D *de* A *et* B.

Démonstration. — Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait

$$\alpha = 2^3 \cdot 7^2,$$
$$\beta = 2^5 \cdot 3^4,$$
$$\gamma = 2^2 \cdot 11^3.$$

On en déduit immédiatement que

$$M = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 7^2 \cdot 11^3.$$

Par hypothèse, les quatre nombres 2^5, 3^4, 7^2, 11^3, sont des diviseurs de α, β, γ, lesquels sont des diviseurs communs de A et B; donc ces quatre nombres sont des diviseurs communs de A et B; par suite ces quatre nombres sont des diviseurs du p. g. c. d. D de A et B. Mais ces quatre nombres sont premiers deux à deux, donc D est divisible par le produit M de ces quatre nombres; c. q. f. d.

2. **Corollaire.** — A et B étant des multiples de D, et D étant un multiple de M, d'après le paragraphe 1, il s'ensuit que A et B sont des multiples de M.

3. **Théorème.** — *Si, dans la recherche du p. g. c. d.* D, *de deux nombres entiers* A *et* B (A > B), *on prend chaque reste,* inférieur *à la moitié du diviseur qui l'a fourni, et si on désigne par* n *le nombre des divisions effectuées, on aura*

$$2^{n-1} < \frac{B}{D}.$$

Démonstration. — Désignons par

$$R_1, \quad R_2, \quad \ldots, \quad R_{n-2}, \quad R_{n-1}, \quad R_n$$

les n restes successifs de ces n divisions. Il est évident que l'on a $R_n = 0$, $R_{n-1} = D$,
que chacun des autres restes est moindre que la moitié du diviseur qui l'a fourni, et que l'avant-dernier reste, R_{n-1} seul, est égal ou inférienr à la moitié du diviseur R_{n-2} qui lui correspond. Cela posé, on a

$$R_1 < \frac{B}{2},$$
$$R_2 < \frac{R_1}{2},$$
$$\vdots$$
$$R_{n-2} < \frac{R_{n-3}}{2},$$
$$R_{n-1} \text{ ou } D \leq \frac{R_{n-2}}{2}.$$

Multipliant ces relations membre à membre et réduisant il vient
$$D < \frac{B}{2^{n-1}},$$
d'où
$$2^{n-1} < \frac{B}{D}, \qquad \text{c. q. f. d.} \qquad (1)$$

4. **Discussion.** — 1° L'inégalité (1) contient deux inconnues, n et D. On peut toujours déterminer D en décomposant A et B en facteurs premiers; alors, si on désigne par B′ le quotient de la division de B par D, l'inégalité (1) pourra être mise sous la forme
$$2^{n-1} < B'. \qquad (2)$$

2° Il peut se faire qu'on ne veuille pas déterminer D par le moyen que nous venons d'indiquer. Alors on examinera si A et B ont ou n'ont pas des diviseurs communs apparents. — Si A et B ont des diviseurs communs apparents α, β, γ,... la décomposition des nombres en facteurs premiers donnera le plus petit multiple commun M de ces diviseurs apparents; et les propositions exprimées dans les paragraphes I et II permettront d'écrire
$$B = MB'',$$
$$D = MD';$$

dès lors l'inégalité (1) pourra être remplacée par

$$2^{n-1} < \frac{B'}{D''};$$

comme D″ est une inconnue et que

$$D'' \geq 1,$$

il s'ensuit qu'on aura $2^{n-1} < B'$, (3)

inégalité où il n'y a que la seule inconnue n. — Si A et B n'ont pas de facteurs communs apparents, comme on a

$$D \geq 1,$$

on pourra remplacer l'inégalité (1) par la suivante

$$2^{n-1} < B, \qquad (4)$$

inégalité où il n'y a que la seule inconnue n.

5. **Observations.** — Quelle que soit celle des inégalités (2), (3), (4) que l'on considère, on voit que pour trouver une limite supérieure de n, il faut chercher l'exposant de la plus haute puissance de 2 qui est contenue dans un nombre entier donné. — Il est avantageux que ce nombre donné, qui est une limite supérieure de 2^{n-1}, soit le plus petit possible, afin que la limite supérieure de $n - 1$ soit aussi la plus petite possible. Comme on a généralement $B' < B'' < B$,
on voit que l'inégalité (2) est préférable à l'inégalité (3), et que cette dernière est préférable à l'inégalité (4).

6. **Théorème.** — *Si 2^α est la plus petite puissance de 2, qui n'est pas inférieure à B, le nombre entier α est une limite supérieure du nombre des divisions à effectuer.*

Démonstration. — Par hypothèse, on a :

$$2^{\alpha-1} < B \leq 2^\alpha;$$

si on a égard à l'inégalité (4), il vient :

$$2^{n-1} < 2^\alpha,$$

d'où $n - 1 < \alpha$

ou bien $n < 1 + \alpha$; (5)

par suite $n \leq \alpha$

ce qui montre que α est une limite supérieure du nombre des divisions à effectuer.

7. **Historique.** — La formule (5) est due à J. Binet. Elle

suppose que tous les restes sont moindres que les moitiés des diviseurs correspondants. On obtient toujours ce résultat en prenant certains quotients par excès.

8. **Théorème.** — *Si* K *désigne le nombre des chiffres de* B, *c'est-à-dire du plus petit des deux nombres donnés* A *et* B, *on aura*

$$n < 1 + \frac{10}{3} K. \qquad (6)$$

Démonstration. — On a $B < 10^k$;
par suite l'inégalité (4) donne

$$2^{n-1} < 10^k;$$

on peut vérifier que $10^3 < 2^{10}$;
ces deux dernières inégalités donnent respectivement

$$2^{3(n-1)} < 10^{3k}$$
$$10^{3k} < 2^{10k};$$

d'où $2^{3(n-1)} < 2^{10k}$;
par suite $3(n - 1) < 10k$;
résolvant cette inégalité par rapport à n, on trouve la relation à démontrer (6).

9. **Corollaire.** — La formule (6) montre, spontanément, que le nombre des divisions à effectuer ne peut surpasser la partie entière du nombre

$$1 + \frac{10}{3} K;$$

par conséquent la partie entière de ce nombre est une limite supérieure des divisions à effectuer.

10. **Théorème.** — *Dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres* A *et* B (A < B), *le nombre des divisions à effectuer ne peut surpasser* cinq fois *le nombre des chiffres* K *du plus petit nombre* B *des deux nombres donnés.*

Première démonstration. — On a, identiquement,

$$1 + \frac{10}{3} K = 1 + 3K + \frac{K}{3};$$

or $1 \leq K$

et $\frac{K}{3} < K$;

d'où $1 + \frac{K}{3} < 2K$:

donc $$1 + \frac{10}{3} K < 5K$$

et si on a égard à la formule (6), on pourra écrire

$$n < 5K; \quad \text{c. q. f. d.} \qquad (7)$$

Deuxième démonstration. — La formule (6) peut être mise sous la forme $$\frac{3}{2}(n - 1) < 5K,$$

ce qui revient à

$$n + \frac{n-3}{2} < 5K, \qquad (8)$$

K est un nombre entier, au moins égal à l'unité, donc 5K est au moins égal à 5. Cela posé, si n est égal à un des trois nombres $1, \ 2, \ 3,$

on a évidemment $n < 5K$,

et si $n > 3$,

on a $$\frac{n-3}{2} > 0$$

et la formule (8) donne, *a fortiori*,

$$n < 5K.$$

11. **Historique.** — La formule (7) est due à G. Lamé. Elle a été établie par ce savant dans l'hypothèse où *tous* les quotients sont pris par défaut.

12. **Théorème.** — *Si on désigne par* n *le nombre des divisions à effectuer, pour trouver le p. g. c. d. de deux nombres* A *et* B (A > B), *et par* K *le nombre des chiffres du plus petit de ces deux nombres, on aura la relation*

$$n < 1 + 4K,$$

c'est-à-dire que quatre fois *le nombre des chiffres du plus petit des deux nombres considérés est une limite supérieure du nombre des divisions à effectuer.*

Démonstration. — Si on se reporte à la formule (4), et à l'hypothèse, on pourra écrire :

$$2^{n-1} < B < 10^k < 2^{4k};$$

d'où $$2^{n-1} < 2^{4k};$$

par suite $$n - 1 < 4K$$

ou $$n < 1 + 4K; \quad \text{c. q. f. d.}$$

13. *Première application.* — Supposons que

$$A = 2904,$$
$$B = 1122.$$

Je remarque que ces deux nombres sont divisibles par 2, 3 et 11, et comme ces trois nombres sont premiers deux à deux, il s'ensuit que les nombres A et B sont divisibles par 66. De plus, si on décompose A et B en facteurs premiers, on reconnaît que 66 est le p. g. c. d. de A et B; et que

$$B' = 17.$$

Cela posé :

1° Si on considère la formule (2), et la méthode exposée dans le paragraphe 6, on trouve

$$2^{n-1} < 17 < 2^5;$$

d'où $$n - 1 < 5$$

ou $$n < 6;$$

donc 5 est une limite supérieure du nombre des divisions à effectuer.

Le calcul direct, appliqué aux quotients 44 et 17, des nombres A et B par 66, ce qui ne change pas le nombre des divisions à effectuer, donne :

$$n = 4.$$

2° Si on considère les formules (2) et (6), on trouve

$$n = 7, 6 \ldots$$

donc 7 est une limite supérieure du nombre des divisions à effectuer.

3° Si on considère les formules (2) et (7) on trouve :

$$n < 10:$$

donc 9 est une limite supérieure.

4° Si on considère les formules (2) et (9) on trouve que

$$n < 9:$$

donc 8 est une limite supérieure.

Deuxième application. — Supposons que,

$$A = 1729$$
$$B = 682.$$

Les nombres A et B n'ont pas de diviseurs communs apparents.

1° Si j'applique la formule (4), et la méthode exposée dans le paragraphe 6, on trouve $n < 11$;

donc 10 est une limite supérieure du nombre des divisions à effectuer.

Le calcul direct montre que le nombre des divisions est égal à 6.

2° Les formules (4) et (6) donnent,

$$n < 11:$$

donc 10 est une limite supérieure.

3° Les formules (4) et (7) donnent,

$$n < 15:$$

donc 14 est une limite supérieure.

4° Les formules (4) et (9), donnent,

$$n < 13:$$

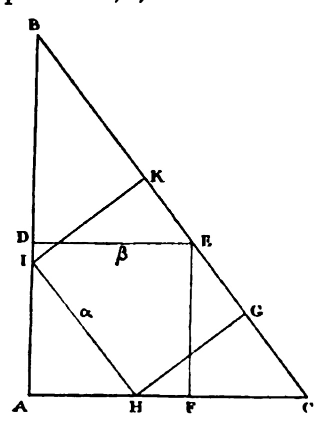
donc 12 est une limite supérieure du nombre des divisions à effectuer.

QUESTION 224.

Solution par M. Paul Boulogne, élève du Lycée de Saint-Quentin.

Construire un triangle connaissant les côtés des deux carrés inscrits.

Soient : a l'hypoténuse ; b, c les côtés de l'angle droit ; h la



hauteur correspondante à l'hypoténuse, α et β les côtés des

carrés donnés. Nous avons $a^2 = b^2 + c^2$ (1)

$ah = bc.$ (2)

Les triangles semblables BAC, IAH donnent

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{h}{h - \alpha}, \text{ d'où } h = \frac{a\alpha}{a - \alpha};$$

par suite (2) devient

$$\frac{a^2\alpha}{a - \alpha} = bc. \qquad (3)$$

De même, à cause de la similitude des triangles BAC et BDE, on a $\frac{b}{\beta} = \frac{c}{c - \beta} = \frac{b + c}{c}$;

d'où (4) $bc = \beta(b + c)$.

Mutipliant par 2 les deux membres de (3) et ajoutant à (1), on a

$$a^2 \left(1 + \frac{2\alpha}{a - \alpha}\right) + (b + c)^2.$$

Élevons (4) au carré et remplaçons bc et $b + c$ par leur valeur, on a $\left(\frac{a^2\alpha}{a - \alpha}\right)^2 = a^2\beta^2\left(1 + \frac{2\alpha}{a - \alpha}\right)$

ou $a^2(\beta^2 - \alpha^2) = \alpha^2\beta^2$

et $a \quad \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}$,

condition de possibilité $\beta > \alpha$.

Dès lors b et c sont racines de l'équation

$$X^2 \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} (\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}) - \alpha^2\beta X + \alpha^2\beta^2 = 0.$$

Le problème a toujours une solution et une seule, pourvu que $\alpha < \beta$.

Nota : Ont résolu la même question : MM. Monterou, à Pau ; Marin, à Agen.

QUESTION 231.

Solution par M. Giroud, élève au Lycée de Marseille.

Sur les trois côtés d'un triangle ABC, *on construit les carrés* ABED, ACGF, BCHI.

Connaissant les points de rencontre des droites ED, FG, HI, *construire le triangle.*

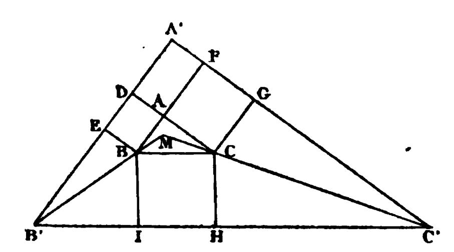
Les deux droites CC′, BB′ sont déterminées par la relation

$$\frac{CG}{CH} = \frac{C'A'}{C'B'}$$

et

$$\frac{BI}{BE} = \frac{C'B'}{B'A'}.$$

Pour les construire il suffit d'élever des perpendiculaires sur les côtés du triangle A′B′C′ et dans le rapport déterminé



par le rapport précédent. En menant par les sommets des perpendiculaires des parallèles aux côtés, celles-ci vont se couper en des points de CC′ et BB′, et pour avoir BC il suffit alors d'inscrire un carré dans le triangle B′H′C′. Le problème proposé est dès lors ramené à un problème connu. On achève la construction en menant par les points B et C des parallèles à B′A′ et C′A′.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Mangeot, à Nancy; Roubault, à Melun; Daguillon, lycée Henri IV; Huet, à Orléans; Bénard, à Châteauroux; Arnat, à Saint-Omer; Tricon, à Marseille; Van Aubel, à l'athénée de Liège; de Prat, à Lille.

QUESTION 238.

Solution par M. MAYON, élève du Lycée Henri IV, classe de M. Colas.

Construire un triangle connaissant un angle, le cercle circonscrit et le point de concours des hauteurs.

Supposons le problème résolu; soient : ABC le triangle cherché, H le point de concours des hauteurs, O le centre du cercle circonscrit.

L'angle B étant connu, la corde AC est déterminée au moins de longueur, sinon de position.

Abaissons du point O les perpendiculaires OR, OL et menons les hauteurs CI, BK, puis joignons RL; les deux triangles ROL, BHC étant semblables comme ayant leurs côtés parallèles et dirigés en sens contraire; donc

$$\frac{RL}{BC} = \frac{OL}{BH} = \frac{1}{2};$$

d'où

$$BH = 2OL.$$

Dès lors BH sera connue si OL est connue.

De là la construction suivante :

Sur la circonférence circonscrite donnée, prenons un segment capable de l'angle donné; avec un rayon égal au double de la distance du centre O à cette corde et de H comme centre, décrivons une circonférence qui coupera généralement la circonférence donnée en deux points B et B'. L'un ou l'autre de ces deux points est le sommet du triangle cherché. Puisque BH est une hauteur, pour avoir la base du triangle décrivons de O; avec la distance OL,

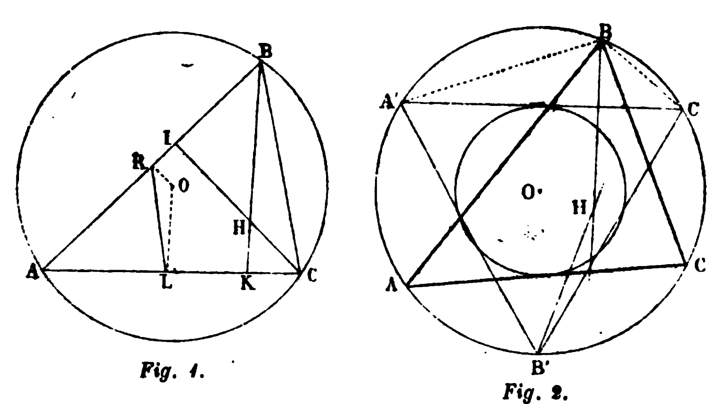


Fig. 1.

Fig. 2.

une circonférence concentrique à la circonférence O, et menons perpendiculairement à BH une tangente à cette petite circonférence. En joignant ses extrémités A et C à B, on a le triangle cherché.

On aurait un second triangle en joignant le point B' aux

extrémités de la tangente parallèle à celle que nous avons déjà considérée.

Remarquons que si l'angle B donné était obtus, il faudrait joindre B aux extrémités A', C' de la tangente la plus rapprochée du point B ; le triangle serait alors A'BC'.

Discussion. — Nous avons considéré le point H à l'intérieur de la circonférence ; il aurait pu être donné à l'extérieur. Si A' est l'extrémité du diamètre AHA' la plus rapprochée de H, et r le rayon de la petite circonférence, on a

$2r > HA$, pas de solution ;

$2r = HA$, une solution ;

$HA > 2r > HA'$, deux solutions (symétriques par rapport à AA') ;

$2r = HA'$, une solution ;

$2r < HA'$, pas de solution.

Cas particulier. — Si le point donné H est sur la circonférence, il devra être à la fois un sommet du triangle et le point de rencontre des hauteurs ; le triangle sera alors rectangle, c'est-à-dire que l'angle donné doit être droit, ce qui rentre dans la construction générale, puisque, r étant nul, le rayon de la circonférence HB l'est aussi.

Si le point H se confond avec le point O, la distance du point de rencontre des hauteurs au sommet du triangle est évidemment R ; la base du triangle sera donc perpendiculaire au milieu du rayon B'O et le triangle est équilatéral. L'angle donné est donc de 60°.

Dans ce cas il y a une infinité de solutions.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Montereau, à Pau ; Mangeot, à Nancy ; Popineau, à Niort ; Bonneville, à Toulouse ; Daguillon, lycée Henri IV ; Marit, Callas, lycée Louis-le-Grand ; Huet, à Orléans ; Malcor, à la Seyne, près Toulon.

QUESTION 239.

Solution par M. BLESSEL, piqueur des Ponts et Chaussées.

Résoudre un quadrilatère inscriptible, connaissant les diagonales et deux côtés opposés.

Soit le quadrilatère ABCD. Posons AC $= d$, BD $= d'$, AD $= a$, BC $= b$, AB $= x$, CD $= y$.

On a d'après les théorèmes de Ptolémée :

$$dd' = xy + ab,$$

$$\frac{d}{d'} = \frac{ax + by}{ay + bx}.$$

De ces deux équations on tire

$$xy = dd' - ab$$

et

$$\frac{x}{y} = \frac{ad - bd'}{ad' - bd}.$$

Le problème est ramené à déterminer deux quantités, connaissant leur produit et leur rapport.

Connaissant les quatre côtés du quadrilatère on pourra déterminer les angles que chaque diagonale fait avec les côtés, le rayon du cercle circonscrit, les segments et l'angle des diagonales, ainsi que la surface du quadrilatère.

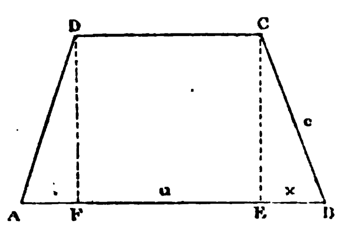
NOTA. — M. Joly, de Tarbes, a résolu la même question.

QUESTION 240.

Solution par M. Louis SICARD, élève au Lycée de Lyon.

On donne les côtés égaux et l'une des bases A d'un trapèze isoscèle; que doit être la seconde base pour que le volume engendré par la révolution de la figure autour de la première base son maximum?

Les perpendiculaires CE, DF étant menées des sommets C et D, il est facile de voir que le volume demandé se composera de deux cônes égaux et d'un cylindre ayant même base que ces cônes. Si l'on pose EB $= x$, la base cherchée aura pour expression $a - 2x$; dès lors



$$V = \frac{2\pi CE^2 . x}{3} + \pi CE^2(a - 2x)$$

ou
$$3V = \pi CE^2 (3a - 4x)$$
ou en remplaçant CE par sa valeur $c^2 - x^2$, on a
$$\frac{3V}{\pi} = (c^2 - x^2)(3a - 4x) = (c + x)(c - x)(3a - 4x).$$

Pour trouver le maximum de $(c + x)(c - x)(3a - 4x)$ on a à résoudre l'équation
$$\frac{1}{c + x} - \frac{1}{c - x} - \frac{4}{3a - 4x} = 0$$
ou après réductions
$$12x^2 - 6ax - 4c^2 = 0;$$
d'où enfin
$$x = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 + 48c^2}}{12}.$$

Les deux valeurs d'x donnent deux solutions. En effet, en prenant la valeur positive la base donnée sera la plus grande des deux. Si, au contraire, on prend la solution négative, c'est la base cherchée qui sera la plus grande des deux.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Buttin, à Lons-le-Saulnier; Boulogne, Broyon, Legrain, à Saint-Quentin; Bois, à Montauban; Joly, à Tarbes; Simon, à Lyon; Bonneville, à Toulouse; Callon, au lycée Louis-le-Grand; Lacan, à Toulon; Payeux, à Verdun; Lesoille, à l'école de Cluny; Mayon, au lycée Henri IV; de Prat, à Lille.

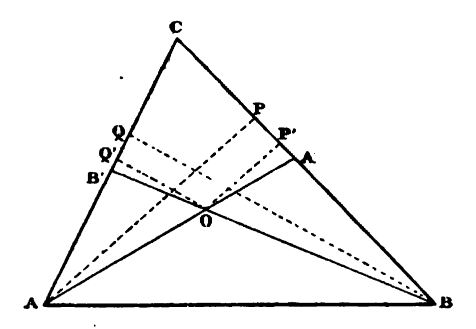
QUESTION 258.

Solution par M. Tinel, Lycée Corneille, à Rouen.

Dans un triangle ABC *on mène les deux bissectrices* AA′, BB′ *qui coupent les côtés opposés respectivement en* A′ *et* B′ *et se rencontrent en* O. *Démontrer la relation*

$$\frac{AA'.OB'}{BB'.OA'} = \frac{AC}{BC}. \qquad \text{(Reidt.)}$$

Par le point O et le point A menons OP′ et AP perpendiculaires sur BC et soient également OQ′ et BQ perpendicu-



laires sur AC. Les triangles A′OP′ et A′AP étant semblables donnent

$$\frac{AA'}{OA'} = \frac{AP}{OP'};$$

de même à cause de la similitude des triangles B′OQ′ et B′BQ donnent

$$\frac{BB'}{OB'} = \frac{BQ}{OQ'}.$$

Divisons terme à terme ces deux égalités en remarquant que OQ′ = OP′, il vient

$$\frac{AA'.OB'}{BB'.OA'} = \frac{AP}{BQ};$$

mais les triangles rectangles BCQ et CAP qui sont semblables donnent

$$\frac{AP}{BQ} = \frac{AC}{BC};$$

donc

$$\frac{AA'.OB'}{BB'.OA'} = \frac{AC}{BC}.$$

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Gino-Loria, à Mantoue ; Marin, à Agen ; Daguillon, au lycée Henri IV ; Bompard, collège Stanislas ; Huet, à Orléans ; H. Bourget, à Aix ; Callon, au lycée Louis-le-Grand ; Boulogne, Broyon, à Saint-Quentin ; Chaulet, à Montauban ; Brachat, à Vitry ; Joly, à Tarbes ; Houssette, à Amiens ; Cardot, à Nancy ; Jourdan, à Rouen.

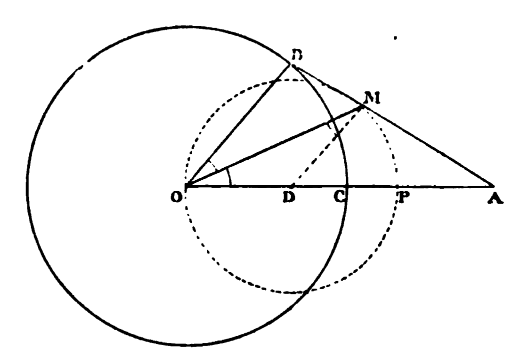
QUESTION 259.

Solution par M. DAGUILLON, élève du Lycée Henri IV.

On donne une circonférence O *et un point fixe* A *dans son plan ; on joint le point* A *à un point quelconque* B *de la circonférence ; la bissectrice intérieure de l'angle* AOB *rencontre la droite* AB *en un point* M *dont on demande le lieu quand le point* B *décrit la circonférence. Ce lieu rencontre le diamètre en* P ; *démontrer que* C *étant le point de la circonférence le plus voisin de* A, *sur la droite* OA, *les quatre points* O, B, P, A *forment une division harmonique.*

D'après la propriété fondamentale de la bissectrice, on a

$$\frac{AM}{AO} = \frac{MB}{OB} = \frac{AB}{OA + OB},$$



et si d désigne la distance AO et R le rayon de la circonférence

$$\frac{AM}{AB} = \frac{d}{d + R},$$

ce qui montre que le lieu est une circonférence homothétique

à la première, A étant le centre et $\frac{d}{d+R}$ le rapport d'homothétie.

Cela posé, remarquons que si par le point M on mène MD parallèle à OB, le point D est le centre du lieu. Or, le triangle ODM est évidemment isoscèle; donc la circonférence du lieu passe par le centre du cercle donné.

D'ailleurs $$DP = DM = \frac{Rd}{d+R},$$

$$DC = R - OD = R - \frac{Rd}{d+R} = \frac{R^2}{d+R},$$

$$DA = d - OD = \frac{d^2}{d+R}.$$

Par suite $$DC \times DA = \frac{R^2d^2}{(d+R)^2} = \overline{DP}^2.$$

ce qui montre que les points O, C, P, A forment une division harmonique.

NOTA. — Ont résolu la même question: MM. Joly, à Tarbes; Monterau, Callon, au lycée Louis-le-Grand; Marin, à Agen; Bompard, au collège Stanislas; Boulogne, à Saint-Quentin; Prost, Perrier, à Lons-le-Saulnier; Chrétien, au Havre; Houssette, école primaire supérieure, à Amiens; Cardot, à Nancy; Gino-Loria, à Mantoue.

QUESTION 260.

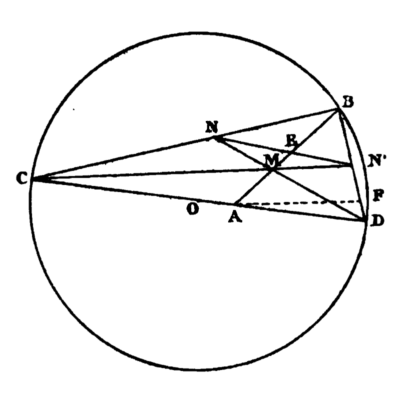
Solution par M. DAGUILLON, élève du Lycée Henri IV.

On joint un point fixe A, *intérieur à une circonférence, à un point* B *de la courbe; on prend sur* AB *un point* M *tel que* $\frac{AM}{AB} = K$. *On joint chacune des extrémités du diamètre qui passe par le point* A *aux points* M *et* B, *ces droites se rencontrent en deux points* N *et* N' *autres que* A *et* B.

Démontrer : 1° que la ligne NN' *partage* MB *en deux parties dont le rapport est constant ; 2° que la ligne qui joint les milieux de* MB *et de* NN' *passe par le centre de la circonférence donnée; enfin trouver le lieu des points* N *et* N'.

1° La figure CNBN'DM est un quadrilatère complet, donc

la diagonale BM est divisée harmoniquement par les deux autres NN′ et CD; on a donc: $\frac{EM}{EB} = \frac{AM}{AB} = K$.



2° Dans une telle figure, les milieux des trois diagonales sont en ligne droite. Or O, centre du cercle, est le milieu de la diagonale CD; il est donc sur le prolongement de la droite qui joint les milieux de MB et de NN′.

3° Par le point A menons AF parallèle à CN′, les triangles semblables BMN′, BAF donnent:

$$\frac{BN'}{N'F} = \frac{BM}{MA} = \frac{1-K}{K}; \qquad (1)$$

d'ailleurs CN′D et AFD donnent:

$$\frac{N'F}{N'D} = \frac{CA}{CD} = \frac{r+d}{2r}. \qquad (2)$$

En posant OA $= d$; multipliant membre à membre les relations (1) et (2),

il vient
$$\frac{BN'}{N'D} = \frac{(1-K)(r+d)}{2Kr}$$

ou
$$\frac{DN'}{DB} = \frac{2Kr}{(1-K)(r+d)+2Kr} = \frac{2Kr}{(1+K)r+(1-K)d}$$

Ce qui montre que le point N′ décrit une circonférence homothétique à la circonférence donnée, D étant le centre et $\frac{2Kr}{(1+K)r+(1-K)d}$, le rapport d'homothétie.

Par une raison semblable on verrait que le lieu du point N est une circonférence homothétique à la circonférence donnée, C étant le centre et

$$\frac{2Kr}{(1-K)(r-d)+2Kr} = \frac{2Kr}{(1+K)r-(1-K)d}$$

le rapport d'homothétie.

Ces deux circonférences sont tangentes à la circonférence O aux points D et C.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Bompard, collège Stanislas; Boulogne, à Saint-Quentin; Rivard, au Mans; Marin, à Agen; Houssette, école primaire supérieure à Amiens; Chrétien, au Havre; Prost, Perrier, à Lons-le-Saulnier; Cardot, à Nancy.

NOTE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Par M. Kœnigs, élève de l'École normale supérieure.

Soit la surface du second ordre rapportée à ses axes :

$$H = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \qquad (1)$$

La normale au point (x, y, z) de la surface a pour équations $\left(\frac{X}{x} - 1\right)a^2 = \left(\frac{Y}{y} - 1\right)b^2 = \left(\frac{Z}{z} - 1\right)c^2$.

Si on cherche les pieds des normales issues d'un point $P(\xi, \eta, \zeta)$ à la surface, on exprimera que la normale passe par ce point, ce qui donnera

$$\left(\frac{\xi}{x} - 1\right)a^2 = \left(\frac{\eta}{y} - 1\right)b^2 = \left(\frac{\zeta}{z} - 1\right)c^2. \qquad (2)$$

Ces équations jointes à l'équation (1) définissent les pieds des normales issues du point P à la surface.

Ces dernières relations se mettent sous la forme suivante :

$$\left.\begin{array}{l} X = (b^2 - c^2)yz + c^2\zeta y - b^2\eta z = 0. \\ Y = (c^2 - a^2)zx + a^2\xi z - c^2\zeta x = 0. \\ Z = (a^2 - b^2)xy + b^2\eta x - a^2\xi y = 0. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Une quelconque des équations (3) rentre dans les deux autres. Les cylindres $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ projettent sur les plans de coordonnées une même courbe gauche dont les traces sur la surface sont précisément les pieds des normales cherchées.

L'équation $\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0$ représente une surface du second ordre passant par la courbe proposée. Faisons en particulier

$$\lambda = a^2\xi, \quad \mu = b^2\eta, \quad \nu = c^2\zeta,$$

il vient

$$a^2(b^2 - c^2)\xi yz + b^2(c^2 - a^2)\eta zx + c^2(a^2 - b^2)\zeta xy = 0. \quad (4)$$

Ce cône du second ordre a son sommet à l'origine. Il contient la courbe considérée et passe aussi par le point P, de sorte que, si O est le centre de la surface, OP est une génératrice du cône (4).

En vertu des équations (2), x, y, z sont proportionnels à $a^2(x - \xi)$, $b^2(y - \eta)$, $c^2(z - \zeta)$; en substituant dans l'équation homogène (4) et supprimant le facteur $a^2b^2c^2$, on trouve

$$(b^2 - c^2)\xi(y - \eta)(z - \zeta) + (c^2 - a^2)\eta(z - \zeta)(x - \xi)$$
$$+ (a^2 - b^2)\zeta(x - \xi)(y - \eta) = 0. \quad (5)$$

L'équation (5) représente un cône qui passe également par la courbe considérée, qui a son sommet au point P et contient l'origine et par suite la droite OP. Les cônes (4) et (5) sont du second degré, ils ont la génératrice OP commune, ils se coupent donc suivant une courbe gauche du troisième ordre. Cette courbe est précisément celle dont les traces sur la surface sont les pieds des normales issues du point P à cette surface.

Il y a donc $2 \times 3 = 6$ pieds. Et par suite :

On peut d'un point de l'espace abaisser six normales sur une surface du second ordre.

Le cône (5) contient évidemment les six normales, puisqu'il contient leurs pieds ainsi que le point P, qui est son sommet. Donc :

Ces six normales sont sur un même cône du second degeé.

Les cônes (4) et (5) ont comme génératrices : le premier, les axes de la surface; le second, des parallèles à ces mêmes axes. De plus, puisque O et P sont leurs sommets, la courbe gauche doit y passer. Ceci montre donc que :

La courbe gauche du troisième degré, ou cubique gauche, qui passe par les six pieds des normales issues d'un point à une surface du second ordre, contient ce point, le centre de la surface, et admet pour ses directions asymptotiques les trois axes de la surface.

2° Ayant rapidement établi ces résultats déjà bien connus, j'aborde la question que je me suis proposé de traiter et qui est la suivante :

Etant donnée une surface du second ordre, tracer sur cette surface une courbe du quatrième degré (provenant de l'intersection d'une seconde surface du second degré), de telle sorte qu'il existe sur cette courbe un groupe de six points, dont les normales concourent en un même point.

L'équation $\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0$ représente une série de surfaces passant par la cubique gauche, c'est même leur équation générale.

L'équation $H + \lambda X + \mu Y + \nu Z = 0$ sera donc l'équation générale des surfaces du deuxième ordre menées par les six pieds des normales issues du point P à la surface $H = 0$.

Or, si on considère dans cette équation ξ, η, ζ comme des indéterminées, on voit sans peine que $\lambda X + \mu Y + \nu Z$ peut toujours être identifié avec l'expression

$$2ByZ + 2B'Zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z.$$

Ainsi on voit que l'équation générale des surfaces du second ordre qui coupe la proposée suivant une courbe du quatrième ordre, satisfaisant à l'énoncé, peut s'écrire :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$$
$$+ 2cx + 2c'y + 2c''z + 0. \qquad (6)$$

Appelons tétraèdre principal de la surface le tétraèdre formé par les trois plans principaux et par le plan de l'infini. Nous voyons que l'équation

$$2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2cx + 2c'y + 2c''z = 0$$

est l'équation générale des surfaces du second ordre circonscrites à ce tétraèdre. Mais cette surface passe par la courbe gauche d'intersection de la surface générale (6) et de la proposée. Donc

Pour que sur une courbe gauche du quatrième ordre, tracée sur une surface du second ordre, on puisse trouver un groupe de six points dont les normales concourent en un même point, il faut et il suffit que par cette courbe on puisse faire passer une surface du second ordre circonscrite au tétraèdre principal de la première.

Dans un prochain article nous ferons quelques applications de ce théorème important.

SUR LES PERMUTATIONS DE n LETTRES

Par M. **Koehler**.

Soient n lettres a_1, a_2, a_3, ..., a_n affectées d'indices croissants; je me propose de déterminer le nombre des permutations dans lesquelles aucune lettre n'occupe le rang que lui attribuerait son indice.

Ce problème est connu; M. André l'a résolu dans un mémoire sur la détermination du terme général d'une série *(Annales de l'Ecole Normale)*. On arrive beaucoup plus simplement à la solution en s'appuyant sur le lemme suivant :

Si l'on désigne par S la somme $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, le coefficient de $a_1a_2\ldots a_n$ dans le produit

$$(S - a_1)(S - a_2)\ \ldots\ (S - a_n)$$

est précisément le nombre de permutations de l'espèce indiquée plus haut.

Faisons le produit $(S - a_1)(S - a_2)$ en ayant soin de donner dans chaque terme la première place à la lettre prise dans le facteur $S - a_1$; on formera ainsi tous les produits des n lettres deux à deux où a_1 n'occupe pas la première place et où a_2 n'occupe pas la seconde. Cela est évident, puisque a_1 ne figure pas dans $S - a_1$ et que a_2 ne figure pas dans $S - a_2$. Multipliant ensuite par $S - a_3$, on formera tous les produits trois à trois dans lesquels a_3 n'occupe pas la troisième place, ni a_2 la seconde, ni a_1 la première; et ainsi de suite. Lorsqu'on aura employé n facteurs, toutes les permutations considérées se trouveront écrites, et pour avoir leur nombre il suffit de calculer directement le coefficient du terme $a_1a_2\ldots a_n$ dans $(S - a_1)(S - a_2)\ldots(S - a_n)$.

Or ce produit peut s'écrire

$$S^n - S^{n-1}\Sigma a_i + S^{n-2}\Sigma a_i\, a_k - S^{n-3}\Sigma a_i\, a_k\, a_l + \ldots + (-1)^n a_1a_2\ldots a_n .$$

Dans S^n le coefficient de $a_1a_2\ldots a_n$ est $n!$; de même dans $S^{n-1}\Sigma a_i$ qui n'est autre chose que S^n.

Dans S^{n-2} le coefficient du produit de $n-2$ lettres diffé-

rentes quelconques est $(n - 2)!$; en faisant la multiplication par $\Sigma a_i a_k$, il est évident que le terme $a_1 a_2 \ldots a_n$ aura pour coefficient $(n - 2)! \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ ou $\frac{n!}{2!}$.

De même dans $S^{n-3} \Sigma a_i a_k a_l$ on trouvera

$$(n - 3)! \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{ ou bien } \frac{n!}{3!}.$$

En continuant ainsi, on arrive à la formule

$$n!\left[1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

qui exprime le nombre des permutations cherché.

NOTE SUR LES RACINES MULTIPLES
DE L'ÉQUATION EN s

Par M. **E. Amigues,**
Professeur de mathématiques spéciales au Lycée de Marseille.

---

1. — Nous nous proposons d'étudier les racines multiples de l'équation du troisième ordre à laquelle conduit la théorie des plans principaux. A la vérité, M. Laurent a déjà traité le cas de l'équation plus générale que l'on rencontre à l'occasion d'autres théories, et notamment dans la mécanique céleste à propos des excentricités des orbites. Mais le cas simple que nous allons examiner et la méthode élémentaire qui s'y adapte seront peut-être plus directement utiles aux élèves de mathématiques spéciales.

L'équation est la suivante :

$$f(S) = \begin{vmatrix} A - S & B'' & B' \\ B'' & A' - S & B \\ B' & B & A'' - S \end{vmatrix} = 0.$$

2. — On remarque tout de suite que $f(S)$ est une fonction composée de S et que sa dérivée est la somme de trois parties :

$$\begin{aligned} -f'(S) &= (A' - S)(A'' - S) - B^2 \\ &+ (A'' - S)(A - S) - B'^2 \\ &+ (A - S)(A' - S) - B''^2. \end{aligned}$$

Par où on voit que si une valeur de S annule tous les mineurs du déterminant, elle annule en particulier les mineurs principaux et par suite $f'(S)$, et aussi le déterminant c'est-à-dire $f(S)$.

Donc *toute valeur* S *qui annule tous les mineurs est racine double de l'équation en* S.

Réciproquement, *toute racine double de l'équation en* S *annule tous les mineurs*.

En effet, désignant par P, P', P'' les mineurs principaux, on a
$$-f'(S) = P + P' + P''.$$
Par conséquent, toute racine double de l'équation en S satisfait à l'équation
$$P + P' + P'' = o \qquad (1)$$
et par suite, en multipliant par P, à l'équation
$$P^2 + PP' + PP'' = o. \qquad (2)$$
Or, on a identiquement
$$PP' = (A'' - S)\,[(A - S)(A' - S)(A'' - S) - (A - S)B^2 - (A' - S)B'^2] + B^2 B'^2$$
ou bien encore
$$PP' = (A'' - S)\,f(S) + (A'' - S)^2 B''^2 - 2BB'B''(A'' - S) + B^2 B'^2\,;$$
d'où on tire pour toute racine simple ou double
$$PP' = [(A'' - S)B'' - BB']^2.$$
Par analogie $PP'' = [(A' - S)B' - BB'']^2$.

Portant ces valeurs et celle de P dans l'équation (2), on a pour toute racine double :
$$[(A' - S)(A'' - S) - B^2]^2 + [(A'' - S)B' - BB']^2 + [(A' - S)B' - BB'']^2 = o,$$
c'est-à-dire, puisque la valeur de S est réelle, que chaque carré est nul. Cela fait trois mineurs nuls.

Mais, au lieu de multiplier l'équation (1) par P, on pourrait la multiplier par P' ou par P'' et on verrait que les six autres mineurs sont nuls.

3. — Sur les neuf mineurs, six seulement sont différents. On a donc six conditions, encore même ne sont-elles pas distinctes. Voici ces conditions :
$$(A - S)(A' - S) - B''^2 = o,$$
$$(A' - S)(A'' - S) - B^2 = o,$$

$$(A'' - S)(A - S) - B'^2 = 0,$$
$$(A - S)B - B'B'' = 0,$$
$$(A' - S)B' - BB'' = 0,$$
$$(A'' - S)B'' - BB' = 0.$$

1° Si aucun des rectangles n'est nul, on peut tirer des trois dernières $(A - S)$, $(A' - S)$, $(A'' - S)$; et, portant ces valeurs dans les trois premières, on obtient des identités Les conditions nécessaires et suffisantes sont donc :

$$A - S = \frac{B'B''}{B},$$
$$A' - S = \frac{BB''}{B'},$$
$$A'' - S = \frac{BB'}{B''}.$$

2° Si un rectangle est nul, les trois dernières équations exigent qu'un second rectangle soit nul. Soit $B' = B'' = 0$. Les conditions ci-dessus deviennent :

$$(A - S)(A' - S) = 0,$$
$$(A' - S)(A'' - S) - B^2 = 0,$$
$$(A'' - S)(A - S) = 0,$$
$$(A - S)B = 0.$$

Supposons $B \lessgtr 0$. Alors $S = A$ et la seule condition qui ne soit pas une identité est, avec $B' = 0$ et $B'' = 0$,

$$(A' - A)(A'' - A) - B^2 = 0.$$

3° Reste à examiner le cas où les trois rectangles sont nuls. Les trois dernières conditions sont alors des identités et les trois autres s'écrivent

$$(A - S)(A' - S) = 0,$$
$$(A' - S)(A'' - S) = 0,$$
$$(A'' - S)(A - S) = 0,$$

c'est-à-dire $A = A'$ ou une des conditions analogues.

4° Pour étudier les racines triples, prenons la dérivée seconde. On a

$$\frac{1}{2}f''(S) = f(A - S) + (A' - S) + (A'' - S).$$

Par où on voit que si tous les mineurs du second ordre sont nuls pour une valeur de S, cette valeur annule $f''(S)$;

et aussi les mineurs de premier ordre, et par suite $f'(S)$; et aussi le déterminant, c'est-à-dire $f(S)$.

Donc toute valeur de S *qui annule tous les mineurs du second ordre est racine triple.*

Réciproquement, toute racine triple annule tous les mineurs du second ordre.

Car une pareille racine annule $f''(S)$ et, étant double, elle annule aussi les mineurs du premier ordre. Elle est donc racine commune des équations suivantes :

$$(A - S) + (A' - S) + (A'' - S) = 0,$$
$$(A - S)(A' - S) = B''^2,$$
$$(A' - S)(A'' - S) = B^2,$$
$$(A'' - S)(A - S) = B'^2.$$

Élevant la première au carré, et remplaçant les doubles produits par les valeurs tirées des trois autres, on a

$$(A - S)^2 + (A' - S)^2 + (A'' - S)^2 + 2B^2 + 2B'^2 + 2B''^2 = 0.$$

Ce qui exige, puisque la valeur de S est réelle, que tous les mineurs du second ordre soient nuls. On a alors une sphère.

On remarquera que la racine triple ne peut être nulle, sans quoi on aurait

$$A = 0 \quad A' = 0 \quad A'' = 0 \quad B = 0 \quad B' = 0 \quad B'' = 0$$

et la surface se réduirait à un plan.

NOTE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Par M. G. de Longchamps.

Lorsqu'une équation du quatrième degré $f(x, y) = 0$, représente deux cercles, on peut se proposer de décomposer cette équation en deux facteurs du second degré. Voici une solution simple de ce problème très élémentaire.

1. Soient (axes rectangulaires)

$$x^2 + y^2 + P = 0$$
$$x^2 + y^2 + Q = 0$$

les deux cercles cherchés, P et Q désignant bien entendu,

des fonctions du premier degré.

$$P = \alpha x + \beta y + \gamma$$
$$Q = \alpha' x + \beta' y + \gamma'.$$

On aura donc,

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 + P)(x^2 + y^2 + Q).$$

Ce qui prouve d'abord que l'ensemble des termes du quatrième degré de l'équation $f = 0$ doit, à une constante près, *former le carré parfait de* $(x^2 + y^2)$; cette même égalité, donne encore pour l'ensemble des termes du troisième degré, $(x^2 + y^2)[(\alpha + \alpha')x + (\beta + \beta')y]$, ce qui démontre que l'ensemble des termes du troisième degré de l'équation $f = 0$ doit être divisible par $(x^2 + y^2)$. Nous pouvons donc énoncer déjà la proposition suivante, d'une évidence immédiate:

Pour qu'une équation du quatrième degré puisse représenter deux cercles, il est nécessaire : 1° que l'ensemble des termes du quatrième degré forme le carré parfait du binôme $(x^2 + y^2)$ *; 2° que l'ensemble des termes du troisième degré soit divisible par* $(x^2 + y^2)$.

La première chose à faire, quand on se trouve en présence d'une équation du quatrième degré qu'on soupçonne représenter l'*ensemble de deux cercles*, est de vérifier que les conditions précédentes sont remplies. Il nous reste à expliquer comment, f remplissant ces conditions, on peut toujours la décomposer, si vraiment elle représente deux cercles.

2. L'équation proposée pourra s'écrire, dans cette hypothèse, $f = (x^2 + y^2)^2 + R(x^2 + y^2) + \varphi = 0$
R étant de la forme $Ax + By$; φ désignant un polynôme du second degré; ou encore

$$f = (x^2 + y^2)^2 + (R + \lambda)(x^2 + y^2) + \psi = 0 \quad (1)$$

en posant $\psi = \varphi - \lambda(x^2 + y^2)$.

D'autre part on a, si f est l'ensemble de deux cercles,

$$f = (x^2 + y^2 + P)(x^2 + y^2 + Q)$$

ou $f = (x^2 + y^2)^2 + (x^2 + y^2)(P + Q) + PQ = 0 \quad (2)$

ou en posant $x^2 + y^2 = U$

$$U^2 + U(P + Q) + PQ = 0.$$

La quantité soumise au radical, dans cette équation du second degré en U, est un *carré parfait* ; mais (1) et (2) sont

des *équations identiques* et si l'on suppose que l'on a pris l'arbitraire λ égale à $(\gamma + \gamma')$, alors

$$P + Q = R + \lambda$$

et

$$PQ = \psi,$$

donc $V = (R + \lambda)^2 - 4\psi$ sera un carré parfait. *Réciproquement*, si V est carré parfait, la décomposition a lieu. De ceci on déduit la règle suivante :

Étant donnée une équation du quatrième degré à deux variables $f(x,y) = 0$ *qu'on soupçonne représenter l'ensemble de deux cercles, pour lé vérifier et trouver ces calculs on doit d'abord constater que l'équation* $f = 0$ *remplit les deux conditions ci-dessus énoncées.*

Ces conditions étant remplies, on écrira cette équation sous la forme $(x^2 + y^2)^2 + (x^2 + y^2)(R + \lambda) + \psi = 0$
λ *étant un paramètre arbitraire;* $R(x^2 + y^2)$, *l'ensemble des termes du troisième degré;* ψ, *une fonction du second degré seulement. On résout alors l'équation par rapport à* $(x^2 + y^2)$ *; on obtient sous le radical une fonction du second degré seulement, et on déterminera* λ *de façon que celle-ci devienne un carré parfait.*

S'il existe une valeur de λ *remplissant cette condition,* $f = 0$ *représente deux cercles et la décomposition est effectuée; sinon* $f = 0$ *ne représente pas deux cercles.*

3. Appliquons ce théorème à un exemple numérique, soit

$$f = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 3x^3 - 4x^2y + 3xy^2 - 4y^3 + 5x^2 + 6y^2 - 7xy + 5x - 5y + 2 = 0;$$

on peut l'écrire, conformément à la méthode précédente,

$$(x^2 + y^2)^2 + (x^2 + y^2)(3x - 4y + \lambda) + (5 - \lambda)x^2 + (6 - \lambda)y^2 - 7xy + 5x - 5y + 2 = 0.$$

laquelle, résolue par rapport à $(x^2 + y^2)$, donne :

$$2(x^2 + y^2) = 4y - 3x - \lambda \pm \sqrt{\begin{array}{l}4y^2(\lambda - 2) + 4xy \\ + (4\lambda - 11)x^2 + 4 \\ (5 - 2\lambda)y + 2(3\lambda - 10)x \\ + \lambda^2 - 8.\end{array}}$$

Il faut maintenant déterminer λ, de façon que la quantité soumise au radical soit un carré parfait. Il est donc *nécessaire* (mais non *suffisant*) que les termes en y^2, xy, x^2 forment

eux-mêmes un carré parfait. On a donc pour déterminer λ l'équation

$$4 - 4(\lambda - 2)(4\lambda - 11) = 0$$
$$4\lambda^2 - 19\lambda + 21 = 0$$

qui donne deux valeurs : $\lambda' = 3,\ \lambda'' = \frac{7}{4}$.

On doit alors, se rappelant que la condition exprimée est *nécessaire, mais non suffisante*, essayer successivement λ' et λ''. On trouve ici que $\lambda' = 3$ rend la quantité soumise au radical carré parfait; mais non la quantité λ''. Il est d'ailleurs évident que si l'une des racines effectue la transformation de la quantité sous le radical en carré parfait, l'autre ne peut pas faire cette transformation.

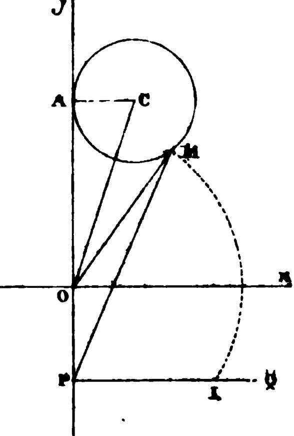
On a ici, finalement,

$$2(x^2 + y^2) = (4y - 3x - 3) \pm (2y + x - 1),$$

ce qui donne les deux cercles :

$$x^2 + y^2 - 3y + x + 2 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - y + 2x + 1 = 0.$$

4. Nous proposerons aux jeunes lecteurs de ce journal, et comme application du théorème précédent, l'exercice suivant (*).



Soient ox, oy *deux axes rectangulaires ;* c *le centre d'un cercle tangent à* oy; *on prend un point* M *sur le cercle et l'on mène* MP *parallèle à* OC; P *étant le point de rencontre de cette parallèle avec* oy, *on mène par* P *une droite* PQ, *parallèle à* ox, *laquelle rencontre le cercle décrit du point* O, *comme centre, avec* OM *pour rayon en un point* I. *Le lieu du point* I *est l'ensemble de deux cercles.*

On propose de le reconnaître aussi par la géométrie élémentaire.

(*) Question proposée dans le *Manuel des candidats à l'École polytechnique*, de M. Catalan.

ÉTUDE SUR LES COORDONNÉES TANGENTIELLES

ET LEURS APPLICATIONS

Par M. E. J. Boquel.

Définitions. — L'équation de la ligne droite en coordonnées rectilignes (ou cartésiennes) étant $Ax + By + C = 0$, on voit que, si a et b représentent en grandeur et en signe les segments déterminés par cette droite à partir de l'origine sur les axes de coordonnées, son équation prendra la forme connue $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Si l'on pose $\frac{1}{a} = u$ et $\frac{1}{b} = v$, cette équation devient

$$ux + vy = 1; \qquad (1)$$

u et v étant des constantes données, l'équation (1) établit entre les coordonnées cartésiennes x et y d'un point du plan une relation exprimant que ce point appartient à la droite particulière définie par les constantes u et v.

Si, au contraire, on regarde x et y comme des quantités données, et $u\,v$, comme des variables, l'équation (1) établira entre u et v une relation exprimant que les droites (1) passent toutes par le point donné (x, y).

u et v définissant une droite particulière du plan, comme x et y définissent un point particulier du plan, nous appellerons ces quantités les *coordonnées* de la droite, de même que x et y sont les *coordonnées* du point.

Si, entre les coordonnées u et v de la droite, on établit une relation $f(u, v) = 0$ de forme quelconque (pourvu que f soit une fonction continue) et que l'on choisisse l'une d'elles pour variable indépendante, l'autre coordonnée sera une fonction continue de la première et variera avec elle d'une manière continue, suivant les lois de l'analyse, c'est-à-dire suivant la nature de f. Au système de valeurs correspondantes de u et de v correspondra une certaine droite du plan, et un accroissement infiniment petit, donné à celle des deux coordonnées qui a été prise pour variable indépendante, déterminera un accroissement infiniment petit corres-

pondant pour l'autre, de sorte qu'il en résultera un déplacement infiniment petit correspondant pour la droite considérée, et qu'en définitive la droite se mouvra d'une manière continue dans le plan. Les positions successives qu'elle occupe ainsi peuvent être envisagées comme les tangentes successives d'une courbe, et l'on comprend dès lors que l'équation $f(u, v) = o$ puisse, dans le nouveau système de coordonnées que nous adoptons, représenter une courbe considérée comme la succession de ses contacts avec toutes ses tangentes, ou, ce qui revient au même, comme la succession des points d'intersection des tangentes infiniment voisines.

Dans la courbe définie par l'équation $f(x, y) = o$ en coordonnées cartésiennes, une tangente est formée par la droite qui joint deux points infiniment voisins sur la courbe. Dans la courbe définie par l'équation $f(u, v) = o$, un point est formé par la rencontre de deux tangentes infiniment voisines qui se coupent alors sur la courbe. Dans les deux cas, ce langage revient à dire qu'un arc infiniment petit de la courbe se confond avec un élément infiniment petit de la tangente autour du point de contact.

Cette considération des courbes comme enveloppées par des droites se déplaçant d'une manière continue dans le plan suivant une certaine loi, a fait donner aux coordonnées u et v de la droite le nom de *coordonnées tangentielles* (*).

L'emploi des coordonnées tangentielles dans l'analyse géométrique remonte à Plücker; elles ont fourni un précieux moyen d'investigation et mis algébriquement en évidence le principe de dualité, en vertu duquel les propriétés résultant de la jonction des points se transportent à l'intersection des droites par une simple réciprocité dans les énoncés.

Le travail que nous commençons actuellement a précisément pour but de faire connaître et apprécier les nombreuses applications du nouvel instrument dont Plücker a enrichi l'analyse.

(*) Clebsch les appelle aussi *coordonnées-lignes*, par opposition aux quantités x et y, qu'il appelle *coordonnées-points*.

Équation du point d'intersection de deux droites. — L'équation $ux + vy = 1$ étant, comme nous l'avons dit, la relation existant entre les coordonnées u et v de toutes les droites qui passent par un même point (x, y), nous l'appellerons l'*équation du point*, de même qu'en coordonnées cartésiennes elle est l'équation de la droite, parce qu'elle établit une relation entre les coordonnées cartésiennes x et y de tous les points situés sur une même droite. Soient $(u_0\ v_0)$ et $(u_1\ v_1)$ deux droites données. Pour que ces droites passent par le point (x, y), il faut qu'on ait

$$u_0x + v_0y - 1 = 0$$

et

$$u_1x + v_1y - 1 = 0.$$

Une droite quelconque passant par ce point aura pour équation

$$ux + vy - 1 = 0.$$

Si l'on tire des deux premières conditions les valeurs de x et de y, et qu'on les reporte dans la troisième équation, on aura entre u et v une relation exprimant que la droite $ux + vy - 1 = 0$ passe par le point d'intersection des deux droites $(u_0\ v_0)$ et $(u_1\ v_1)$, c'est-à-dire l'équation de ce point. Or, le calcul dont il s'agit est l'élimination de x, y, t entre les trois équations linéaires et homogènes

$$u_0x + v_0y - t = 0$$
$$u_1x + v_1y - t = 0$$
$$ux + vy - t = 0$$

et son résultat est le déterminant

$$\begin{vmatrix} u_0 & v_0 & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

dont l'analogie est complète avec l'équation de la droite qui joint les deux points (x_0y_0) et (x_1y_1).

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Coordonnées tangentielles homogènes. — De même qu'en coordonnées cartésiennes il y a le plus souvent intérêt à employer des coordonnées homogènes, en remplaçant dans les calculs x et y par $\frac{x}{t}$ et $\frac{y}{t}$, en coordonnées tangentielles

nous ferons aussi très souvent usage de coordonnées homogènes, en remplaçant u et v par $\frac{u}{w}$ et $\frac{v}{w}$. Les résultats, en fonction de u et v seulement, se déduiront des résultats en u, v, w, par l'hypothèse $w = 1$.

L'équation du point devient, dans ce cas, $ux + vy = w$, et alors ce sont les quantités $\frac{w}{u}$ et $\frac{w}{v}$ qui représentent en grandeur et en signe les segments déterminés par chaque droite, à partir de l'origine, sur les axes des coordonnées.

Quand on considère une droite donnée sous la forme générale ordinaire $Ax + By + C = 0$, on a donc $-\frac{C}{A} = \frac{w}{u}$, et $-\frac{C}{B} = \frac{w}{v}$.

Définition d'un faisceau de droites. — Coordonnées d'un rayon quelconque d'un faisceau. — On appelle *faisceau de droites* l'ensemble des droites qui tournent autour d'un point fixe; l'une quelconque de ces droites porte le nom de *rayon du faisceau*, et le point fixe en est le *centre*.

L'équation du point d'intersection de deux droites (u_0v_0) et (u_1v_1) étant

$$\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_0 & v_0 & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

il est évident que cette équation devient identique quand on y fait $u = \frac{u_0 + \lambda u_1}{1 + \lambda}$ et $v = \frac{v_0 + \lambda v_1}{1 + \lambda}$. On a, en effet, identiquement :

$$\begin{vmatrix} u_0 & v_0 & 1 \\ u_0 & v_0 & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_0 + \lambda u_1 & v_0 + \lambda v_1 & 1 + \lambda \\ u_0 & v^0 & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{u_0 + u_0}{1 + \lambda} & \frac{v_0 + \lambda v_1}{1 + \lambda} & 1 \\ u_0 & v_0 & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \end{vmatrix} (1 + \lambda) = 0.$$

On peut, d'ailleurs, observer aussi que l'équation générale des droites passant par le point d'intersection des deux

droites $u_0x + v_0y - 1 = 0$ et $u_1x + v_1y - 1 = 0$ est $u_0x + v_0y - 1 + \lambda(u_1x + v_1y - 1) = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{u_0 + \lambda u_1}{1 + \lambda} x + \frac{v_0 + \lambda v_1}{1 + \lambda} y - 1 = 0.$$

Les coordonnées de l'une quelconque de ces droites sont donc $u = \dfrac{u_0 + \lambda u_1}{1 + \lambda} \qquad v = \dfrac{v_0 + \lambda v_1}{1 + \lambda}$.

Cette remarque est utile en ce qu'elle va nous permettre d'interpréter le paramètre λ au point de vue géométrique.

Interprétation géométrique de λ. — Soient OA_0 et OA_1 les deux droites $(u_0\ v_1)$ et $(u_0\ v_1)$, et soit OA l'une quelconque des droites du faisceau dont le centre est en O, correspondant à une valeur particulière de λ.

$M(x, y)$ étant un point quelconque de OA, menons les perpendiculaires MP_0 et MP_1 sur les deux rayons fixes OA_0 et OA_1 ; on a :

$$MP_0 = \frac{u_0x + v_0y - 1}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}} \quad \text{et } MP_1 = \frac{u_1x + v_1y - 1}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}.$$

Donc $\dfrac{MP_0}{MP_1} = \dfrac{u_0x + v_0y - 1}{u_1x + v_1y - 1} \times \dfrac{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}$.

Mais l'équation de OA étant

$$u_0x + v_0y - 1 + \lambda(u_1\ x + v_1\ y - 1) = 0,$$

il en résulte $\dfrac{MP_0}{MP_1} = -\lambda \dfrac{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}$,

d'où $\qquad \lambda = -\dfrac{MP_0}{MP_1} \dfrac{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}$.

Le rapport $\dfrac{MP_0}{MP_1}$ est le même pour tous les points du rayon OA ; et l'on voit que le paramètre λ ne diffère de ce rapport que par le facteur constant $\sqrt{\dfrac{u_0^2 + v_0^2}{u_1^2 + v_1^2}}$.

Rapport anharmonique de quatre rayons d'un faisceau. — Si l'on considère un autre rayon du faisceau, λ' étant la valeur du paramètre qui lui correspond, on aura, comme précédemment :

$$\lambda' = -\frac{M'P'_0}{M'P'_1} \times \sqrt{\frac{u_0 + v_0^2}{u_1^2 + v_1^2}}$$

D'où
$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{MP_0}{MP_1} : \frac{M'P'_0}{M'P'_1}.$$

Ce rapport, qui ne dépend que de la position relative des quatre rayons considérés, porte le nom de *rapport anharmonique* de ces quatre rayons.

C'est un élément très important, dont M. Chasles a fait un merveilleux usage en géométrie pure, et que nous aurons souvent l'occasion de considérer dans la suite de ce travail.

On peut en donner une expression simple, en fonction des angles que font entre eux les rayons considérés. On a, en effet,

$$MP_0 = OM \sin (OA_0, OA),\ MP_1 = OM \sin (OA, OA_1)$$
$$M'P'_0 = OM' \sin (OA_0, OA'),\ M'P'_1 = OM' \sin (OA', OA_1)$$

Donc

$$\frac{MP_0}{MP_1} = \frac{\sin (OA_0, OA)}{\sin (OA, OA_1)} \text{ et } \frac{M'P'_0}{M'P'_1} = \frac{\sin (OA_0, OA')}{\sin (OA', OA_1)}$$

et par conséquent :

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\sin (OA_0, OA)}{\sin (OA, OA_1)} : \frac{\sin (OA_0, OA')}{\sin (OA', OA_1)}.$$

Dans l'écriture des angles, nous plaçons toujours le premier le rayon que nous considérons comme le rayon du départ, et nous supposons toujours, comme pour les segments, que l'on fait la convention $(OA_0, OA) = -(OA, OA_0)$.

Le rapport anharmonique est projectif. — L'observation précédente établit immédiatement que le rapport anharmonique est projectif ; car une transversale quelconque rencontrant les quatre rayons d'un faisceau est divisée par eux en quatre segments de mêmes signes que les angles correspondants du faisceau, et si l'on considère les quatre points déterminés sur la transversale par les quatre rayons du

faisceau, on voit que le quotient du rapport des distances de deux de ces points à l'un des deux autres par le rapport des distances des deux mêmes points à l'autre point du second couple, est égal au quotient des rapports des sinus des angles formés par les rayons qui joignent ces points au centre du faisceau (*). Dès lors, pour que le théorème soit évident, il suffit d'avoir préalablement défini le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite, comme l'a fait M. Chasles ; mais nous n'insisterons pas sur ce point qui est du domaine de la géométrie pure.

(A suivre.)

QUESTIONS PROPOSÉES

Mathématiques élémentaires.

284. — Résoudre le système :

$$\frac{x^5 + y^5}{x^3 + y^3} = \frac{121}{13};\ x + y = 2.$$

285. — Si α, β, γ sont trois angles différents satisfaisant à l'équation

$$\lambda \text{ séc } x + \mu \text{ coséc } x + \nu = 0,$$

prouver que l'on a

$$\sin(\beta + \gamma) + \sin(\gamma + \alpha) + \sin(\alpha + \beta) = 0.$$

286. — Établir une relation entre les coefficients de l'équation $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f = 0$ pour qu'on puisse la mettre sous la forme

$$(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^2 + p(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) + q = 0.$$

287. — On donne

$$x - y = a;\ xy = b.$$

Exprimer $x^n - y^n$ en fonction de b et de a pour une valeur entière, positive et quelconque de n.

(*) J'ai donné la démonstration générale de ce fait dans mes *Leçons de géométrie analytique*, au § 2 du chapitre qui traite de la théorie des projections.

288. — Soit un triangle ABC, et O le centre du cercle circonscrit. On joint OA, OB, OC qui rencontrent la circonférence en M, M' et M″; on mène MD perpendiculaire sur BC, M'D' perpendiculaire sur CA, et M″D″ perpendiculaire sur AB. Démontrer que les droites AD, B'D', CD″ concourent en un même point.

289. — On donne deux cercles qui se coupent; par l'un des points d'intersection, on fait passer une corde commune aux deux cercles; trouver le lieu du milieu de ces cordes.

290. — Étant donnés deux points A et B sur une droite infinie, on sait qu'il y a deux points C et D qui divisent AB dans un rapport donné $\frac{m}{n}$. Dans quel rapport le point O, milieu de CD, divise-t-il la ligne AB? Le point O est-il entre A et B, ou en dehors de ce segment?

291. — On donne une parabole; soit M un point de cette courbe: on projette ce point sur la directrice, et du point C, projection de M sur la directrice, on abaisse une perpendiculaire sur le rayon vecteur FM. Trouver le lieu du pied I de cette perpendiculaire. *(De Longchamps.)*

292. — On donne une parabole; par le pied O de la directrice, on mène une sécante à la parabole; soient A et B les points d'intersection et C le milieu de AB. On projette le point C sur la directrice et de cette projection on abaisse une perpendiculaire DI sur la sécante OAB. Trouver le lieu du point I. *(De Longchamps.)*

Mathématiques spéciales.

293. — Trouver l'équation du système de perpendiculaires abaissées du point (x', y') sur les droites,

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$$

les axes étant rectangulaires. *(Université de Dublin.)*

294. — Les lignes

$$x = 0,\ y = 0,\ x + my + n = 0,\ mx + y + n' = 0$$

forment un quadrilatère inscriptible; trouver le rayon du cercle circonscrit. *(Ibid.)*

295. — Le pôle étant placé au centre de similitude du cercle $\rho^2 - 2\rho a \cos(\theta - \alpha) + a^2 = r^2$ et du cercle de rayon mr, trouver l'équation de l'axe radical, et celle du cercle coupant orthogonalement les deux cercles donnés, et dont le centre a pour angle polaire β.

(Université de Dublin.)

296. — Trouver la relation qui doit exister entre les coefficients p, q, r de l'équation du troisième degré

$$x^4 - px^2 + qx - r = 0$$

pour que les racines soient les sinus des angles d'un triangle.

(Ibid.)

297. — Si α, β, γ, δ sont les racines de l'équation du quatrième dégré $f(x) = 0$, on peut exprimer la somme $f'(\alpha) + f'(\beta) + f'(\gamma) + f'(\delta)$ sous la forme d'un produit de trois facteurs.

298. — Si l'on cherche toutes les équations du quatrième degré telles que les carrés de leurs racines soient en même temps racines de la même équation, on obtient *seize* équations satisfaisant à cette condition. 1° Former ces équations. 2° Il y en a *dix* dont les coefficients sont réels; démontrer qu'aucune n'est irréductible, c'est-à-dire qu'on peut les décomposer en d'autres équations de degrés moindres; trouver leurs racines. 3° Des *six* équations dont les coefficients sont imaginaires et qui satisfont à la question, il y en a *trois* qui sont les conjuguées des trois autres; démontrer *a priori* qu'il doit en être ainsi.

Le Rédacteur-Gérant,

J. KŒHLER.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 664-1.

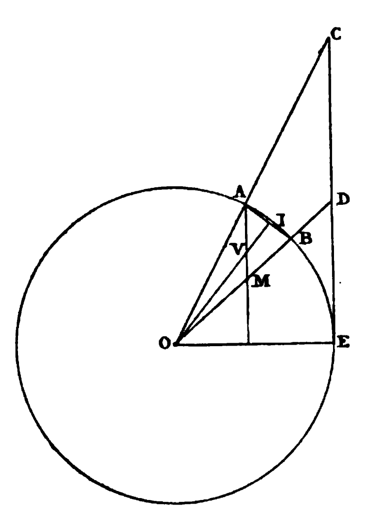
NOUVELLE MÉTHODE
POUR LE CALCUL
DU RAPPORT DE LA CIRCONFÉRENCE AU DIAMÈTRE

Par **L. Geoffroy,**
Répétiteur à l'École Centrale, Professeur au Collège Chaptal.

Les procédés exposés en géométrie élémentaire pour calculer le nombre π reviennent, en principe, à considérer la circonférence comme la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone régulier inscrit ou circonscrit dont le nombre des côtés augmente indéfiniment.

On ne paraît pas s'être préoccupé jusqu'ici, de considérer la limite d'une ligne polygonale irrégulière, bien qu'on démontre généralement, que la limite ne dépend pas de la loid'inscription.

Nous nous proposons d'exposer, dans cette note, une méthode où la loi d'inscription est différente de celle employée dans les méthodes dites des périmètres et des isopérimètres.



Lemme. — Considérons une circonférence de rayon $R = 1$, menons la tangente en E, prenons sur la circonférence, un arc quelconque AB, et traçons les rayons OA, OB qui déterminent sur la tangente considérée, un segment CD. Comparons la corde AB, à ce segment.

Pour cela, abaissons OI perpendiculaire sur AB. Les triangles OAB, OCD qui ont un angle commun, satis-

font à la relation :

$$\frac{Tr . OAB}{Tr . OCD} = \frac{OA . OB}{OC . OD}$$

Mais, si on évalue les aires de ces deux triangles, on aura :

$$Tr . OAB = \frac{AB . OI}{2}$$

$$Tr . OCD = \frac{CD . OE}{2}$$

on a, par conséquent :

$$\frac{OA . OB}{OC . OD} = \frac{AB . OI}{CD . OE}$$

d'où, en remarquant que le rayon est égal à 1,

$$\frac{AB}{CD} = \frac{1}{OC . OD . OI}$$

Si nous remplaçons OI par 1, et OD par OC, nous diminuons le second membre de la précédente égalité, et par suite :

$$\frac{AB}{CD} > \frac{1}{OC^2} \qquad (1)$$

d'autre part, nous avons

$$\frac{AB}{CD} < \frac{1}{OD^2} \qquad (2)$$

ce qui revient à démontrer que $\frac{1}{OC . OD . OI}$ est plus petit que $\frac{1}{OD^2}$

ou qu'on a
$$\frac{1}{OC . OI} < \frac{1}{OD}$$

ou enfin
$$\frac{1}{OC} < \frac{OI}{OD}$$

Cette dernière inégalité se vérifie immédiatement, en menant AM parallèle à CD. On a en effet

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OM}{OD}$$

or $OA = 1$, et $OM < OV < OI$

Donc
$$\frac{1}{OC} < \frac{OI}{OD}$$

L'égalité (2) est par conséquent démontrée. Nous avons,

en résumé, la suite d'inégalités :

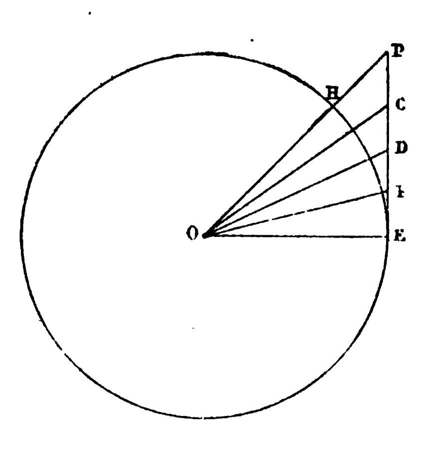
$$\frac{1}{OC^2} < \frac{AB}{AC} < \frac{1}{OD^2}. \qquad (3)$$

Si l'on suppose que AB tende vers zéro, il en sera de même de CD et on aura $\lim \frac{AB}{CD} = \frac{1}{OD^2}$ car OC et OD se confondent à la limite.

Calcul d'une valeur approchée de $\frac{\pi}{4}$.

Prenons sur la tangente EP $= 1$; joignons OP, l'arc EH est égal à $\frac{\pi}{4}$, puisque le rayon du cercle est 1.

Pour obtenir une valeur approchée de cet arc, partageons EP en n divisions égales, et unissons les points de division au point O. Ces droites déterminent, sur la circonférence, les sommets d'une ligne brisée irrégulière EFABH. Le périmètre de cette ligne se rapprochera d'autant plus de l'arc $\frac{\pi}{4}$ que n sera plus grand.



Soit AB un élément de ce polygone, l'élément correspondant CD de la tangente a pour valeur $\frac{EP}{n} = \frac{1}{n}$; nous avons d'après le lemme précédent

$$\frac{AB}{CD} < \frac{1}{OD^2}$$

or

$$OD^2 = 1 + ED^2$$

Soit p le nombre de divisions égales comptées de E en D, on aura ED $= p. \frac{1}{n}$, CD $= \frac{1}{n}$; donc en remplaçant, il

viendra $$AB < \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{p^2}{n^2}}$$

ou $$AB < \frac{n}{n^2 + p^2}$$

par suite le périmètre P de la ligne inscrite est plus petit que la somme des fractions de la forme $\frac{n}{n^2 + p^2}$, lorsque p varie de o à $n - 1$

donc $$P < n\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2^2} + \frac{1}{n^2 + 3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2 + (n-1)^2}\right) \quad (4)$$

P se confond à la limite avec l'arc EH, lorsque n croît au delà de toute limite, on peut donc écrire

$$\frac{\pi}{4} = \lim n\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2^2} + \frac{1}{n^2 + 3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2 + (n-1)^2}\right) \quad (5)$$

D'autre part, nous avons établi l'inégalité

$$\frac{AB}{CD} > \frac{1}{OC^2}$$

on a $$OC^2 = 1 + EC^2 = 1 + \frac{(p+1)^2}{n^2}$$

donc, il viendra

$$AB > CD \frac{1}{1 + \frac{p) + 1)^2}{n^2}}$$

$$AB > \frac{n}{n^2 + (p+1)^2}$$

en faisant la somme des inégalités analogues à la précédente de $p = o$, à $p = n - 1$. On aura

$$P > n\left(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2 + n^2}\right) \quad (6)$$

On voit qu'en rapprochant les inégalités (4) et (6), on peut calculer deux valeurs approchées l'une par excès l'autre par

défaut du périmètre P. Ces deux valeurs ne diffèrent que de

$$n\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^2}\right] = \frac{1}{2n}$$

elles tendent toutes deux vers $\frac{\pi}{4}$.

On pourra donc, en prenant n suffisamment grand, avoir deux valeurs approchées de $\frac{\pi}{4}$, différant aussi peu qu'on le voudra.

Nous indiquons ici le résultat du calcul effectué pour $n = 10$.

La formule (4) donne :

$$P < 10\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{104} + \frac{1}{109} + \frac{1}{116} + \frac{1}{125} + \frac{1}{136} + \frac{1}{149} + \frac{1}{164} + \frac{1}{181}\right)$$

en effectuant on trouve :

$$P < 0{,}8097 \ldots \text{ environ,}$$

la formule (6) donne :

$$P > 10\left(\frac{1}{101} + \frac{1}{104} + \ldots + \frac{1}{200}\right)$$

$$P > 0{,}7597 \ldots \text{ environ.}$$

Ces deux résultats comprennent entre eux la valeur $\frac{\pi}{4} = 0{,}785 \ldots$

Développement de la valeur de $\frac{\pi}{4}$ en série.

Reprenons la formule (5).

Nous avons trouvé :

$$\frac{\pi}{4} = \lim n\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2+(n-1)^2}\right)$$

Considérons dans la parenthèse la fraction de rang quelconque $\frac{1}{n^2+p^2}$,

Si on effectue la division, on aura :

$$\frac{1}{n^2+p^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{p^2}{n^4} + \frac{p^4}{n^6} - \frac{p^6}{n^8} + \frac{p^8}{n^{10}} - \ldots$$

Si on développe de cette manière chacune des fractions

de la parenthèse, on aura :

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6} - \frac{1}{n^8} + \ldots$$

$$\frac{1}{n^2+2^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{2^2}{n^4} + \frac{2^4}{n^6} - \frac{2^6}{n^8} + \ldots$$

$$\frac{1}{n^2+3^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{3^2}{n^4} + \frac{3^4}{n^6} - \frac{3^6}{n^8} + \ldots$$

. . . .

. . . .

$$\frac{1}{n^2+(n-1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{(n-1)^2}{n^4} + \frac{(n-1)^4}{n^6} - \frac{(n-1)^6}{n^8} + \ldots$$

en ajoutant par colonnes verticales, et en multipliant par n, on aura, en désignant par S_2, S_3, S_4, etc., la somme des puissances deuxième, troisième, etc., des $(n-1)$ premiers nombres entiers.

$$\frac{\pi}{4} = \lim\left(1 - \frac{S_2}{n^3} + \frac{S_4}{n^5} + \frac{S_6}{n^7} + \frac{S_8}{n^9} - \ldots\right) \quad (7)$$

Pour calculer ce que deviennent $\frac{S_2}{n^3}$, $\frac{S_4}{n^5}$, etc., à la limite nous établirons le théorème suivant :

Théorème. — *Sachant que la somme* S_p *des puissances* p^{mes} *des* $n-1$ *premiers nombres entiers est une fonction entière du degré* $(p+1)$, *de* n *considéré comme variable, démontrer que, lorsque* n *augmente au delà de toute limite, on a*

$$\lim \frac{S_p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

En effet, développons le binôme $(a+1)^{p+1}$ et remplaçons successivement a par 1, 2, 3, etc., ... $(n-1)$, nous aurons

$$2^{p+1} = 1 + (p+1)1^p + \frac{(p+1)p}{1.2}1^{p-1} + \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}1^{p-2} + \ldots$$

$$3^{p+1} = 2^{p+1} + (p+1)2^p + \frac{(p+1)p}{1.2}2^{p-1} + \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}2^{p-2} + \ldots$$

. . . .

$$n^{p+1} = (n-1)^{p+1} + (p+1)(n-1)^{p}$$
$$+ \frac{(p+1)p}{1 \cdot 2}(n-1)^{p-1}$$
$$+ \frac{(p+1)p(p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(n-1)^{p-2} + \dots$$

En ajoutant et simplifiant on aura

$$n^{p+1} = 1 + (p+1)S_p$$
$$+ \frac{(p+1)p}{1 \cdot 2} S_{p-1} + \frac{(p+1)p(p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} S_{p-2} + \dots$$

Divisons les deux membres par n^{p+1}; les polynômes S_{p-1}, S_{p-2}, S_{p-3}, etc., sont des fonctions de n, du degré p, $p-1$, etc., par suite les quotients

$$\frac{S_{p-1}}{n^{p+1}}, \quad \frac{S_{p-2}}{n^{p+1}}, \quad \frac{S_{p-3}}{n^{p+1}}, \quad \text{etc},$$

s'annuleront pour $n = \infty$, puisque le degré du numérateur par rapport à n, est inférieur au degré du dénominateur.

On aura donc à la limite

$$1 = (p+1) \lim \frac{S_p}{n^{p+1}},$$

d'où $\lim \dfrac{S_p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{p+1}$.

Si nous reprenons maintenant la formule (7) et si nous remarquons qu'on a, d'après le théorème précédent,

$$\lim \frac{S_2}{n^3} = \frac{1}{3},$$
$$\lim \frac{S_4}{n^5} = \frac{1}{5}, \text{ etc.},$$

il viendra $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{9}$, etc.

Nous obtenons ainsi le développement indiqué dans tous les traités de calcul intégral.

(A suivre.)

NOTE D'ARITHMÉTIQUE

Par M. **Eug. Marin**, élève au Lycée d'Agen.

On est quelquefois amené à chercher le plus petit commun multiple d'une suite assez considérable de nombres. L'opération qui consisterait à les décomposer en facteurs premiers est toujours très longue; la méthode suivante, que nous croyons peu connue, nous semble plus avantageuse au point de vue de l'écriture, et elle est aussi prompte que la méthode ordinaire.

Règle. — On écrit les nombres donnés sur une même ligne horizontale en barrant ceux qui sont diviseurs des autres (1). On prend un diviseur n de l'un des nombres non barrés, et on cherche parmi les nombres restants, ceux qui sont divisibles par n; au-dessous de chacun d'eux, on écrit le quotient correspondant.

Parmi les nombres non multiples de n, on prend ceux qui ont un facteur commun avec n, et on les divise par ce facteur, en écrivant le quotient correspondant sous le nombre qui l'a formé.

On écrit une seconde fois, sur une même ligne horizontale les divers quotients, et les nombres, non employés, premiers avec n; on obtient ainsi une seconde ligne de nombres sur lesquels on opère comme précédemment, jusqu'à ce que l'on n'arrive qu'à des nombres premiers entre eux. Le produit des nombres contenus dans la dernière ligne, et des différents diviseurs n, n', n'' ... est le plus petit commun multiple cherché.

Proposons-nous, par exemple, de trouver le plus petit commun multiple des nombres

24, 16, 6, 20, 4, 8, 10, 30, 12, 25.

(1) Par suite de difficultés d'impression, ici, au lieu de barrer ces nombres, nous les soulignons, ce qui revient au même (AM).

En appliquant la règle, on dispose les calculs comme il suit:

12	24	16	6	20	4	8	10	30	12	25
	2	4		5					5	25

Le plus petit commun multiple est

$$4 \times 25 \times 12 = 1200.$$

En effet, tout nombre divisible par 24 l'est aussi par 4, 6, 8, 12, sous-multiples de 24; on peut donc négliger ces nombres; pour la même raison, on négligera 10, qui divise 20; la question est donc ramenée à trouver le plus petit commun multiple entre les nombres

24, 16, 20, 30 et 25.

Prenons un diviseur d'un de ces nombres, 12 par exemple, qui est un diviseur de 24. Le plus petit commun multiple devant contenir le facteur 24, contiendra 12 avec le facteur 2, quotient de la division de 24 par 12; de plus 12 fournit le facteur 4, qui divise 20 et 16; le facteur 6, qui divise 30. Il ne reste plus à prendre pour compléter ces nombres que les quotients de 16 par 4, de 20 par 4, de 30 par 6, 25 étant premier avec 12, on l'écrit de nouveau tel quel.

On obtient ainsi la seconde ligne de nombres

2 4 5 5 25

Nous supprimons 2 comme diviseur de 4, et 5 comme diviseur de 25. Il reste 4 et 25, qui sont des nombres premiers entre eux; le produit de ces deux nombres, multiplié par 12, est le plus petit commun multiple cherché.

Application. — 1. *Trouver le plus petit commun multiple des nombres*

14 16 40 50 55 25 8 9 64

On dispose l'opération comme il suit:

10	14	16	40	50	55	25	8	9	64
	7		4	5	11	5		9	32

Le plus petit commun multiple est

$$7 \times 5 \times 11 \times 9 \times 32 \times 10 = 1108800$$

2. *Trouver le plus petit commun multiple des nombres*

27 24 6 15 5 9 126

La règle donne

9 |	27	24	$\underline{6}$	15	$\underline{5}$	$\underline{9}$	126
2 |	3	8		5			14
	3	4		5			7

Le plus petit commun multiple est

$$3 \times 4 \times 5 \times 7 \times 2 \times 9 = 7560.$$

Cette méthode est surtout avantageuse et préférable à la méthode ordinaire lorsque les nombres ne sont pas très-considérables. Elle peut servir souvent pour la réduction des fractions au même dénominateur.

SUR LA SOMME DES NOMBRES PREMIERS

A UN NOMBRE DONNÉ n ET COMPRIS ENTRE ZÉRO ET p.

Par **A. Minine**

(Société mathématique de Moscou, séance du 21 octobre 1880).

Nous désignerons la somme des nombres premiers à n et compris entre o et p par le symbole $\left(\sum_n (p)\right)_0^p$

Prenons dans tout ce qui va suivre $n > 1$, supposons d'abord $p > n$ et divisons p par n. Si nous admettons que le quotient de cette division est m et le reste k, alors p sera égal à $mn + k$ et

$$\left(\sum_n (p)\right)_0^p = \left(\sum_n (p)\right)_0^{mn+k}$$

Avant de commencer la recherche de cette somme, faisons les remarques suivantes :

1° Si le nombre p est premier à n, le nombre $mn \pm p$ est aussi premier à n.

2° $$\left(\varphi\,(n)\right)_0^{mn} = m.\varphi\,(n)\ (*)$$

3° $m\varphi\,(n)$ représente un nombre pair excepté lorsque $n = 2$ et que en même temps m est impair.

(*) Voir mon article « *Du nombre qui exprime combien il y a de nombres premiers à un nombre donné* n *et compris entre zéro et* p ». (*Journal de mathématiques*, juin 1880.)

4° $$n.\varphi(n) = \varphi(n^2)$$

En considérant la suite des nombres :

$1, 2, 3, 4 \ldots n \ldots mn, mn + 1, mn + 2, \ldots mn + k,$

Nous voyons que le problème de la détermination de la somme $\left(\sum_n (p)\right)_0^{mn+k}$ peut être partagé en deux :

1° La détermination de la somme des nombres premiers à n et compris entre o et mn.

2° La détermination de la somme des nombres premiers à n et compris entre mn et $mn + k$.

En commençant la résolution du premier problème, exceptons de ce problème pour un instant le cas dans lequel $n = 2$ en même temps que m est un nombre impair. Écrivons tous les nombres premiers à n et compris entre o et mn.

(a) $1, \quad p, \quad p', \quad p'' \ldots\ldots$

(b) $mn - 1, \quad mn - p, \quad mn - p', \quad mn - p'' \ldots\ldots$

D'après la troisième remarque, nous concluons que le nombre des termes de la suite (a) est égal à celui des termes de la suite (b) ; c'est pourquoi, en faisant l'addition de ces deux suites des nombres, nous trouvons que

$$\left(\sum_n (p)\right)_0^{mn} = mn + mn + mn + \ldots\ldots,$$

où mn est répété $\dfrac{\left(\varphi(n)\right)_0^{mn}}{2}$ fois, et pour cela, en vertu de la seconde remarque, nous aurons

$$\left(\sum_n (p)\right)_0^{mn} = mn \,.\, \frac{m\varphi(n)}{2} = \frac{m^2}{2} \,.\, \varphi(n^2) \qquad (1)$$

Il est facile de démontrer que cette formule renferme aussi le cas que nous avons exclu. En effet, la somme des nombres de la suite

$1, p, p', p'' \ldots m \ldots 2m - p'', 2m - p', 2m - p, 2m - 1$

qui contient tous les nombres premiers à 2 et compris entre o et $2m$ (m est un nombre impair) est déterminée, comme on peut le conclure facilement, par la formule

$$\left(\sum_2 (p)\right)_0^{2m} = 2m\,\frac{(m\varphi(2) - 1)}{2} + m = m^2 \,.\, \frac{\varphi(2^2)}{2}$$

qui est identique au cas particulier de la formule (1) pour $n = 2$.

En passant à la résolution du second problème, c'est-à-dire à la détermination de la somme des nombres premiers à n et compris entre mn et $mn + k$, remarquons que dans la suite $mn + 1, mn + 2, mn + 3, \ldots\ldots mn + k$, les seuls nombres premiers à n sont ceux qui se composent de mn et d'un nombre premier à n. Il y a autant de ces nombres qu'il y a de nombres premiers à n dans la suite des nombres entre o et k; par cette raison leur somme est égale à

$$mn\left(\varphi(n)\right)_0^k + \left(\sum_n(p)\right)_0^k$$

On a donc la formule générale

$$\left(\sum_n(p)\right)_0^{mn+k} = \frac{m^2}{2}\varphi(n^2) + mn\left(\varphi(n)\right)_0^K + \left(\sum_n(p)\right)_0^k \quad (2)$$

Cette formule nous montre que la question de la détermination de la somme des nombres premiers à n et compris entre o et $mn + k$ est ramenée à la détermination de la somme des nombres premiers à n et compris entre o et k. Si k n'est pas grand, la dernière somme peut être déterminée sans peine à l'aide de l'addition ordinaire. Si k diffère peu de n, alors pour cette somme, on peut de la somme des nombres premiers et non supérieurs à n, égale à $\frac{\varphi(n^2)}{2}$, soustraire la somme des nombres premiers à n et compris entre k et n. Le calcul peut être difficile seulement lorsque k, étant un grand nombre, diffère trop de n. Appliquons la formule (2) à quelques cas particuliers.

1° Si n est un nombre premier, alors tous les nombres entre o et k sont les nombres premiers à n; leur nombre est égale à k, et la formule (2) se reduit à

$$\left(\sum_n(p)\right)_0^{mn+k} = \frac{m^2}{2}\varphi(n^2) + mnk + k\frac{(k+1)}{2} \quad (3)$$

2° Si k est plus petit que le moindre des nombres qui composent n, on a aussi

$$\left(\sum_n(p)\right)_0^{mn+k} = \frac{m^2}{2}\varphi(n^2) + mnk + k\frac{(k+1)}{2} \quad (4)$$

3° Si $k = 0$, on a

$$\left(\sum_n (p)\right)_0^{mn} = \frac{m^2}{2} \varphi(n^2) \tag{5}$$

4° Si $k + 0$, $m = 1$, on a

$$\left(\sum_n (p)\right)_0^{n} = \varphi \frac{(n^2)}{2} \tag{6}$$

Supposons maintenant $p < n$.

Si nous considérons dans ce cas le nombre p comme étant la différence entre n et k, nous obtiendrons facilement la formule suivante :

$$\left(\sum_n (p)\right)_0^{n-k} = \varphi \frac{(n^2)}{2} - n \left(\varphi(n)\right)_0^{k-1} + \left(\sum_n (p)\right)_0^{k-1} \tag{7}$$

Si n est premier, cette formule se réduit à

$$\left(\sum_n (p)\right)_0^{n-k} = \frac{n^2 - n}{2} - n(k-1) + (k-1)\frac{k}{2}$$

$$= (1 + n - k)\frac{(n-k)}{2} \tag{8}$$

k étant moindre que le plus petit multiple du nombre n, la même formule (7) donne

$$\left(\sum_n (p)\right)_0^{n-k} = \varphi \frac{(n^2)}{2} - (k-1)n + (k+1)\frac{k}{2} \tag{9}$$

Appliquons nos formules à quelques exemples.

Exemple 1. — Soient $n = 10$, $p = 54 = 5.10 + 4$. La formule (2) donne

$$\left(\sum_n (p)\right)_0^{mn+k} = \left(\sum_{10} (p)\right)_0^{5.10+4} = \frac{5^2}{2}\varphi(10^2) + 5.10\left(\varphi(10)\right)_0^4$$

$$+ \left(\sum_n (p)\right)_0^4 = \frac{25}{2}(5^2 - 5)(2^2 - 2) + 5.10.2 + 1 + 3$$

$$= 25.20 + 100 + 4 = 604$$

Exemple 2. — Soient $n = 15$, $p = 47 = 3.15 + 2$. La formule (4) donne

$$\left(\sum_n (p)\right)_0^{mn+k} = \left(\sum_{15} (p)\right)_0^{3.15+2} = \frac{3^2}{2}\varphi(3^2.5^2) + 3.15.2$$

$$+ (1 + 2).\frac{2}{2} = \frac{9}{2}(9 - 3)(25 - 5) + 90 + 3 = 633.$$

Exemple 3. — Soient $n + 12$, $p = 24 = 2.12$. La formule (5) donne

$$\left(\sum_n (p)\right)_0^{mn} = \left(\sum_{12}(p)\right)_0^{24} = \frac{2^2}{2}.\ \varphi\ (12^2) = 2.(3^2 - 3)\ (2^4 - 2^3)$$
$$= 2.6.8 = 96.$$

Exemple 4. — Soient $n = 21$, $p = 12$. La formule (7) donne

$$\left(\sum_{21}(p)\right)_0^{12} = \varphi\ \frac{(3^2.7^2)}{2} - 21.\left(\varphi\ (3.7)\right)_0^8 + \left(\sum_{21}(p)\right)_0^8$$
$$= \frac{(9-3).(49-7)}{2} - 21.5 + 20 = 41$$

Exemple 5. — Soient $n = 15$, $p = 13 = 15 - 2$. La formule (9) donne $\left(\sum_{15}(p)\right)^{13} = \varphi\ \frac{(3^2.5^2)}{2} - 15 + 1 = 46.$

APPLICATIONS DE LA TRIGONOMÉTRIE

Par M. **Gino-Loria**

Cette étude a pour but la recherche de relations entre les éléments de figures liées à un triangle, ou bien entre les éléments d'un quadrilatère ou d'un polygone. De plus, nous nous proposons la résolution par la trigonométrie de quelques questions de maximum ou de minimum. On voit donc que cette note peut servir de complément à un article publié dans le *Journal de mathématiques* sous le titre de ***Formules de trigonométrie*** *(Voir 4e année, p. 201, 246, 297, 493).*

Ces questions ne nous appartiennent pas; pour la plupart nous en avons trouvé les énoncés dans le traité de trigonométrie rectiligne de M. *Todhunter*, ou dans les excellents recueils d'exemples de MM. *Reidt* et *Wrigley*. Les lettres T, R, W, mises à côté de ces questions, en indiquent la source; celles qui ne portent pas d'indications proviennent de nos propres recherches; pour les autres, nous avons donné seulement la démonstration de questions signalées dans des ouvrages justement appréciés en Allemagne et en Angleterre.

Nous emploierons des notations usitées dans tous les traités modernes de trigonométrie, et en particulier dans l'ouvrage dû à M. *Desboves*, et intitulé : *Questions de trigonométrie.*

I

RELATIONS ENTRE LES ÉLÉMENTS DE FIGURES DÉDUITES D'UN TRIANGLE

1. — (*R.*) *Trouver le rapport de l'aire d'un triangle à l'aire du cercle circonscrit en fonction des angles et du nombre* π.

En appelant C l'aire du cercle circonscrit on aura :

$$\frac{C}{S} = \frac{\pi R^2}{S} = \frac{\pi}{\dfrac{16\ S^3}{a^2 b^2 c^2}} = \frac{\pi}{16 . \dfrac{S}{ab} . \dfrac{S}{ac} . \dfrac{S}{bc}}$$

Mais on a

$$2S = ab \sin C = ac \sin B = bc \sin A$$

On en tire immédiatement

$$\frac{C}{S} = \frac{\pi}{2 \sin A \sin B \sin C}$$

2. — (*T*) *Même question pour le cercle inscrit.*

Appelons Γ l'aire du cercle inscrit, nous aurons

$$\frac{\Gamma}{S} = \frac{\pi . \dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}{\sqrt{p\,(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{\dfrac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}\sqrt{\dfrac{p(p-b)}{(p-c)(p-a)}}\sqrt{\dfrac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}}$$

d'ou l'on tire

$$\frac{\Gamma}{S} = \frac{\pi}{\operatorname{cotg}\dfrac{A}{2} . \operatorname{cotg}\dfrac{B}{2} . \operatorname{cotg}\dfrac{C}{2}}$$

3. — On trouverait de même, en appelant Γ_a, Γ_b, Γ_c, les aires des cercles ex-inscrits.

$$\frac{\Gamma_a}{S} = \frac{\pi}{\operatorname{cotg}\dfrac{A}{2}\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}}$$

$$\frac{r_b}{S} = \frac{\pi}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}};$$

$$\frac{r_c}{S} = \frac{\pi}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}}.$$

On en tire facilement

$$\frac{r_a}{\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}} = \frac{r_b}{\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}} = \frac{r_c}{\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}}$$

4. — (R) *Les médianes d'un triangle forment chacune avec les côtés du triangle deux autres triangles; appelons r_1, r_2......r_6 les rayons des cercles inscrits,* R_1, R_2......R_6 *les rayons des cercles circonscrits à ces triangles; on a les relations:*

$$R_1\, R_3\, R_5 = R_2\, R_4\, R_6$$

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_5} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_6}.$$

Soient m_a, m_b, m_c les médianes; en remarquant que l'aire de chacun des triangles formés est la moitié de l'aire du triangle donné, on a

$$R_1 = \frac{cam_a}{4S}; \qquad R_2 = \frac{abm_a}{4S}$$

$$R_3 = \frac{abm_b}{4S}; \qquad R_4 = \frac{bam_b}{4S}$$

$$R_5 = \frac{bcm_c}{4S}; \qquad R_6 = \frac{cam_c}{4S}$$

Donc $\quad R_1\, R_3\, R_5 = R_2\, R_4\, R_6 = \dfrac{a^2b^2c^2m_a\, m_b\, m_c}{(4S)^3}.$

On a aussi

$$r_1 = \frac{2S}{c + \frac{a}{2} + m_a}; \qquad r_2 = \frac{2S}{b + \frac{a}{2} + m_a};$$

$$r_3 = \frac{2S}{a + \frac{b}{2} + m_b}; \qquad r_4 = \frac{2S}{c + \frac{b}{2} + m_b};$$

$$r_5 = \frac{2S}{b + \frac{c}{2} + m_c}; \qquad r_6 = \frac{2S}{a + \frac{c}{2} + m_c}.$$

D'où on tire

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_5}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_6}=\left(\frac{\frac{3}{2}(a+b+c)+(m_a+m_b+m_c)}{2S}\right)$$

5. — (R) *On construit un triangle* $A_1B_1C_1$ *avec les trois segments inégaux déterminés, par la circonférence inscrite, sur les côtés d'un triangle* ABC. *Le rayon du cercle inscrit dans le triangle donné est moyen proportionnel entre le diamètre du cercle circonscrit et le rayon du cercle inscrit dans le nouveau triangle.*

Soient a_1, b_1, c_1, les côtés, R_1 le rayon du cercle circonscrit, r_1 celui du cercle inscrit, S_1 l'aire, $2p_1$ le périmètre du nouveau triangle.

On aura

$$a_1 = p - a;\quad b_1 = p - b;\quad c_1 = p - c;\quad 2p_1 = p;$$

et par conséquent

$$R_1 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{4S_1} = \frac{S^2}{4pS_1},$$

et $$2R_1 = \frac{S^2}{2pS_1}.$$

On a aussi $$r_1 = \frac{2S_1}{p},$$

donc $$2R_1 \,.\, r_1 = \frac{S^2}{p^2} = r^2 \qquad \text{c. q. f. p.}$$

6. — *On construit un triangle* $A_a\,B_a\,C_a$ *avec les trois segments inégaux déterminés par l'une* O_a *des circonférences ex-inscrites sur les trois côtés d'un triangle* ABC. *Le rayon du cercle ex-inscrit* O_a *du triangle donné est moyen proportionnel entre le diamètre du cercle circonscrit et le rayon du cercle inscrit dans le nouveau triangle.*

Soient a_a, b_a, c_a les côtés, R_a le rayon du cercle circonscrit r_a celui du cercle inscrit, S_a l'aire, $2p_a$ le périmètre du nouveau triangle. On aura

$$a_a = p;\quad b_a = p - b;\quad c_a = p - c;\quad 2p_a = p - a;$$

et par conséquent

$$R_a = \frac{p(p-b)(p-c)}{4S_a} = \frac{S^2}{4(p-a)S_a}.$$

et $$2R_a = \frac{S^2}{2(p-a)S_a}.$$

On a aussi $$r_a = \frac{2S_a}{p-a}$$

donc $$2R_a \cdot r_a = \frac{S^2}{(p-a)^2} = r'^2 \quad \text{c. q. f. d.}$$

(A suivre.)

QUESTION 132

Solution par M. H. Bourget, au Collège d'Aix.

Démontrer que le produit de cinq nombres entiers consécutifs ne peut pas être le carré d'un nombre entier.

Lemme. — Le produit de deux nombres qui diffèrent de 3, $a(a+3)$ n'est jamais un carré, excepté pour $a = 1$.

En effet, on a successivement

$$a(a+3) = a^2 + 2a + a$$

ajoutons et retranchons 1, on a

$$a(a+3) = (a+1)^2 + a - 1.$$

Pour que cette expression soit un carré, il faudrait ajouter à $(a+1)^2$ au moins $2a+3$, on n'y ajoute que $a-1$, donc $a(a+3)$ n'est pas un carré et le lemme est démontré.

Cela posé, le produit des cinq membres consécutifs est

$$(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) \qquad (1)$$

ou, en effectuant $$n(n^2-1)(n^2-4) \qquad (2)$$

D'après le lemme établi, $(n^2-1)(n^2-4)$ n'est pas un carré. Il reste à voir si le produit de cette expression par n est un carré, quel que soit n.

Nous distinguerons deux cas : ou n est impair, ou il est pair.

Premier cas. — Soit $n = 2k+1$.

Dans ce cas, le produit $n(n^2-1)(n^2-4)$ n'a pas de facteurs premiers communs entre n et $(n^2-1)(n^2-4)$, car s'il en avait un, il devrait diviser 1 ou 4, ce qui est impossible.

Donc, pour qu'il fût un carré, il faudrait qu'il eût tous ses facteurs carrés. Or, $(n^2-1)(n^2-4)$ n'est pas un carré,

donc, $n(n^2 - 1)(n^2 - 4)$ n'est pas un carré quand n est impair.

Deuxième cas. — Ce cas se subdivise en deux autres : 1° ou n contient 2 à une puissance paire ; $n = 2^{2k}n'$; ou n contient 2 à une puissance impaire, $n = 2^{2k+1}n'$, dans ces deux cas n' est impair.

1° $n = 2^{2k}n'$. Remplaçons dans (2) n par sa valeur, il vient

$$2^{2k}n'(2^{4k}n'^2 - 1)(2^{4k}n'^2 - 4).$$

Cette expression n'est pas un carré, car, d'après le cas précédent, un nombre qui n'est pas un carré $(2^{2k}n'^2 - 1) \times (2_{4k}n'^2 - 4)$, multiplié par un carré 2^{2k}, n'est pas un carré, donc, dans ce cas $n(n^2 - 1)(n^2 - 4)$ n'est pas non plus un carré.

2° $n = 2^{2k+1}n'$. Remplaçons donc (2) n par sa valeur on a

$$2^{2k+1}n'(2^{4k+2}n'^2 - 1)(2^{4k+2}n'^2 - 4).$$

Pour que cette expression soit un carré, il faut qu'elle contienne ses facteurs premiers à des puissances paires. Réunissons les facteurs premiers. Nous avons dans $2^{4k+2}n'^2 - 4$ le facteur premier 2, faisons-le passer dans le premier facteur il vient

$$2^{2k+3}n'(2^{4k+2}n'^2 - 1)(2^{4k}n'^2 - 1).$$

Nous voyons que le facteur premier 2 est à une puissance impaire $2k + 3$, donc, dans aucun cas

$$n(n^2 - 1)(n^2 - 4)$$

n'est un carré.

NOTA. — M. Quiquet, de Lille, a résolu la même question.

QUESTION 190

Solution par M. Gino Loria, à Mantoue (Italie).

Trouver la hauteur d'un segment sphérique qui soit la m^me *partie de la sphère.*

Soient y la hauteur, r le rayon de base du segment cherché appartenant à la sphère du rayon R.

L'équation du problème est

$$\frac{1}{6}\pi y^3 + \frac{1}{2}\pi x^2 y = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{6}\pi \cdot D^3$$

ou $$y^3 + 3x^2y = \frac{1}{m} D^3$$

mais $$x^2 = y(D - y)$$

donc on a $2y^3 - 3Dy^2 + \dfrac{D^3}{m} = 0.$

Cette équation se transforme en

$$z^3 - \frac{3}{4} D^2 z - \left(\frac{m-8}{4m}\right) D^3 = 0.$$

Si l'on pose $y = z + \dfrac{D}{2}$.

ou si l'on remplace D par 2R

$$z^3 - 3R^2 z - 2\left(\frac{m-8}{m}\right) R^3 = 0. \qquad \text{(A)}$$

équation que l'on sait résoudre

QUESTION 192

Solution par M. Gino Loria, à Mantoue (Italie).

Le triangle qui a pour sommets les pieds des hauteurs du triangle formé en joignant les points de contact du cercle inscrit à un triangle ABC *a pour surface* $\dfrac{16\,T^5}{a^2 b^2 c^2 (a+b+c)^2}$, T *étant la surface du triangle* ABC *et* a, b, c *les longueurs des côtés.*

Soient A_1, B_1, C_1, les points de contact sur les côtés BC, CA, AB. On voit facilement que :

$$A_1 = \frac{1}{2}(B + C),\quad B_1 = \frac{1}{2}(C + A),\quad C_1 = \frac{1}{2}(A + B)$$

ou que

$$A_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2},\qquad B_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2},\qquad C_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}. \quad (1)$$

Le problème est dès lors ramené à trouver la surface du triangle orthocentrique du triangle $A_1 B_1 C_1$. Or en appelant Δ_1 et Δ'_1 les surfaces des triangles $A_1 B_1 C_1$ et de son orthocentrique $A'_1 B'_1 C'_1$, on a (voir t. III p. 235)

$$\frac{\Delta'_1}{\Delta_1} = 2 \cos A_1 \cos B_1 \cos C_1$$

ou à cause des égalités (1)

$$\Delta'_1 = 2\,\Delta_1 \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Si r désigne le rayon du cercle inscrit au triangle ABC, on a

$$\Delta_1 = \frac{r^2}{2}(\sin A + \sin B + \sin C)$$

mais $r = \dfrac{T}{p}$, donc

$$\Delta_1 = \frac{T^2}{2p^2}(\sin A + \sin B + \sin C);$$

par suite,

$$\Delta'_1 = \frac{2T^2}{p^2}\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right)\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Delta'_1 = \frac{2T^2}{p^2}\left[\frac{T}{bc} + \frac{T}{ca} + \frac{T}{ab}\right]\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$$

$$\Delta'_1 = \frac{2T^2 \,.\, T(a+b+c)(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2 a^2 b^2 c^2}$$

$$\Delta'_1 = \frac{4T^3 p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2 a^2 b^2 c^2} = \frac{16T^5}{(2p)^2 a^2 b^2 c^2}$$

enfin

$$\Delta'_1 = \frac{16\,T^5}{(a+b+c)^2 a^2 b^2 c^2}$$

QUESTION 199

Solution par M. Dupuy, élève au Lycée de Grenoble.

Trouver la loi de formation des nombres dont les carrés sont terminés par deux chiffres égaux.

Soit N un des nombres cherchés. Posons

$$N = 100c + 10b + a$$

a, b, c, étant les chiffres des unités, des dizaines et des centaines. En élevant un carré, il vient

$$N^2 = 10000c^2 + 1000(2bc) + 100(b^2 + 2ac) + 10(2ab) + a^2,$$

Les derniers chiffres de N^2 seront les mêmes que ceux de l'expression $10(2ab) + a^2$

Il suffit donc de chercher pour quelles valeurs de a et b cette expression finit par deux chiffres égaux.

Pour cela donnons à a les valeurs 0, 1, 2, . . . 8, 9, on obtiendra le tableau suivant

Si $a =$	0,	$a^2 + 10(2ab)$	peut s'écrire	$0 + 10(0.b)$
—	1,	—	—	$1 + 10(2b)$
—	2,	—	—	$4 + 10(4b)$
—	3,	—	—	$9 + 10(6b)$
—	4,	—	—	$6 + 10(8b + 1)$
—	5,	—	—	$5 + 10(b + 2)$
—	6,	—	—	$6 + 10(2b + 3)$
—	7,	—	—	$9 + 10(4b + 4)$
—	8,	—	—	$4 + 10(6b + 6)$
—	9,	—	—	$1 + 10(8b + 8)$

A l'inspection de ce tableau, on voit que si $a = 0$, b peut être quelconque.

Que si $a = 2$, b doit être 1 ou 6.

— $a = 8$, — 3 ou 8.

— $a = 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9$, b n'admet pas de valeur correspondante.

Ainsi les nombres cherchés sont de la forme

. . . 0	et leurs carrés	finissent par	00
. . . 12	—	—	44
. . . 62	—	—	44
. . . 38	—	—	44
. . . 88	—	—	44

NOTA. — M. Letellier, du lycée de Tarbes, a résolu la même question.

Note de la Rédaction. — On peut donner la formule générale des nombres répondant à la question, ils sont de la forme

$$50n \pm 12$$

en effet, le carré d'un nombre de cette forme est

$$2500n^2 \pm 1200n + 144$$

et il est facile de reconnaître que les nombres de cette forme sont terminés par les nombres 12, 62, 38 ou 88, comme l'indique M. Dupuy. A. M.

QUESTION 221

Solution par M. Tricon, élève du Lycée de Marseille.

Si x, y, z *sont les côtés d'un carré inscrit dans un triangle dont les côtés sont* a, b, c, *on a la relation suivante*

$$\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}+1\right)^2=4\left(\frac{ab}{xy}+\frac{ac}{xz}+\frac{bc}{yz}\right).$$

Aux deux termes de l'expression

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2=-16S^2,$$

ajoutons $4 \cdot 16S^2$, il vient

$$a^4+b^4+c^4+4\cdot 16S^2=3\cdot 16S^2+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2,$$

d'où

$$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2+4\cdot 16S^2=3\cdot 16S^2+4a^2b^2+4a^2c^2+4b^2c^2$$

ou en ajoutant $16a^2S+16b^2S+16c^2S$ aux deux membres,

$$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2+4\cdot 16S^2+16a^2S+16b^2S+16c^2S=3\cdot 16S^2+4a^2b^2+4a^2c^2+4b^2c^2+16a^2S+16b^2S+16c^2S,$$

le premier membre est le carré de

$$a^2+b^2+c^2+2\cdot 4S.$$

Le second membre peut s'écrire

$$4a^2b^2+8b^2S+8a^2S+16S^2+4a^2c^2+8c^2S+8a^2S+16S^2+4b^2c^2+8b^2S+8c^2S+16S^2$$

ou $$4(a^2+2S)(b^2+2S)+4(a^2+2S)(c^2+2S)+4(b^2+2S)(c^2+2S),$$

par suite $$(a^2+b^2+c^2+2\cdot 4S)^2$$

$$=4\left[(a^2+2S)(b^2+2S)+(a^2+2S)(c^2+2S)+(b^2+2S)(c^2+2S)\right]$$

en divisant par $4S^2$, le premier membre devient

$$\left(\frac{a^2}{2S}+\frac{b^2}{2S}+\frac{c^2}{2S}+4\right)^2$$

$$=\left[\frac{a^2+2S}{2S}+\frac{b^2+2S}{2S}+\frac{c^2+2S}{2S}+1\right]^2.$$

Par suite

$$\left[\frac{a^2+2S}{2S}+\frac{b^2+2S}{2S}+\frac{c^2+2S}{2S}+1\right]^2$$

$$=4\left[\frac{(a^2+2S)(b^2+2S)}{4S^2}+\frac{(a^2+2S)(c^2+2S)}{4S^2}+\frac{(b^2+2S)(c^2+2S)}{4S^2}\right]$$

Or $x=\frac{ah}{a+h}$, et comme $h=\frac{2S}{a}$, on a

$$\frac{a}{x}=\frac{a}{\frac{ah}{a+h}}=\frac{a+h}{h}=\frac{a^2+2S}{2S};$$

de même

$$\frac{b}{y}=\frac{b^2+2S}{2S},$$

$$\frac{c}{z}=\frac{c+2S}{2S}.$$

Donc on a

$$\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}+1\right)^2=4\left(\frac{ab}{xy}+\frac{ac}{xz}+\frac{bc}{yz}\right).$$

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

BORDEAUX

Les rayons des deux cercles dont les centres sont A et B ont pour longueur $r=12^m$, $r'=30^m$, la distance des centres AB est de 24^m. Calculer la portion d'aire commune aux deux cercles.

— Calculer la valeur de x qui satisfait à l'équation

$$\text{séc}\,x=\sin x+2\cos x$$

— On joint le sommet A d'un losange au milieu E du côté DC; la droite AE coupe la diagonale DB en F. Calculer le rapport $\frac{DF}{DB}$, sachant que $A=60°$.

— Deux mobiles m et n partent de deux points A et B, et vont à la rencontre l'un de l'autre; m se met en mouvement cinq secondes après n et parcourt 4^m de plus que lui par seconde. Ils se rencontrent au milieu de AB, dont la longueur est de 1,250 mètres; on demande combien chacun de ces mobiles parcourt de mètres par seconde.

— Connaissant les côtés a, b, c et la hauteur h d'un trapèze, calculer ses angles et sa surface. (b est la petite base, a et c les côtés obliques). Application

$$a=42^m;\ b=68;\ c=75;\ h=15.$$

— Trouver la valeur de x donnée par l'équation

$$\frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)}=3.$$

— On coupe une sphère par un plan qui détache une calotte dont la surface est le quart de la surface de la sphère; trouver l'expression du rapport du volume du segment qui a pour base la calotte, au volume de la sphère.

— L'angle d'un losange vaut 54°; la plusgran de diagonale vaut 1,250 mètres calculer le côté et la surface du losange.

— Etant donnés les quatre côtés d'un trapèze, calculer le volume engendré par la rotation du trapèze autour de la grande base a. Application : $a = 100^m$; $b = 40^m$; $c = 35^m$; $d = 48^m$. (a et c sont les deux bases).

— Vérifier que si x, y, z, sont en progression arithmétique, il en est de même de

$$x^2 + xy + y^2$$
$$x^2 + xz + z^2$$
$$y^2 + yz + z^2$$

Trouver le rapport des raisons.

— Deux circonférences dont les centres sont en A et en B et dont les rayons sont a et b, se touchent. On leur mène une tangente commune CD, qui coupe la ligne des centres en D, et touche en C la grande circonférence. Trouver l'expression des surfaces des deux triangles ACD, ECD, CE étant perpendiculaire sur AB. Application : $a = 62$; $b = 27$.

— Trouver la valeur de x donnée par l'équation

$$\log \sqrt{5x + 8} + \frac{1}{2} \log (2x + 3) = \log 15.$$

— Trouver, par une construction géométrique, le rayon d'un cercle dont la surface soit les $\frac{5}{16}$ de celle d'un cercle de rayon donné R.

— Déterminer le maximum de $\frac{2x + 3}{x^2 + 11}$

— Sur un triangle équilatéral de côté a pris comme base commune, on construit un prisme droit et une pyramide régulière de même hauteur que le prisme; déterminer cette hauteur de telle sorte que la surface latérale du prisme soit égale à trois fois celle de la pyramide.

— Résoudre l'équation $\frac{x + 2}{1 + 2x} = \frac{3x + 4}{3 + 4x}$

— La somme des côtés de deux cubes est a, la somme de leurs volumes est b^3. Calculer les longueurs des côtés de ces cubes. a étant supposé constant, trouver le minimum de b pour que le problème soit possible. Application :

$$a = 10;\ b = 7.$$

— Résoudre

$$(a + b)\,x + (a - b)\,y = 2ab$$
$$(a + c)\,y + (a - c)\,x = 2ac.$$

— On donne un tronc de cône à bases parallèles; les rayons de bases sont a et b; l'arête c est la somme des deux rayons. Quelles sont les propriétés de ce tronc de cône? Trouver le rapport du volume à la surface totale.

— Quel est le maximum ou le minimum de l'expression $(x - 2)^2 + (2x - 1)^2$. Trouver la valeur correspondante de x. — Vérification.

— Calculer l'angle d'un secteur tel que l'aire du triangle formé par les deux rayons et la corde soit $\frac{1}{7}$ de l'aire du cercle.

— Dans un trapèze ABCD, on donne AB $= a$; BC $= b$; CD $= c$; DA $= d$. Calculer les angles A, B, C, D. Application : $a = 100$; $b = 16$; $c = 70$; $d = 28$. (a et c sont les bases).

— La différence des rayons de deux sphères est a, celle de leurs volumes est b^3. Calculer les rayons. Application : $a = 8$; $b = 12$.

— **Résoudre**

$$(a + bx)(b - ax) + (b - cx)(c + bx) + (c - ax)(a + cx) = 0.$$

— Trouver l'expression du poids d'un tronc de pyramide à bases carrées, la longueur des côtés de base étant a, b; la hauteur h. On donne la densité d de la substance dont est formée la pyramide. Application :

$$a = 11 ; b = 5 ; h = 12 ; d = 2{,}57.$$

— Résoudre le système $(2x + b) \cos l = a \sin 2l + y$;
$(2y + a) \sin l = b \sin 2l + x$.

Simplifier les valeurs de x et de y, et vérifier qu'elles satisfont aux équations.

PARIS

Novembre 1880.

Dans le triangle ABC, on donne les deux côtés AC $= b$, et AB $= c$, et l'on propose de calculer le troisième côté BC, sachant que le rapport des segments BD et DC, déterminés sur ce côté par la hauteur AD, est égal au rapport de deux lignes connues m et n.

— Etant donné un cercle de rayon R et un diamètre AB, mener à ce diamètre AB une parallèle CD telle que la surface du trapèze ABCD soit dans un rapport déterminé K avec le carré de la hauteur du trapèze.

— Dans un triangle ABC, le côté AB est égal à $\sqrt{3}$, le côté AC est égal à $\sqrt{2}$, et l'angle C est égal à 60°. Calculer sans tables : 1° le côté BC; 2° le sinus et le cosinus de chacun des angles A et B.

— On donne le rayon r du demi-cercle AOB; déterminer la distance AD au point A de la perpendiculaire CD au diamètre AOB, de telle façon que le rapport de la somme des volumes décrits par les segments AmC, CnB au volume décrit par le triangle ACB dans sa rotation autour de AB soit égal à un nombre donné.

— Partager un arc donné A en deux parties x et y telles que $tg\,x + tg\,y$ soit un minimum.

— Trouver toutes les valeurs de l'arc x satisfaisant à l'équation $\sin 2x = a \cos x$. On fera en particulier $a = 1$, $a = 2$, $a = \sqrt{2}$, $a = \sqrt{3}$, et dans chacun de ces quatre cas, on donnera en degrés la plus petite valeur de l'arc x répondant à la question.

— Étant donné un cône circulaire droit dont le rayon de base est a, et le côté b, calculer les rayons des deux bases d'un tronc de cône de même hauteur que le cône donné, sachant que la somme des surfaces des deux bases du tronc de cône est égale à la surface totale du cône, et que la différence entre le volume du tronc de cône et celui du cône est égale au volume d'un cylindre de même hauteur, ayant pour base la section faite dans le tronc de cône par un plan parallèle aux bases mené par le milieu de la hauteur.

— Étant donné un triangle isoscèle ABC, dont la base BC est égale à a, et la hauteur AD est égale à b, on mène une parallèle à la base BC, on joint le milieu D de la base aux points E, F où cette parallèle rencontre les deux côtés égaux du triangle, et on fait tourner la figure autour de la base BC ; on demande de calculer la longueur de cette parallèle EF de façon que le volume engendré par le triangle AEF tournant autour de BC, soit égal à deux fois le volume engendré par le triangle EDF tournant autour de la même droite BC.

— Résoudre les équations $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} y = a$
$\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} y = b$

QUESTIONS D'EXAMEN

POSÉES EN 1877 POUR LES EXAMENS DE LICENCE DANS LES INSTITUTS TECHNIQUES, LES ÉCOLES DE MARINE MARCHANDE ET LES ÉCOLES SPÉCIALES DU ROYAUME D'ITALIE

I

La longitude de Rome à l'ouest de Berlin est 0,003, et celle de Vienne à l'est de la même ville est 0,008; on suppose les longitudes exprimées en parties décimales du jour (360 degrés). Les latitudes de Rome et de Vienne exprimées en degrés et parties décimales de degré sont respectivement 41,902 et 48,210. Calculer la plus courte distance de Rome à Vienne en supposant la surface de la terre sphérique.

— Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse inscrire un cercle dans un parallélogramme? En supposant cette condition remplie, construire le centre du cercle, et en trouver le rayon en fonction du périmètre et de la surface du parallélogramme.

II

Un observateur placé sur la cime d'une colline voit devant lui, dans une même direction, deux pierres miliaires. L'angle de dépression pour l'une est de 5°, pour l'autre il est de 15°. On demande la hauteur de la colline au-dessus du plan horizontal de la route. On suppose que le mille, distance entre les deux pierres, vaut 1,500 mètres.

— Démontrer que les points de concours des faces d'un tétraèdre sont les sommets d'un autre tétraèdre semblable au tétraèdre donné. Trouver le rapport de leurs volumes.

III

On donne un demi-ellipsoïde de révolution à axe vertical, et une droite donnée par ses deux projections. Trouver en projection et en vraie grandeur l'intersection de ce solide avec un plan qui passe par un point de la surface ellipsoïdale donné en projection horizontale, et qui soit perpendiculaire à la droite.

— On a deux plans dont les traces horizontales ne se rencontrent pas dans les limites de la figure. Par un point donné, mener un plan qui soit perpendiculaire aux deux plans donnés.

IV

Par deux points donnés, mener un plan tangent à un ellipsoïde de révolution.

—On donne un cône droit, et un plan donné par ses traces. Déterminer un plan passant par un point donné de la surface conique, et parallèle au plan donné : puis trouver les projections et la vraie grandeur de l'intersection du plan et de la surface conique, ainsi que la transformée de la ligne d'intersection dans le développement de la surface.

V

— Calculer les angles et la surface d'un trapèze dont on donne les côtés :

$$ab = 60;\quad cd = 102,1;\quad bc = 45,3;\quad da = 48,9.$$

Les côtés parallèles sont ab et dc; l'unité de longueur est le mètre.

— Un observateur est situé à une hauteur donnée au-dessus de la surface de

la terre supposée sphérique. Quelle est la partie de cette surface qu'il voit, et quel est le volume du segment compris sous la surface vue?

— Un tronc de pyramide triangulaire a 2m,56 de hauteur, les côtés de la base inférieure sont 0,76; 0,48; 0,34; ceux de la base supérieure sont 0,38; 0,24; 0,17. Calculer le volume du tronc.

VI

— On donne deux plans qui ne se rencontrent pas dans les limites de l'épure, et un point hors de ces deux plans. Déterminer: l'intersection des deux plans; la perpendiculaire menée du point sur cette intersection, et les angles de cette perpendiculaire avec chacun des deux plans.

— Construire un trièdre connaissant les deux angles plans $\alpha = 65°$; $\beta = 83°$; et l'angle dièdre $A = 75°$ opposé à la face α.

VII

— On connait les côtés AB = 8m,95; BC = 12m,10; CD = 7m,20; et AD = 18m,50 d'un trapèze quelconque, dont les bases sont BC et DA. On demande: 1° la surface de ce trapèze; 2° le rayon du cercle équivalent.

— Quel doit être le rayon d'un cercle pour que la surface du carré inscrit soit de 86mq,509.

VIII

— On donne un plan quelconque déterminé par ses deux traces, et la projection horizontale d'un point du plan. On demande de mener par ce point une horizontale du plan, et de faire passer par cette horizontale un plan qui fasse avec le prèmier un angle de 56 degrés.

SUR LA SÉRIE DE TAYLOR

Par M. G. de Longchamps, professeur de mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne (*).

---

1. — Considérons l'identité:

$$f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) + f(a)$$

et posons $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

On aura par des dérivations successives:

$$f(x) = (x - a)\,\varphi(x) + f(a)$$
$$f'(x) = (x - a)\,\varphi'(x) + \varphi(x)$$

(*) Cette démonstration de la série de Taylor, trouvée par nous récemment, n'est peut-être pas nouvelle; au moins dans quelques-unes de ses parties. M. Catalan, à qui nous l'avons communiquée, croit qu'elle était donnée en 1832 par M. Lefébure, dans son cours; il l'attribuait à Ampère.

$$f''(x) = (x - a)\,\varphi''(x) + 2\varphi'(x)$$

. . . .

$$f^{(p)}(x) = (x - a)\,\varphi^{(p)}(x) + p\varphi^{(p-1)}(x)$$

Multiplions ces égalités respectivement, par

$$1, \quad \frac{a - x}{1}, \quad \frac{(a - x)^2}{1.2}, \quad \ldots \quad \frac{(a - x)^p}{1.2\ldots p};$$

On aura l'identité, qui est une forme de la série de Taylor :

$$f(a) = f(x) + \frac{a - x}{1} f'(x) + \frac{(a - x)^2}{1.2} f''(x) + \ldots .$$

$$\ldots + \frac{(a - x)^p}{1.2\ldots p} f^p(x) + \frac{(a - x)^{p-1}}{1.2\ldots p} \varphi^p(x). \quad (1)$$

Pour retrouver la notation habituelle, on voit qu'il suffit de remplacer $(a - x)$ par h.

2. — Examinons le cas particulier de la fonction entière, et posons $\quad f(x) = A_0 x^m + \ldots + A_m$

on aura $\quad \varphi(x) = A_0 x^{m-1} + \ldots$

et $\quad \varphi^{m-1}(x) = 1.2\ldots(m - 1)\,A_0$

ou $\quad \varphi^{m-1}(x) = \frac{1}{m} f^m(x).$

La formule (1) devient, après avoir remplacé $a - x$, par h,

$$f(x + h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{h^m}{12\ldots m} f^m(x).$$

3. — Dans l'hypothèse où

$$f(x) = x^m,$$

on a

$$f'(x) = mx^{m-1},$$

$$f''(x) = m(m - 1)x^{m-2},$$

. . . .

$$f^m(x) = 1 . 2 \ldots m,$$

et la formule devient

$$(x + h)^m = x^m + \frac{mh}{1} x^{m-1} + \frac{m(m - 1)h^2}{1 . 2} x^{m-2} + \ldots + h^m.$$

C'est la formule du binôme, qui, dans cette manière de faire et à l'inverse de ce qui se fait ordinairement, est considérée comme une conséquence de la formule de Taylor.

4. — Pour établir la série de Taylor, dans le cas général, nous nous appuyerons uniquement sur cette remarque qui est, on le sait, fondamentale dans la théorie des équations et constamment usitée : *qu'entre deux racines consécutives de l'équation*

$$f(x) = 0$$

existe au moins une racine de l'équation $f'(x) = 0$.

L'interprétation géométrique de cette proposition est encore bien connue et peut se formuler en disant que si la courbe $y = f(x)$ coupe l'axe Ox aux deux points consécutifs A, B; il existe, entre A et B, un point M de la courbe, point dont l'abcisse est comprise entre OA et OB et pour lequel la tangente est parallèle à Ox.

Si l'on remarque maintenant que le rapport

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} = \frac{B'P}{A'P},$$

il sera prouvé qu'il existe, entre les points A', B', un point M' pour lequel la fonction b' prend une valeur égale à celle de $\frac{B'P}{A'P}$; ayant posé $OB = a$; $OA = x$, on a

$$OM' = x + \theta(a - x),$$

et l'on peut écrire (θ désignant un nombre compris entre o et 1),

$$\varphi(x) = f'[x + \theta(a - x)].$$

5° — Ceci posé, on aura donc, en décrivant et considérant $f'[u + \theta(a - x)]$, comme une fonction de fonction,

$$\varphi'(x) = (1 - \theta)\ f''[x + \theta(a - x)]$$
$$\varphi''(x) = (1 - \theta)^2\ f'''[x + \theta(a - x)]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi^p(x) = (1 - \theta)^p f^{p+1}[x + \theta(a - x)]$$

et l'identité (1) devient :

$$f(x + h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{h^p}{1 \cdot 2 \ldots p} b^{(p)}(x) + \frac{h^{p+1}(1 - \theta)^p}{1 \cdot 2 \ldots p} b^{p+1}(x + \theta h)$$

dans laquelle θ désigne un nombre compris entre o et 1. C'est la série de Taylor avec la forme du reste donnée par Cauchy.

6. — Nous ferons une dernière remarque.

Si nous désignons par R_p, le terme complémentaire de la série, celui qui représente la somme de tous les termes qui suivent

$$\frac{h^p}{1 \cdot 2 \ldots p} f^{(p)}(x),$$

la première forme que nous avons obtenue pour le développement, la forme (1), prouve que l'on a exactement :

$$R_p = \frac{(a-x)^{p+1}}{1 \cdot 2 \ldots p} \varphi^{(p)}(x) \qquad (\alpha)$$

Pour calculer ce reste, il faudrait donc prendre la dérivée d'ordre p, de la fonction $\frac{f(x) - f(a)}{x-a}$, ce qui peut se faire par la formule de Leibnitz, si l'on sait, bien entendu, et comme nous le supposons, calculer les dérivées successives de $f(x)$.

Mais on peut aussi, et plus simplement, calculer les dérivées de φ, de proche en proche, par voie récurrente en s'appuyant sur la remarque suivante.

L'équation (1) peut s'écrire

$$f(a) = f(x) + \frac{a-x}{1} f'(x) + \frac{(a-x)^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \ldots$$
$$+ \frac{(a-x)^{p+1}}{1 \cdot 2 \ldots (p+1)} f^{p+1}(x)$$
$$+ \left[\frac{(a-x)^{p+1}}{1 \cdot 2 \ldots} \varphi^p(x) - \frac{(a-x)^{p+1}}{1 \cdot 2 \ldots (p+1)} f^{p+1}(x)\right]$$

ayant ajouté et retranché, comme on voit, le terme en $f^{p+1}(x)$; mais alors

$$R_{p+1} = \frac{(a-x)^{p+1}}{1 \cdot 2 \ldots p} \varphi^p(x) - \frac{(a-x)^{p+1}}{1 \cdot 2 \ldots (p+1)} f^{p+1}(x)$$

mais, d'après la formule (α),

$$R_{p+1} = \frac{(a-x)^{p+2}}{1 \cdot 2 \ldots (p+1)} \varphi^{p+1}(x).$$

On a donc $\frac{(a-x)^{p+2}}{1 \cdot 2 \ldots (p+1)} \varphi^{p+1}(x)$

$$= \frac{(a-x)^{p+1}}{1 \cdot 2 \ldots p} \varphi^p(x) - \frac{(a-x)^{p+1}}{1 \cdot 2 \ldots (p+1)} f^{p+1}(x),$$

ou en simplifiant

$$(a-x)\varphi^{p+1}(x) - (p+1)\varphi^p(x) + f^{p+1}(x) = 0.$$

C'est la relation de récurrence dont nous voulions parler ; elle permet de calculer $\varphi^{(p+1)}$, quand on connaît $\varphi^{(p)}$ et $f^{(p+1)}$. On retrouve ainsi, et il ne pouvait en être différemment, la relation entre $f^{(p)}$ et les deux fonctions φ^{p}, φ^{p-1}, que nous avons établie au début de cette note.

ÉTUDE SUR LES COORDONNÉES TANGENTIELLES

ET LEURS APPLICATIONS

Par M. E. J. Boquel.

(*suite*, voir page 40).

— *Équation générale des points situés sur la droite qui joint deux points donnés par leurs équations.* — On sait qu'en coordonnées cartésiennes, l'équation générale des droites qui passent par le point de rencontre de deux droites données par leurs équations $Ax + By + C = 0$ et $A'x + B'y + C' = 0$ est $Ax + By + C + \lambda(A'x + B'y + C') = 0$; de même, en coordonnées tangentielles, l'équation générale des points situés sur la droite qui joint deux points donnés par leurs équations $ux_0 + vy_0 - 1 = 0$, $ux_1 + vy_1 - 1 = 0$, est $ux_0 + vy_0 - 1 + \mu(ux_1 + vy_1 - 1) = 0$. En effet, cette équation représente des points, puisqu'elle est de la forme $uX + vY - 1 = 0$; ces points appartiennent à la droite qui joint les deux points donnés, puisque l'équation dont il s'agit est vérifiée quel que soit μ pour la droite dont les coordonnées annulent à la fois $ux_0 + vy_0 - 1$ et $ux_1 + vy_1 - 1$, et elle les représente tous, puisqu'on peut toujours disposer du paramètre μ de manière à faire coïncider le point variable avec un point donné sur la droite qui joint (x_0y_0) et (x_1y_1). Un tel point ayant pour coordonnées $x = \frac{x_0 + Kx_1}{1 + K}$, $y = \frac{y_0 + Ky_1}{1 + K}$, il suffit, en effet, pour cela, de prendre $\mu = K$.

Notation symbolique. — D'une manière générale, l'équation $Au + Bv + C = o$ est l'équation du point ayant pour coordonnées cartésiennes $x = -\frac{A}{C}$ et $y = -\frac{B}{C}$; on peut aussi l'écrire sous la forme homogène $Au + Bv + Cw = o$ $(w = 1)$.

On la représente souvent par une seule lettre, désignant une fonction linéaire en u et v, π par exemple, par analogie avec P qui représentera la fonction linéaire en x et y, $Ax + By + C$ ou $Ax + By + Ct$ $(t = 1)$.

Les équations de deux points étant alors $\pi = o$ et $\chi = o$, l'équation générale des points situés sur la droite qui joint les deux points donnés sera $\pi + \mu\chi = o$ en coordonnées tangentielles, de même qu'en coordonnées cartésiennes l'équation générale des droites qui passent par le point de rencontre des deux droites $P = o$ et $Q = o$ est $P + \lambda Q = o$.

Les coordonnées cartésiennes du point particulier qui correspond à une certaine valeur de μ sont alors $x = -\frac{A + \mu A'}{C + \mu C'}$, $y = -\frac{B + \mu B'}{C + \mu C'}$.

Interprétation de μ. — Rapport anharmonique de quatre points en ligne droite. — Soient respectivement $\pi = o$ et $\chi = o$ les équations de deux points prises sous la forme $ux_0 + vy_0 - 1 = o$ et $ux_1 + vy_1 - 1 = o$; un point quelconque de la droite qui les joint est représenté par l'équation $\pi + \mu\chi = o$, et nous avons vu plus haut que, pour faire coïncider ce point avec celui dont les coordonnées cartésiennes sont : $x = \frac{x_0 + Kx_1}{1 + K}$, $y = \frac{y_0 + Ky_1}{1 + K}$, il faut prendre $\mu = K$.

Or on sait que K représente le rapport des distances du point (x, y) aux points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) (*), ce rapport ayant un certain signe quand le point (xy) est entre les deux

(*) On démontre, en effet, ces formules dans tous les cours élémentaires de géométrie analytique.

points donnés, et le signe contraire quand il laisse ces deux points d'un même côté de lui-même.

Puisque μ n'est autre chose que K, on a donc ainsi la signification de μ.

Si l'on veut introduire dans les calculs les distances MM_0 et MM_1 elles-mêmes, on pourra poser $\frac{MM_0}{MM_1} = K = \frac{n}{m} = \mu$, et l'on aura :

$$x = \frac{mx_0 + nx_1}{m + n}, \quad y = \frac{my_0 + ny_1}{m + n}.$$

Soient maintenant les quatre points en ligne droite $\pi = o$, $\chi = o$, $\pi + \mu\chi = o$, $\pi + \mu'\chi = o$, μ et μ' ayant la signification que nous venons d'obtenir. Nous appellerons *rapport anharmonique* de ces quatre points le quotient $\frac{\mu}{\mu'}$, et nous retomberons ainsi d'une manière purement analytique sur la définition de M. Chasles. Car $\frac{\mu}{\mu'} = \frac{n}{m} : \frac{n'}{m'} = \frac{MM_0}{MM_1} : \frac{M'M_1}{M'M_0}$ c'est donc le quotient du rapport des distances du troisième point M aux deux premiers M_0 et M_1, par le rapport des distances du quatrième point M' aux deux premiers.

Mais il est bien certain que les numéros des points considérés sont absolument arbitraires; par conséquent, il y aura, *à priori*, autant de rapports anharmoniques de quatre points en ligne droite que l'on pourra former de permutations de quatre lettres, c'est-à-dire vingt-quatre; mais ces rapports se réduisent d'abord à six distinctes, et, de plus, ils sont tous fonctions de l'un d'eux, de sorte que, l'un étant déterminé, les autres le sont également. On peut donc n'en considérer qu'un (*).

Valeur générale du rapport anharmonique en fonction des paramètres des quatre points considérés. — Dans la valeur précédente du rapport anharmonique, les deux points qui déterminent primitivement la droite des quatre points, et

(*) Nous avons donné dans notre Géométrie analytique, la démonstration complète de ce fait, dans le § intitulé : « *Rapport anharmonique de quatre points en ligne droite* ».

auxquels convient parfaitement le nom de *points de base* adopté par Clebsch, interviennent par eux-mêmes; il est important d'obtenir une expression plus générale, se rapportant à quatre points absolument quelconques sur la droite dont il s'agit. Soient donc μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 les paramètres des quatre points considérés. Si l'on considérait les deux premiers comme points de base, en posant $\pi + \mu_1\chi = \xi$, et $\pi + \mu_2\chi = \eta$, les deux derniers s'écriraient $\xi + \nu\eta = 0$ et $\xi + \nu'\eta = 0$, et le rapport anharmonique aurait pour valeur $\frac{\nu}{\nu'}$. Or, il suffit pour cela de poser:

$$\pi + \mu_3\chi = \pi + \mu_1\chi + \nu(\pi + \mu_2\chi) = 0$$
$$\pi + \mu_4\chi = \pi + \mu_1\chi + \nu_1 \text{ et } (\pi + \mu_2\chi) = 0$$

ce qui donne:

$$\frac{\mu_1 + \nu\mu_2}{1 + \nu} = \mu_3 \text{ et } \frac{\mu_1 + \nu'\mu_2}{1 + \nu'} = \mu_4$$

d'où l'on tire:

$$\nu = \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_3 - \mu_2} \quad \text{et } \nu' = \frac{\mu_1 - \mu_4}{\mu_4 - \mu_2}.$$

Dès lors $\frac{\nu}{\nu'} = \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_3 - \mu_2} : \frac{\mu_1 - \mu_4}{\mu_4 - \mu_2}$.

Cette expression fournit le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite, en fonction des paramètres qui définissent ces points en coordonnées tangentielles, et cela indépendamment des points pris comme points de base sur la droite.

— Dans la suite, nous supposerons bien connue la théorie du rapport anharmonique, telle qu'on l'expose ordinairement en géométrie, et conséquemment aussi, nous admettrons comme parfaitement acquises les propriétés de son cas particulier le plus remarquable, qui est la *division harmonique*.

Pour simplifier les notations, nous représenterons dorénavant par $M_0 = 0$, l'équation d'un point M_0, cette équation étant de l'une ou l'autre des deux formes $ux_0 + vy_0 - 1 = 0$, ou $Au_0 + Bv_0 + C_0 = 0$; et de même nous désignerons par $P_0 = 0$, l'équation d'une droite P_0, cette équation étant de la forme $u_0x + v_0y - 1 = 0$, ou de la forme $A_0x + B_0y + C_0 = 0$.

De la correspondance. — Un point M de la droite $M_0\, M_1$ ayant ainsi pour équation $+M_0\ \mu M_1 = 0$ et une droite P du faisceau $P_0\, P_1$ (c'est-à-dire passant par le point de rencontre des deux droites P_0 et P_1) étant représentée par l'équation $P_0 + \lambda P_1 = 0$, on peut considérer un point et une droite pour lesquels on ait $\lambda = \mu$, et les appeler *correspondants*.

Conditions de projectivité des figures. — Si l'on considère ainsi sur une même base, trois points quelconques, et dans un même faisceau trois droites qui soient en correspondance avec les trois points, on reconnaît facilement que pour qu'un quatrième point de la base soit en correspondance avec une quatrième droite du faisceau, il faut et il suffit qu'il y ait entre les paramètres λ et μ en relation du premier degré par rapport à ces paramètres considérés séparément, c'est-à-dire une relation de la forme

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0$$

telle qu'à une valeur donnée de λ corresponde une seule valeur *de μ et réciproquement.*

Soient, en effet, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. les paramètres des trois premières droites; μ_1, μ_2, μ_3, paramètres des trois premiers points, seront, par hypothèse, respectivement égaux à λ_1, λ; λ_3, λ_4 et μ_4 étant les paramètres de la quatrième droite et du quatrième point, on devra avoir identiquement

$$\left\{\begin{array}{l} a\lambda^2_1 + b\lambda_1 + c\lambda_1 + d = 0 \\ a\lambda^2_2 + b\lambda_2 + c\lambda_2 + d = 0 \\ a\lambda_3^2 + b\lambda_3 + c\lambda_3 + d = 0 \\ a\lambda_4\mu_4 + b\lambda_4 + c\mu_4 + d = 0 \end{array}\right.$$

Ces quatre relations sont homogènes et linéaires en a, b, c, d, quantités qui ne sont pas nulles, simultanément; donc il faut et il suffit, pour qu'elles aient lieu à la fois que le déterminant de leurs coefficients soit nul, c'est-à-dire que l'on ait

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_1 & \lambda_1 & 1 \\ \lambda_2^2 & \lambda_2 & \lambda_2 & 1 \\ \lambda_3^2 & \lambda_3 & \lambda_3 & 1 \\ \lambda_4\mu_4 & \lambda_4 & \mu_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ce que l'on peut écrire, en retranchant les éléments de la deuxième colonne de ceux de la troisième :

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_1 & 0 & 1 \\ \lambda_2^2 & \lambda_2 & 0 & 1 \\ \lambda_3^2 & \lambda_3 & 0 & 1 \\ \lambda_4\mu_4 & \lambda_4 & \mu_4 - \lambda_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ce déterminant se réduit à :

$$(\lambda_4 - \mu_4) \begin{vmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_1 & 1 \\ \lambda_2^2 & \lambda_2 & 1 \\ \lambda_3^2 & \lambda_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Or, le deuxième facteur de ce produit est identiquement égal à $-(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1)$
et comme on suppose $\lambda_1 \gtrless \lambda_2 \gtrless \lambda_3$, il faut que l'autre facteur soit nul, c'est-à-dire que l'on ait $\lambda_4 = \mu_4$.

Le quatrième point et la quatrième droite sont donc correspondants, c. q. f. d.

Il est clair que la démonstration précédente s'applique, sans modifications, à deux bases différentes dont les points sont unis chacun à chacun par une pareille relation, et aussi à deux faisceaux différents dont les rayons satisfont à cette relation.

Les figures présentant la correspondance que nous venons d'étudier s'appellent *figures projectives*. On trouve dans les *Leçons sur la géométrie* de Clebsch une autre démonstration de ce principe de projectivité; mais celle que nous venons d'exposer nous semble plus précise.

Deux figures projectives par rapport à une même troisième sont projectives entre elles. — Les éléments correspondants de la première et de la troisième figure ont, en effet, même paramètre; il en est de même des éléments correspondants de la deuxième et de la troisième figure; ces éléments sont donc aussi correspondants dans la première et la deuxième figure, comme ayant même paramètre.

(A suivre.)

QUESTION 213

Solution par M. Liégeois, élève au Lycée Saint-Louis.

Soit l'équation à coefficients positifs.

$$x^m - a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} - a_3x^{m-3} + \dots$$
$$+ (-1)^p a_p x^{m-1} + \dots$$

Il y aura des racines imaginaires si l'une des conditions suivantes est remplie.

$$a_2 > \frac{m-1}{1 \cdot 2 \cdot m} a^2$$

$$a_3 > \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot m^2}$$

$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$

$$a_p > \frac{(m-1)(m-2)\dots(m-p+1)}{1 \cdot 2 \dots p \cdot m^{p-1}} a^p$$

. . . . *(Laurent.)*

Les coefficients a_1, a_2, ... a_p étant positifs, le premier membre de l'équation proposée ne présente que des variations. La transformée en $-x$ ne présente que des permanences. Donc l'équation proposée n'admet pas de racines négatives. Si toutes les racines sont réelles, elles sont positives. Supposons qu'elle ait toutes ses racines réelles et soient x_1, x_2 ... x_m ses racines.

On a

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = a_1$$
$$x_1\, x_2\, x_3 \dots x_m = (-1)^{m+1} a_m$$

Si nous considérons x_1, x_2, x_m comme ayant une somme constante a_1 le produit de ces m quantités sera maximum quand elles seront toutes égales entre elles. Le maximum du produit $x_1\, x_2 \dots x_m$ est $\left(\frac{a_1}{m}\right)^m$

Or, ces quantités ne sont pas toutes égales, car le premier membre de l'équation donnée serait le développement de la puissance m^{me} d'un binôme, ce qu'on ne doit pas supposer.

Donc $$a_m < \left(\frac{a_1}{m}\right)^m$$

quand toutes les racines sont réelles.

Si l'on avait $$a_m > \left(\frac{a_1}{m}\right)^m$$

c'est qu'il y aurait des racines imaginaires.

Prenons maintenant la dérivée d'ordre $m - p$ et égalons-la à zéro, nous aurons

$$m(m-1) \ldots (p+1)x - (m-1)(m-2)p\, a_1 x^{p-1} + \ldots + (-1)^p (m-p) \ldots 2 \,.\, 1 \,.\, a_p = 0$$

Cette équation ne peut avoir de racines négatives. Si elle avait toutes ses racines réelles, elles seraient positives et l'on aurait,

$$a_p \frac{1 \,.\, 2 \ldots p}{m(m-1) \ldots (m-p+1)} < \left(\frac{p}{m-p}\right)^p a_1^p$$

ou $$a_p < \frac{(m-1) \ldots (m-p+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, p \,.\, m^{p-1}} a_1^p$$

Si donc l'on a

$$a_p > \frac{(m-1) \ldots m-(p+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, \ldots p \,.\, m^{p-1}} a_1^p$$

c'est que l'équation a des racines imaginaires.

Puisque $f^{m-p} = 0$ a des racines imaginaires $4f^{m-p+1} = 0$ a aussi des racines imaginaires et ainsi de suite en remontant $f(x)$ a des racines imaginaires.

Si nous faisons $p = 2$, nous aurons

$$a_2 > \frac{m-1}{1 \,.\, 2 \ldots m} a_1^2$$

Si nous faisons $p = 3$, nous aurons

$$a_3 > \frac{(m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, m^2} a_1^3$$

NOTA. — A résolu la même question : M. du Motel, du lycée Saint-Louis (classe de M. Lucas).

QUESTION 226

Solution par M. Le Pont, élève du Lycée Saint-Louis (classe de M. E. Lucas).

Démontrer que si l'on a la relation

$$(fl)^{\frac{1}{3}} + (gm)^{\frac{1}{3}} + (hn)^{\frac{1}{3}} = 0,$$

les deux coniques

$$fyz + gzx + hxy = 0,$$

$$\sqrt{lx} + \sqrt{my} + \sqrt{nz} = 0.$$

sont tangentes. Trouver les coordonnées de leur point de contact.

Les équations des tangentes aux deux coniques au point X, Y, Z, sont

$$X(gz + hy) + Y(hx + fz) + Z(fy + gx) = 0,$$

$$X\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{x}} + Y\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{y}} + Z\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{z}} = 0.$$

Identifiant ces deux équations, nous aurons les égalités

$$\frac{x(gz + hy)}{\sqrt{lx}} = \frac{y(hx + fz)}{\sqrt{my}} = \frac{z(fy + gx)}{\sqrt{nz}}$$

ou

$$\frac{fyz}{\sqrt{lx}} = \frac{gzx}{\sqrt{my}} = \frac{hxy}{\sqrt{nz}}$$

ou en divisant par xyz

$$\frac{f}{x\sqrt{lx}} = \frac{g}{y\sqrt{my}} = \frac{h}{z\sqrt{nz}}$$

ou

$$\frac{fl}{(lx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{gm}{(my)^{\frac{3}{2}}} = \frac{hn}{(nz)^{\frac{3}{2}}}$$

par suite

$$\frac{(fl)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{lx}} = \frac{(gm)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{my}} = \frac{(hn)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{nz}};$$

et comme

$$\sqrt{lx} + \sqrt{my} + \sqrt{nz} = 0,$$

on a aussi

$$(fl)^{\frac{1}{3}} + (gm)^{\frac{1}{3}} + (hn)^{\frac{1}{3}} = 0.$$

Les coordonnées du point de contact sont

$$x = \frac{f}{l^{\frac{1}{2}}}, \qquad y = \frac{g}{m^{\frac{1}{2}}}, \qquad z = \frac{h}{n^{\frac{1}{2}}}.$$

NOTA. — **M. Simon, élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Lucas), a résolu également cette question.**

QUESTION 265

Solution par M. VERNAY, du Lycée de Lyon.

Étant donnée la courbe $\left[\frac{x}{a}\right]^m + \left[\frac{y}{b}\right]^m = 1$, *on mène en un point* M *de cette courbe une tangente qui rencontre les axes de coordonnées en* A *et* B. *On achève le rectangle ayant pour côtés* OA *et* OB; *soit* M′ *le sommet opposé à* O. *On propose de trouver le lieu décrit par* M′ *quand* M *décrit la courbe donnée.*

Cela fait, on projette un point quelconque de la courbe $\left[\frac{x}{a}\right]^p + \left[\frac{y}{b}\right]^p = 1$ *sur les axes en* C *et* D; *on joint* CD; *trouver immédiatement l'enveloppe de* CD.

Soit $M(x', y')$ un point de la courbe $\left[\frac{x}{a}\right]^m + \left[\frac{y}{b}\right]^m = 1$ (1).
Ce point satisfait à la relation

$$\left[\frac{x'}{a}\right]^m + \left[\frac{y'}{b}\right]^m = 1 \qquad (1)'.$$

La tangente en ce point est $\frac{xx'^{m-1}}{a^m} + \frac{yy'^{m-1}}{b^m} = 1$.

En faisant $y = 0$ puis $x = 0$, on obtient les coordonnées du point M′ (2)

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{a^m}{x'^{m-1}} \\ y &= \frac{b^m}{y'^{m-1}} \end{aligned}\right.$$

Éliminons x' et y' entre les équations (1)′ et (2) on a pour lieu du point M′.

$$\left[\frac{a}{x}\right]^{\frac{m}{m-1}} + \left[\frac{b}{y}\right]^{\frac{m}{m-1}} = 1 \qquad (3)$$

2° On considère la courbe $\left[\frac{x}{a}\right]^p + \left[\frac{y}{b}\right]^p = 1$ et on propose de trouver l'enveloppe de CD. C'est le problème précédent renversé. On connaît l'équation (3) et il s'agit d'en déduire l'équation (1).

On voit, en posant $p = \frac{m}{m-1}$, d'où $m = \frac{p}{p-1}$, que l'enveloppe cherchée a pour équation

$$\left[\frac{x}{a}\right]^{\frac{p}{p-1}} + \left[\frac{b}{y}\right]^{\frac{p}{p-1}} = 1$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Gilly, à Montpellier ; Cardot, à Nancy ; Boudénes, à Grenoble ; Baron, lycée Henri IV.

QUESTION 271

Solution par M. Andrieux, élève du Lycée de Rouen.

Trouver le coefficient du terme en x^p *dans le développement suivant :* $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots x^{n-1})^2$.

Supposons d'abord que ce terme se trouve entre 1 et x^{p-1} on a à faire le produit

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^p + \ldots + x^{n-1}$$
$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^p + \ldots + x^{n-1}$$

on multiplie les termes de la première ligne successivement par ceux de la seconde ; considérons le terme en x^p.

Tous les termes de la seconde ligne compris entre 1 inclusivement et x^p en donnent chacun un qui résulte de l'addition des exposants pour former p, ainsi 1 en donne un multiplié par x^p, x en donne un multiplié par x^{p-1}, x^2 par x^{p-2} et ainsi de suite ; or comme il y a $p+1$ termes le coefficient de x^p est $(p+1)$. Il n'y a que les termes qui ont des exposants inférieurs à p qui puissent donner x^p par une multiplication, puisqu'on ajoute les exposants et chacun ne peut en donner qu'un, car avec un nombre donné il n'y a qu'une manière d'avoir p.

Supposons maintenant que le terme en x^p soit en dehors de $(1 + x + \ldots + x^{n-1})$.

$$\begin{array}{l|l} 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} & + \ldots\ldots + x^p \\ 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n+1} & + \ldots\ldots + x^p \end{array}$$

Si on ne considérait pas le développement jusqu'à x^{n-1} le coefficient de x^p serait $p + 1$; mais dans le cas qui nous occupe le coefficient est trop fort, car on a ajouté en trop des termes qui résultent de la multiplication des $(p + 1 - n)$ premiers termes de la seconde ligne par les $(p + 1 - n)$ termes de la première qui suivent x^{n-1} et des $(p + 1 - n)$ derniers termes de la première ligne par les $(p + 1 - n)$ premiers termes de la première ligne, donc le coefficient de x^p est $p + 2 - 2(p + 1 - n) = 2n - (p + 1)$.

Il faut évidemment que x^p se trouve dans les n termes qui suivent x^{n-1} sans quoi il n'y aurait pas de termes en x^p dans le développement.

QUESTION 274

Solution par M. GINO-LORIA, à Mantoue (Italie).

Étant donné l'arc 2a, *effectuer la somme* S *déterminée par la formule*

$$S = 3 + \sin^4 a + \cos^4 a + \sin^6 a + \cos^6 a + \ldots$$
$$+ \sin^{2n} a + \cos^{2n} a + \ldots$$

La série donnée peut s'écrire

$$S = 1 + \sin^2 a + \sin^4 a + \sin^6 a + \ldots \sin^{2n} a$$
$$+ 1 + \cos^2 a + \cos^4 a + \cos^6 a + \ldots \cos^{2n} a$$

ou $$S = \frac{1}{1 - \sin^2 a} + \frac{1}{1 - \cos^2 a} = \frac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\sin^2 a \cdot \cos^2 a},$$

d'où $$S = \frac{4}{4 \sin^2 a \cos^2 a} = 4 \operatorname{coséc}^2 2a.$$

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Boulogne, de Lille; Joly, de Tarbes; Daguillon, du lycée Henri IV (classe de M. Macé de Lépinay.)

QUESTIONS PROPOSÉES

Mathématiques élémentaires.

299. — Tout triangle dans lequel les rapports du périmètre aux diamètres des trois cercles ex-inscrits sont exprimés par des nombres entiers est rectangle. Dire la forme de ce triangle. *(Geoffroy.)*

300. — On donne dans une circonférence O une corde CD et un diamètre AB. Déterminer un point M sur la circonférence, de telle manière que les lignes MC et MD déterminent sur le diamètre AB des segments OH et OI dont le rapport soit égal à un rapport donné. *(Delpit.)*

301. — Construire un triangle connaissant un angle, la médiane et la bissectrice partant du sommet de l'angle. *(Desmons.)*

302. — Étant donné un segment de cercle ACB, C étant le milieu de l'arc du segment, on décrit sur les droites AC et BC des circonférences qui se coupent sous un angle égal à l'angle dont le segment est capable. Quel est le lieu du point de rencontre M de ces circonférences? *(Desmons.)*

303. — On donne un cercle, et un point fixe P, intérieur au cercle. On demande : 1° quel est le lieu des points symétriques du point P par rapport aux quadrilatères inscrits ABCD, dont les diagonales sont rectangulaires et passent par le point P; 2° quel est le lieu des sommets des quadrilatères obtenus en menant par les sommets des quadrilatères ABCD des parallèles aux diagonales. *(Desmons.)*

304. — On donne deux cercles O et O', et on mène une sécante SAA' par un centre de similitude S. Par les points antihomologues A et A', on mène les rayons OA et O'A' qui se coupent en I, de même les tangentes respectives AH, A'H, qui se coupent en H. On joint SH et S'I, S' étant le

second centre de similitude. On demande le lieu du point de rencontre des droites SH et S'I. Si l'on prend pour centre d'inversion le point S et pour module d'inversion un module tel que chaque circonférence se change dans l'autre, on demande quelle est la figure inverse de l'axe radical des deux cercles. *(Desmons.)*

305. — On donne un cercle O, et par le centre de ce cercle on mène deux rayons rectangulaires OA et OB ; par les extrémités de ces rayons on mène deux droites parallèles à deux directions fixes et rectangulaires. Ces deux droites se coupent en un point I dont on demande le lieu lorsque le système AOB tourne autour du point O.

(De Longchamps.)

306. — Par le sommet A d'un triangle isoscèle ABC, on mène une sécante AL ; on prend le symétrique M du point C par rapport à la droite AL, et on mène la droite BM, qui coupe AL en P. Lieu du point P lorsque AL tourne autour du point A. *(Malloizel.)*

Mathématiques spéciales.

307. — Former les dérivées successives de la fonction

$$y = e^{\frac{a}{2}x^2}$$

a. Etablir que la dérivée d'ordre n est égale au produit de la fonction elle-même par un polynôme entier en x, P_n, du degré n ;

b. Démontrer que entre les divers polynômes P existent les relations suivantes :

$$P_n = P'_{n-1} + axP_{n-1}$$
$$P'_n = naP_{n-1}$$
$$P_{n-1} - axP_n - naP_{n-1} = 0.$$
$$P''_n + axP'_n - naP = 0;$$

c. Démontrer que, si a est négatif, l'équation $P_n = 0$ a toutes ses racines réelles ;

d. Former le polynôme P_n, en se servant de la troisième relation.

308. — *a* et *b* étant deux quantités réelles, on considère la fonction $y = (x - a)^m (x - b)^m$;
On demande combien l'équation obtenue en égalant à zéro la dérivée m^{me} de y a de racines réelles.

309. — Étudier la série

$$\frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{2^2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{3^2} + \dots$$

310. — Sur une corde AB de l'ellipse comme diamètre, on décrit un cercle qui coupe l'ellipse en deux autres points C et D. On demande le lieu des points M où les sécantes communes AB et CD se rencontrent, lorsque AB se meut parallèlement à elle-même.

311. — Par l'un des foyers d'une ellipse, on mène deux cordes parallèles à deux diamètres conjugués, et coupant la courbe en A, A', d'une part, en B, B' d'autre part; démontrer que la somme AA' + BB' est constante, et trouver sa valeur.

312. — On considère une ellipse et le cercle lieu des sommets des angles droits qu'on peut lui circonscrire. Par un point P, extérieur à l'ellipse, on mène les deux tangentes PA et PB à l'ellipse. On prolonge la corde des contacts AB jusqu'à sa rencontre en C et D avec le cercle. Faire voir analytiquement et géométriquement que les angles CPA, BPD sont égaux.

BIBLIOGRAPHIE

Leçons d'algèbre élémentaire, *par* **M. Vacquant**, *inspecteur général de l'instruction publique. — 5e édition. — Paris, librairie Delagrave.*

Les leçons d'algèbre dont nous signalons aujourd'hui une nouvelle édition, ont pris rapidement, par suite de leurs qualités, place parmi les meilleurs traités classiques que nous possédions actuellement. Cependant, les exigences des examens, et principalement des programmes de l'école Saint-Cyr, faisaient désirer plus de développement pour certaines questions; aussi voyons-nous avec plaisir la nouvelle édition complétée par l'étude de théories très souvent demandées dans les examens, présentées ici avec un degré de rigueur qui n'exclut pas

cependant une exposition très élémentaire, mise à la portée de tous les élèves qui veulent travailler avec un peu d'attention. Nous citerons plus particulièrement :

Les conditions pour qu'un polynôme soit identiquement nul, ou pour que deux polynômes soient identiques ;

Les valeurs d'une expression algébrique qui prend des formes illusoires ;

La discussion des formules qui permettent de résoudre un système de trois équations à trois inconnues ;

L'étude de la variation de la fraction du second degré ;

La recherche des maxima et minima par la méthode des coefficients indéterminés.

Nous avons la certitude que cet ouvrage, étudié avec soin par les élèves de mathématiques élémentaires, qui se préoccuperont de faire les exercices gradués proposés à la fin de chaque chapitre, les mettra en état de comprendre, et de pouvoir résoudre la plus grande partie des difficultés que peut présenter un examen, de la force de ceux qu'ils ont à subir.

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE, *suivis d'un* COMPLÉMENT, *par* M. **Amiot**. — *Nouvelle édition revue et augmentée par* M. **Vintéjoux**, *professeur au Lycée Saint-Louis*. — *Paris, librairie Delagrave.*

Le succès légitime obtenu par l'ouvrage de M. Amiot nous dispense d'en faire l'éloge. Il est probable cependant, que l'auteur ne lui aurait pas laissé, dans ses diverses éditions, constamment la même forme, et qu'il aurait apporté dans la rédaction, les modifications exigées par les changements mêmes qu s'introduisent peu à peu dans l'enseignement de la géométrie. Il était difficile de tenter de se substituer à l'auteur primitif, et de changer son œuvre, sans craindre d'en modifier l'esprit. C'est ce qu'a fait M. Vintéjoux, avec grand succès. Nous signalerons en particulier son cinquième livre, dans lequel il généralise déjà les questions sur la droite et le plan dans l'espace. La partie la plus importante de cette nouvelle édition est certainement l'introduction, dans le complément, de quelques-unes des théories qui forment ce que l'on appelle encore *géométrie moderne*, telles que les transversales, les axes radicaux, la division harmonique et l'inversion. Ces diverses théories devraient être maintenant couramment enseignées en mathématiques élémentaires. Déjà, dans le corps de l'ouvrage l'auteur a donné plus de développements que ne l'avait fait M. Amiot dans les éditions précédentes aux figures homothétiques à deux et trois dimensions, à la symétrie et aux propriétés métriques des figures planes.

La lecture de cet ouvrage nous fait vivement désirer de voir le professeur, qui a si bien interprété la pensée de M. Amiot, reprendre et compléter un autre ouvrage du même auteur, maintenant introuvable, les *Leçons nouvelles de Géométrie*, où précisément M. Amiot avait étudié au point de vue des élèves, les théories qui constituent la base de la géométrie moderne. Il nous semble qu'en faisant entrer dans cet ouvrage les modifications que le développement de la géométrie a rendues nécessaires, on pourrait en faire une bonne introduction à l'étude de la géométrie supérieure.

EXERCICES ET PROBLÈMES D'ALGÈBRE, *par* M. **Tzaut**, *professeur à l'école cantonale à Lausanne*. — *Seconde partie*. — *Paris, librairie Gauthier-Villars.*

Cet ouvrage, dont nous avons signalé autrefois la première partie comprend des exercices sur les radicaux, les équations du second degré, le binôme et les déterminants. Les exemples numériques y sont très nombreux ; les systèmes d'équations simultanées présentent parfois des difficultés dans leurs solutions. Nous devons dire que nous aurions aimé voir dans ce recueil un nombre plus considérable de problèmes proprement dits, et surtout de ces problèmes si intéressants, tant par eux-mêmes qu'au point de vue des examens, de l'application de l'algèbre aux questions de géométrie. L'ouvrage aurait ainsi mieux répondu aux besoins de notre enseignement en France.

A. M.

ERRATUM

La question 281 doit être rectifiée comme il suit :
Résoudre le système

$$\frac{1}{ax - by - 1} + \frac{1}{by - ax - 1} = \frac{1}{ax + by - 1}$$
$$bx + ay = m.$$

Dans le numéro de Janvier, page 8, ligne 9, au lieu de $\frac{v}{\pi}$, il faut lire $\frac{N}{\pi}$.

AVIS

Nous n'avons pas reçu la solution des questions n°s 227, 233, 236, 237, 241, 246, 247, 262. Nous prions nos lecteurs de nous les envoyer; nous les prions aussi de nous envoyer les questions du baccalauréat données aux sessions de Juillet et de Novembre.

Le Rédacteur-Gérant,
J. KŒHLER.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 990-1

NOUVELLE MÉTHODE

POUR LE CALCUL

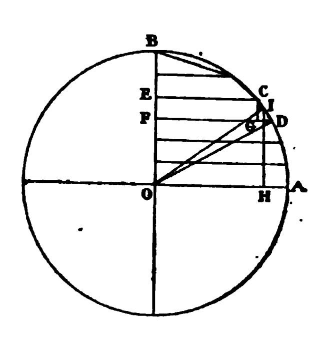
DU RAPPORT DE LA CIRCONFÉRENCE AU DIAMÈTRE

Par **L. Geoffroy,**
Répétiteur à l'École Centrale, Professeur au Collège Chaptal.

(*Suite*, v. page 49.)

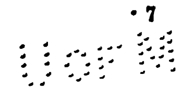
Nous avons exposé, précédemment, une méthode permettant d'obtenir par des considérations élémentaires, le développement du nombre π en série convergente. Nous nous proposons d'établir, par des considérations du même ordre d'autres expressions en série de la valeur de π.

Supposons qu'on ait partagé le rayon $OB = 1$, d'une circonférence, en n parties égales, et qu'on ait mené par les points de division des parallèles au rayon OA perpendiculaire à OB.



Nous aurons divisé ainsi l'arc AB de longueur $\frac{\pi}{2}$ en n divisions inégales. Les cordes telles que CD soutendant ces n arcs forment une ligne polygonale irrégulière inscrite, de longueur P, qui tend vers $\frac{\pi}{2}$ à la limite, c'est-à-dire lorsque le nombre n augmente indéfiniment. Soit EF la division du rayon OB, correspondant à l'arc CD. — En menant OI perpendiculaire à CD, IH perpendiculaire à OA, et enfin CG parallèle à FE nous avons, en raison des triangles semblables CDG et OIH

$$\frac{CG}{CD} = \frac{OH}{OI}$$



et comme CG = EF on aura

$$\lim \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{CD}} = \lim \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OI}} = \frac{\mathrm{FD}}{1}$$

par conséquent $\lim \mathrm{CD} = \lim \dfrac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FD}}$

or

$$\mathrm{EF} = \frac{\mathrm{OB}}{n} = \frac{1}{n}$$

et

$$\mathrm{FD} = \sqrt{\overline{\mathrm{OD}}^2 - \overline{\mathrm{OF}}^2} = \sqrt{1 - \frac{p^2}{n^2}}$$

en appelant p le nombre des divisions comptées de O en F.

On aura donc :

$$\lim \mathrm{CD} = \frac{1}{\lim n \sqrt{1 - \frac{p^2}{n^2}}}$$

$$= \lim \frac{1}{\sqrt{n^2 - p^2}}.$$

Par conséquent le périmètre P étant la somme des éléments tels que CD, on aura

$$\mathrm{P} = \sum_0^{n-1} \mathrm{CD} = \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 - (n-1)^2}}$$

et comme $\dfrac{\pi}{2}$ est la limite de P, on aura

$$\frac{\pi}{2} = \lim \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 - p^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 - (n-1)^2}} \right].$$

Développement en série de la limite précédente.

Nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 - p^2}} = (n^2 - p^2)^{-\frac{1}{2}}$$

on sait qu'on a



$$(n^2-p^2)^{-\frac{1}{2}} = n^{-1} + \frac{\frac{1}{2}}{1}p^2n^{-3} + \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}}{1\,.\,2}p^4n^{-5} + \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}p^6n^{-7} + \ldots$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{2}}{1}\frac{p^2}{n^3} + \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}}{1\,.\,2}\frac{p^4}{n^5} + \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{p^6}{n^7} + \ldots$$

Nous pouvons donc écrire, en développant successivement chaque terme de la quantité entre crochets

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} = \frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{2}}{1}\frac{1}{n^3} + \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}}{1\,.\,2}\frac{1}{n^5} + \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{1}{n^7} + \ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} = \frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{2}}{1}\frac{2^2}{n^3} + \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}}{1\,.\,2}\frac{2^4}{n^5} + \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{2^6}{n^7} + \ldots$$

. . . .

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-p^2}} = \frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{2}}{1}\frac{p^2}{n^3} + \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}}{1\,.\,2}\frac{p^4}{n^5} + \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{p^6}{n^7} + \ldots$$

. . . .

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} = \frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{2}}{1}\,\frac{(n-1)^2}{n^3} + \frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}}{1\,.\,2}\,\frac{(n-1)^4}{n^5} + \frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{(n-1)^6}{n^7} + \ldots$$

En ajoutant ces égalités membre à membre, on obtient, à la limite

$$\frac{\pi}{2} = \lim \left[1 + \frac{1}{2}\,\frac{S_2}{n^3} + \frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}}{1\,.\,2}\,\frac{S_4}{n^5} + \frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{S_6}{n^7} + \ldots\right]$$

En désignant par S_2, S_4, S_6, etc. La somme des puissances semblables des nombres entiers de 1 à $n - 1$, inclusivement, l'exposant de la puissance étant marqué par l'indice.

Or nous avons démontré précédemment les égalités :

$$\lim \frac{S_2}{n^3} = \frac{1}{3} \qquad \lim \frac{S_4}{n^5} = \frac{1}{5}$$

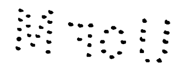
$$\lim \frac{S_6}{n^7} = \frac{1}{7} \text{ etc. } \ldots$$

En remplaçant dans l'expression de $\frac{\pi}{2}$, il viendra :

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1}\,\frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}}{1\,.\,2}\,\frac{1}{5} + \frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{1}{7} + \frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}\,\frac{7}{2}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,\frac{1}{9} + \ldots$$

on retrouve la forme ordinaire donnée à cette série dans les traités de calcul intégral :

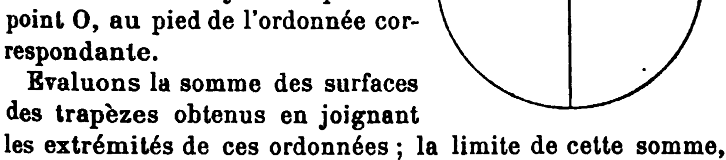
$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{1}{5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\,\frac{1}{7} + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}\,\frac{1}{9} + \text{etc.} \ldots$$



Autre expression du rapport de la circonférence au diamètre.

Au lieu de considérer la circonférence comme la limite d'une ligne polygonale irrégulière inscrite, nous considérerons la surface du cercle comme la limite de l'aire d'un polygone irrégulier inscrit.

Supposons le rayon $OA = 1$, partagé en n parties égales, menons par les points de division des ordonnées que nous désignerons successivement en partant du point O, par y_0, y_1, y_2, etc., y_{n-1} ; l'indice exprimant le nombre des subdivisions du rayon comptées du point O, au pied de l'ordonnée correspondante.



Evaluons la somme des surfaces des trapèzes obtenus en joignant les extrémités de ces ordonnées ; la limite de cette somme, lorsque n augmente indéfiniment, nous donnera l'aire du quart de cercle de rayon 1, c'est-à-dire la valeur $\frac{\pi}{4}$.

Les trapèzes successifs ont pour hauteur commune une division du rayon, soit $\frac{1}{n}$; la somme des surfaces S, de ces trapèzes est :

$$S = \frac{1}{n}\left[\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 + y_3}{2} + \cdots + \frac{y_{n-2} + y_{n-1}}{2} + \frac{y_{n-1} + 0}{2}\right]$$

ou

$$S = \frac{1}{n}\left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-2} + y_{n-1}\right]$$

Calculons une ordonnée de rang quelconque y_p on a :

$$y_p = \sqrt{\overline{OM}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{p}{n}\right)^2}$$

$$y_p = \frac{1}{n^2}\sqrt{n^2 - p^2}$$

par suite :

$$S = \frac{1}{n^2}\left[\frac{n}{2} + \sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \sqrt{n^2 - 3^2} + \ldots \right.$$
$$\left. + \sqrt{n^2 - (n-1)^2}\right]$$

Développons en série le terme général de la parenthèse, c'est-à-dire $\sqrt{n^2 - p^2}$.

On a

$$\sqrt{n^2 - p^2} = (n^2 - p^2)^{\frac{1}{2}} = n - \frac{\frac{1}{2}}{1}\,\frac{p^2}{n} - \frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}{1\,.\,2}\,\frac{p_4}{n_3}$$
$$- \frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{p^6}{n^5} - \frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,\frac{p^8}{n^7} - \text{etc.}$$

Appliquons cette formule à tous les termes de la parenthèse nous aurons :

$$S = \frac{1}{n^2}\left[\begin{array}{l}
\frac{n}{2} \\
n - \frac{\frac{1}{2}}{1}\,\frac{1}{n} - \frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}{1\,.\,2}\,\frac{1}{n^3} - \frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{1}{n^5} \ldots \\
n - \frac{\frac{1}{2}}{2}\,\frac{2^2}{n} - \frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}{1\,.\,2}\,\frac{2^4}{n^3} - \frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{2^6}{n^5} \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
n - \frac{\frac{1}{2}}{1}\,\frac{p^2}{n} - \frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}{1\,.\,2}\,\frac{p^4}{n^3} - \frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{p^6}{n^5} \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
n - \frac{\frac{1}{2}}{1}\,\frac{(n-1)^2}{n} - \frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}{1\,.\,2}\,\frac{(n-1)^4}{n^3} \\
\qquad - \frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{(n-1)^6}{n^5} \ldots
\end{array}\right]$$

En multipliant la quantité entre crochets par $\frac{1}{n^2}$, et en ajoutant par colonnes verticales on obtient :

$$S = \frac{n-1}{n} \frac{1}{2n} - \frac{\frac{1}{2}}{1} \frac{S_2}{n^3} - \frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}{1\,.\,2} \frac{S_4}{n^5}$$

$$- \frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}}{1\,.\,2\,.\,3} \frac{S_6}{n^7} - \frac{\frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{2}\,.\,\frac{3}{2}\,.\,\frac{5}{2}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} \frac{S_8}{n^9} - \ldots$$

S_2, S_4, S_6, ayant le même sens que précédemment. En passant à la limite, c'est-à-dire en faisant croître n indéfiniment, on pourra remplacer $\frac{S_2}{n^3}, \frac{S_4}{n^5}$ etc., par leurs limites $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}$, etc. on aura, à la place de S la valeur $\frac{\pi}{4}$ du quart de cercle; don

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\frac{1}{2}}{1} \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}{1\,.\,2} \frac{1}{5} - \frac{\frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{2}\,.\,\frac{3}{2}}{1\,.\,2\,.\,3} \frac{1}{7}$$

$$- \frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} \frac{1}{9} - \text{etc.}$$

ou en multipliant les deux membres par 2

$$\frac{\pi}{2} = 2 - \frac{1}{1} \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{2}}{1\,.\,2} \frac{1}{5} - \frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}}{1\,.\,2\,.\,3} \frac{1}{7}$$

$$- \frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} \frac{1}{9} - \frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,.\,\frac{5}{2}\,.\,\frac{7}{2}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} \frac{1}{11} - \ldots \text{etc.}$$

En calculant les huit premiers termes, on trouve :

$\frac{\pi}{2}$ = 1,5799 ... au lieu de 1,5707 ... valeur véritable.

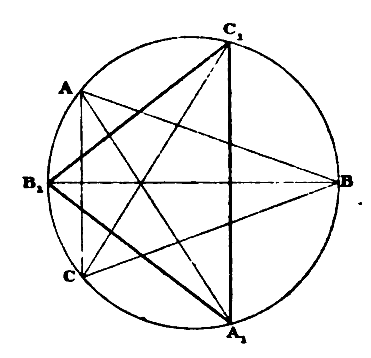
Nous croyons que cette dernière formule est nouvelle.

APPLICATIONS DE LA TRIGONOMÉTRIE

Par M. **Gino-Loria**

(*Suite*, voir p. 62.)

7. — (R) *Les bissectrices des angles* A, B, C, *d'un triangle coupent le cercle circonscrit aux points* A_1, B_1, C_1. *Calculer les côtés, les angles et l'aire du triangle* $A_1B_1C_1$ *en fonction des éléments du triangle* ABC.



L'angle A_1 (*fig. 1*) est mesuré par la demi-somme des deux arcs AB_1, AC_1; comme $AB_1 = \frac{1}{2}AC$ et $AC_1 = \frac{1}{2}AB$ l'angle A_1 sera égal à la demi-somme des angles B, C. Nous aurons donc $A_1 = \frac{1}{2}(B + C) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}A$.

De même $B_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}B$; $C_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}C$.

En appelant a_1, b_1, c_1, les côtés du nouveau triangle, nous aurons $\dfrac{a_1}{\cos\frac{1}{2}A} = \dfrac{b_1}{\cos\frac{1}{2}B} = \dfrac{c_1}{\cos\frac{1}{2}C} = 2R$.

d'où

$$a_1 = 2R\cos\frac{1}{2}A;\quad b_1 = 2R\cos\frac{1}{2}B;\quad c_1 = 2R\cos\frac{1}{2}C$$

et, si S_1 est la surface du nouveau triangle, on aura

$$S_1 = 4R^2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C.$$

Remarque. — Le triangle ayant pour sommets les points de rencontre des bissectrices extérieures des angles du triangle avec le cercle circonscrit, est égal au précédent.

8. — (R) *Étant donné un triangle circonscrit à un cercle, on désigne par* A_1, B_1, C_1, *les points de contact sur les côtés* BC, CA, AB; *on propose de calculer les côtés, les angles et la surface du triangle* $A_1B_1C_1$ *en fonction des éléments du triangle* ABC.

Posons *(fig. 2)* : $B_1C_1 = a_1$; $C_1A_1 = b_1$; $A_1B_1 = c_1$.

Du triangle isoscèle AB_1C_1 on tire (*)

$$a_1 = 2(p - a) \sin \frac{1}{2} A.$$

De même

$$b_1 = 2(p - b) \sin \frac{1}{2} B;$$

$$c_1 = 2(p - c) \sin \frac{1}{2} C.$$

Pour calculer les angles, considérons les triangles AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1; nous en tirerons

$$AB_1C_1 = AC_1B_1 = \frac{\pi - A}{2};$$

$$BC_1A_1 = BA_1C_1 = \frac{\pi - B}{2}; \quad CA_1B_1 = CB_1A_1 = \frac{\pi - C}{2}.$$

Par conséquent,

$$C_1 = \pi - \left(\frac{\pi - A}{2} + \frac{\pi - B}{2}\right) = \frac{A + B}{2} = \frac{\pi - C}{2}$$

$$A_1 = \frac{\pi - A}{2}; \qquad B_1 = \frac{\pi - B}{2}.$$

En appelant S_1 l'aire du nouveau triangle, et en nous rappelant que

$$a_1 = 2r \cos \frac{1}{2} A, \qquad b_1 = 2r \cos \frac{1}{2} B$$

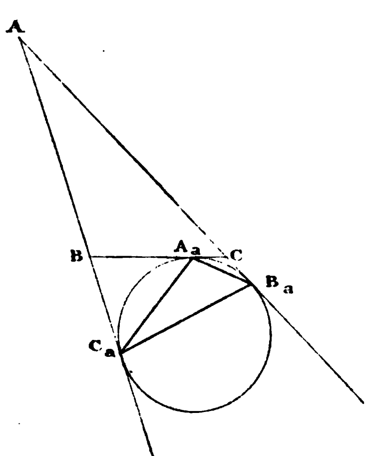
on aura $S_1 = 2r^2 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C$

Si on veut S_1 exprimée au moyen des côtés on trouvera

$$S_1 = \frac{4\, S^3}{(a + b + c)\, abc}$$

(*) Desboves, *Questions de Trigonométrie rectiligne*, 2e éd., p. 221.

9. — *Étant donnés un triangle et un des cercles ex-inscrits, on désigne par* A_a B_a C_a *les points de contact sur les côtés* BC, CA, AB. *On demande de calculer les côtés, les angles et la surface du triangle* A_a B_a C_a *en fonction des éléments du triangle* ABC.



Posons (*fig. 3*): $B_a C_a = a_a$; $C_a A_a = b_a$; $A_a B_a = c_a$.

Le triangle isoscèle $A B_a C_a$ donne :

$$a_a = 2p \sin \frac{1}{2} A$$

de même

$$b_a = 2(p - b) \cos \frac{1}{2} B;$$

$$c \quad = 2(p - c) \cos \frac{1}{2} C.$$

Des triangles isoscèles AB_aC_a, BC_aA_a, CA_aB_a, on tire :

$$AC_aB_a = AB_aC_a = \frac{\pi - A}{2}; \quad BA_aC_a = BC_aA_a = \frac{B}{2};$$

$$CB_aA_a = CA_aB_a = \frac{C}{2}$$

et par conséquent,

$$A_a = \frac{\pi + A}{2}; \quad B_a = \frac{B}{2}; \quad C_a = \frac{C}{2}.$$

En appelant S_a la surface du nouveau triangle, et en nous rappelant que :

$$a_a = 2r' \cos \frac{1}{2} A; \qquad b_a = 2r' \sin \frac{1}{2} B$$

on aura $S_a = 2r'^2 \cos \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C$,

si on veut S_a exprimée au moyen des côtés, on trouvera

$$S_a = \frac{4S^3}{(-a + b + c)\, abc}.$$

0. — Nous avons trouvé dans les nos 8, 9 :

$$S_1 = \frac{4S^3}{(a + b + c)\, abc}; \qquad S_a = \frac{4S^3}{(-a + b + c)\, abc}$$

D'une manière analogue on trouverait :

$$S_b = \frac{4S^3}{(a-b+c)\,abc}; \qquad S = \frac{4S^3}{(a+b+c)\,abc};$$

On tire donc : $\frac{1}{S_a} + \frac{1}{S_b} + \frac{1}{S_c} = \frac{1}{S_1}$.

Cette égalité donne le théorème qui suit, que nous croyons nouveau :

L'inverse de l'aire du triangle formé en joignant les points de contact du cercle inscrit avec les côtés d'un triangle, est égale à la somme des inverses des aires des triangles formés en joignant les points de contact des cercles ex-inscrits.

11 (R). — *Si* a, b, c, *sont les côtés d'un triangle* ABC, *on propose de calculer les angles du triangle* $A_1B_1C_1$ *dont les côtés sont :* $a_1 = a \cos A$; $b_1 = b \cos B$; $c_1 = c \cos C$.

Les relations données peuvent s'écrire :

$a_1 = 2R \sin A \cos A$; $b_1 = 2R \sin B \cos B$; $c_1 = 2R \sin C \cos C$
ou $a_1 = R \sin 2A$; $b_1 = R \sin 2B$; $c_1 = R \sin 2C$.

Il s'ensuit que :

$2p_1 = a_1 + b_1 + c_1 = R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$
c'est-à-dire (*) $p_1 = 2R \sin A \sin B \sin C$.

On a encore

$$2(p_1 - a_1) = R(-\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C),$$

d'où (**) $p_1 - a_1 = 2R \sin A \cos B \cos C$.

De même :

$p_1 - b_1 = 2R \cos A \sin B \cos C$; $p_1 - c_1 = 2R \cos A \cos B \sin C$.

On déduit donc :

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A_1 = \sqrt{\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}} = \operatorname{cotg} A = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$$

donc $A_1 = \pi - 2A$.

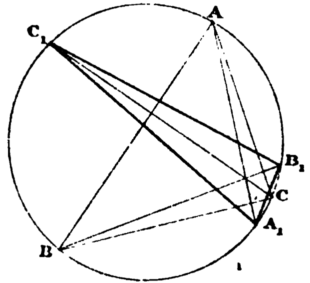
D'une manière analogue :

$$B_1 = \pi - 2B; \qquad C_1 = \pi - 2C.$$

12 (R). — *Les hauteurs du triangle* ABC *coupent le cercle circonscrit aux points* A_1, B_1, C_1. *Calculer les angles, les côtés*

(*) Desboves, *Questions de Trigonométrie*, p. 119
(**) *Ibid.*

et la surface du triangle $A_1B_1C_1$ *en fonction des éléments du triangle* ABC.



On a (*Fig. 4.*) :

$A_1 = C_1A_1A + B_1A_1A = C_1CA + B_1BA = 2\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \pi - 2A.$

De même on aurait :

$B_1 = \pi - 2B; \qquad C_1 = \pi - 2C$

Les côtés a_1, b_1, c_1, du nouveau triangle seront donnés par les relations :

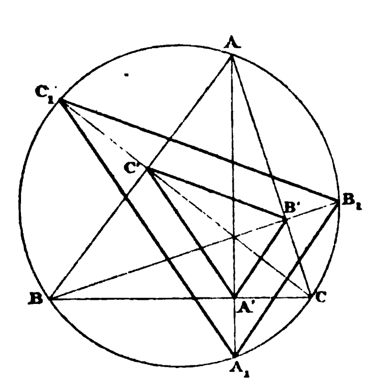
$$\frac{a_1}{\sin(\pi - 2A)} = \frac{b_1}{\sin(\pi - 2B)} = \frac{c_1}{\sin(\pi - 2C)} = 2R;$$

d'où l'on déduit :

$$b_1 = 2R \sin 2A; \quad b_1 = 2R \sin 2B; \quad c_1 = 2R \sin 2C.$$

La surface S_1 du triangle $A_1B_1C_1$ sera donnée par la relation $S_1 = 2R^2 \sin 2A \sin 2B \sin 2C$.

Remarque.— Il est facile de reconnaître que le triangle dont les côtés sont $a \cos A$, $b \cos B$, $c \cos C$ (n° 11) n'est autre que le triangle A'B'C' (*fig. 5*) formé en joignant les pieds des hauteurs. Si nous appelons $A_1B_1C_1$ les points de rencontre des hauteurs avec le cercle circonscrit, et si nous nous rappelons le résultat obtenu aux n°ˢ 11, 12, nous déduirons que les triangles A'B'C', $A_1B_1C_1$ sont semblables. Mais ils sont aussi homologiques, donc ils sont homothétiques. Or les deux angles ACC_1 ABB_1 sont égaux comme suppléments du même angle, donc les arcs AB_1, AO_1 sont égaux, et la droite AA_1 est la bissectrice de l'angle A_1. AA_1 est par conséquent la bissectrice de l'angle A' dont les côtés sont parallèles à ceux de l'angle A_1. De même on prouverait que les droites BB_1,



CC_1 sont les bissectrices des angles B', C'. Nous arrivons donc au théorème bien connu : *Les hauteurs d'un triangle sont les bissectrices des angles du triangle formé en joignant leurs pieds.*

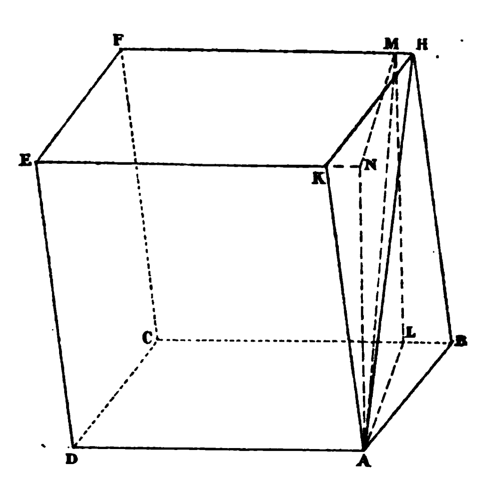
(A suivre.)

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Problème I. — *Exprimer le volume du parallélipipède en fonction des trois arêtes issues du même sommet et des angles qu'elles font entre elles.*

Nous supposons connus, dans le parallélépipède les trois arêtes $BA = a$, $BH = b$, $BC = c$.
et les angles $ABH = \gamma$, $ABC = \beta$, $CBH = \alpha$.

Considérons la section droite ALMN, perpendiculaire à l'arête BC; le volume du solide est égal au produit de cette section droite par l'arête BC. Or, la surface de la section a pour expression $AL \times LM \sin ALM$.



Il faut donc exprimer, au moyen des données, les quantités AL, LM et l'angle ALM.

On a d'abord
$AL = a \sin \beta$;
$LM = b \sin \alpha$;
puis, l'angle ALM sera déterminé si je puis connaître le côté AM.

Or, d'une part, le triangle ALM donne

$$AM^2 = AL^2 + LM^2 - 2AL \,.\, LM \,.\, \cos ALM ;$$

d'autre part on a, par le triangle rectangle AMH :

$$AM^2 = AH^2 - HM^2.$$

On a facilement les deux égalités suivantes :

$$AH^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$
$$HM = a \cos \beta - b \cos \alpha.$$

Donc, en égalant les deux valeurs de AM^2 que l'on obtient ainsi, on a

$$a^2 \sin \beta + b^2 \sin^2 \alpha - 2ab \sin \alpha \sin \beta \cos ALM$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma - (a \cos \beta - b \cos \alpha)^2$$

En réduisant, on trouve :

$$\sin \alpha \sin \beta \cos ALM = \cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta.$$

D'où l'on tire facilement :

$$\sin ALM = \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta - (\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta)^2}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}}.$$

Or, le numérateur de cette expression peut s'écrire comme il suit :

$$(\cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta)(\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma)$$

ou encore :

$$[\cos \gamma - \cos(\alpha + \beta)]\,[\cos(\alpha - \beta) - \cos \gamma],$$

ce que l'on peut écrire :

$$4 \sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right).$$

Par suite, si l'on fait sortir le dénominateur du radical, et que l'on remplace $\frac{AL}{\sin \beta}$ par a, $\frac{LM}{\sin \alpha}$ par b, on trouve pour l'expression cherchée du volume :

$$V = 2abc \sqrt{\sin \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \sin \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} \sin \frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} \sin \frac{\gamma+\alpha-\beta}{2}}$$

Problème II. — *Trouver le volume du tétraèdre en fonction de trois arêtes issues du même sommet et des angles qu'elles font entre elles.*

On déduit facilement ce volume du précédent, dont il est la sixième partie. Si on veut le trouver directement, on construira le prisme ayant pour base une des faces du tétraèdre contenant deux des arêtes données, et ses arêtes latérales, égales et parallèles à la troisième arête. Puis, on

cherchera comme précédemment la section droite de ce prisme; on continuera le calcul comme nous l'avons fait plus haut, et on trouvera en définitive, pour le tétraèdre qui est le tiers du prisme :

$$V' = \frac{1}{3}abc\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}}.$$

QUESTIONS D'EXAMEN

I. — *On a deux droites rectangulaires* Ox, Oy; *par un point* B *de* Ox, *on mène une parallèle* BD *à* Oy, *jusqu'à sa rencontre en* D *avec une parallèle* CD *à* Ox, *menée par un point* C *de* Oy; *par le point* D *on mène une sécante* MDN, *qui détermine deux triangles* BDM, CDN. *On demande la position de la droite* MDN, *pour laquelle la somme des deux triangles est minima.*

Nous prendrons pour inconnues les segments déterminés sur les droites Ox et Oy par la droite MDN ; nous poserons

donc $\qquad ON = y; \qquad OM = x,$

puis $\qquad OB = a; \qquad OC = b.$

Il est facile de voir que les deux quantités x et y sont liées par la relation

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1.$$

La somme des surfaces des deux triangles est

$$a(y - b) + b(x - a)$$

ou

$$ay + bx - 2ab.$$

Or, d'après la première relation, on a

$$ay + bx = xy.$$

Donc, l'expression dont on cherche le minimum est

$$xy - 2ab,$$

ou

$$ab\left(\frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} - 2\right).$$

La quantité $\frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b}$ passe par un minimum lorsque son inverse passe par un minimum, et puisque la somme

$\frac{a}{x} + \frac{b}{y}$ est constante, le produit sera maximum quand on aura :

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$

c'est-à-dire que la droite cherchée sera parallèle à BC.

II. — *Un nombre étant décomposé en ses facteurs premiers, le décomposer en une différence de deux carrés.*

Il suffit de supposer le nombre n'ayant que des facteurs premiers à la première puissance, car si un facteur premier entre avec une puissance paire, on le mettra en facteur. S'il entre avec une puissance impaire $2n + 1$, on mettra en facteur la puissance $2n$ de ce facteur premier; il est bien évident en effet que si $a^2 - b^2$ est une différence de carrés, il en sera de même de $p^2(a^2 - b^2)$.

Cela posé, si je décompose le nombre en un produit de deux facteurs, qui seront premiers entre eux, j'ai facilement une solution de la question, puisque j'ai identiquement en appelant A et B ces deux facteurs :

$$AB = \frac{(A + B)^2}{4} - \frac{(A - B)^2}{4}.$$

Si le facteur 2 n'est pas affecté d'un exposant impair, les deux facteurs A et B seront tous deux impairs, et les deux carrés seront entiers; dans le cas contraire, ils seront fractionnaires, mais le dénominateur 4 peut disparaître, si le facteur 2 entre dans le facteur carré parfait que nous avons négligé.

On peut se demander combien il y a de solutions au problème. Il est évident qu'il y en a autant que l'on peut former de facteurs de la forme A et B; et, puisque l'un de ces facteurs donne immédiatement l'autre, on voit que le nombre des solutions est la moitié de la somme des nombres de combinaisons que l'on peut former avec k objets pris 1 à 1, 2 à 2, . . . , k étant le nombre des facteurs qui entrent avec un exposant impair. Par suite, le nombre de solutions cherchées est 2^{k-1}, car il faut compter la solution obtenue en prenant tous les facteurs pour former l'un des facteurs du produit, l'autre étant l'unité.

3. *Étant donné un secteur* AOB *dont l'un des côtés est horizontal, trouver sur l'arc* AB *un point* M *tel qu'en menant* ME *parallèle à* OA, *et rencontrant* OB *en* E, *et par les points* M, E, *des perpendiculaires* MM′, EE′ *à* OA, *la figure* MEE′M′ *soit un carré.* (Le lecteur est prié de faire la figure.)

Soit α l'angle du secteur, x l'angle AOM. On a d'abord, en prenant le rayon pour unité,

$$MM' = \sin x$$

puis, le triangle MEO, dans lequel l'angle MEO est le supplément de α, donne

$$\frac{ME}{MO} = \frac{\sin(\alpha - x)}{\sin \alpha}.$$

Donc l'équation du problème est

$$\sin \alpha \sin x = \sin(\alpha - x)$$

On en tire $$\operatorname{tg} x = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}.$$

4. *On donne un triangle* ABC, *et un point* P *sur la base* BC; *on demande de mener une parallèle* MN *à* BC, *qui rencontre les côtés* AB *et* AC *aux points* M *et* N, *de telle sorte que l'angle* MPN *soit droit.* (Le lecteur est prié de faire la figure.)

Menons la médiane AD du triangle ABC; elle rencontre la ligne inconnue MN en son milieu H, et on a PH = HM, puisque le triangle MPN est rectangle en P. Prenons pour inconnue AH $= x$; l'angle DAP est connu, appelons le α; le triangle HAP nous donne

$$PH^2 = x^2 + PA^2 - 2PA \cdot x \cos \alpha;$$

d'autre part, on a, m étant la médiane, a le côté BC

$$\frac{2HM}{a} = \frac{x}{m};$$

d'où $$HM = PH = \frac{ax}{2m}.$$

l'équation du problème est donc, en appelant d la distance PA

$$\frac{a^2x^2}{4m^2} = x^2 + d^2 - 2dx \cos \alpha$$

ou sous forme entière

$$(a^2 - 4m^2)x^2 + 8dm^2 \cos \alpha \cdot x - 4d^2m^2 = 0.$$

On reconnaîtra que l'équation a deux racines de signe contraire si $a^2 - 4m^2$ est positif; les racines sont de même signe lorsque $a^2 - 4m^2$ est négatif. L'équation s'abaisse au premier degré si $a^2 - 4m^2$ est nul; or, on sait que $a^2 - 4m^2$ est positif si l'angle A est obtus, négatif s'il est aigu, nul si l'angle est droit. On peut donc facilement voir, d'après la valeur de l'angle en A, les différentes solutions du problème.

Nous indiquerons ici une construction géométrique de la figure, construction que nous avons trouvée signalée dans un journal américain *(the Mathematical Visitor)* et qui donne les particularités de la solution algébrique: sur la base BC comme diamètre, nous décrivons une circonférence; nous cherchons l'intersection I de la ligne AP avec cette circonférence; la droite DI et la droite PH sont parallèles, comme il est facile de s'en assurer, car on a bien

$$\frac{2\text{PH}}{a} = \frac{x}{m}.$$

On verra facilement que:

Si l'angle A est aigu, la ligne AP rencontre la circonférence en deux points situés du même côté du point A, et que l'on en déduira deux positions de H, aussi du même de A; si l'angle est obtus, l'un des points d'intersection se trouvera sur le prolongement de AP; enfin, si l'angle est droit, l'un des points d'intersection sera en A et si par le point P on mène une parallèle au rayon, qui est alors DA, on n'aura plus d'intersection avec la médiane.

5. *Étant donné un demi-cercle, on demande de mener une corde parallèle au diamètre qui soit vue sous un angle droit d'un point* P *pris sur le diamètre du cercle.*

Nous prendrons pour inconnues la distance x du centre du cercle à la corde cherchée, et la demi-corde y; on a donc d'abord $x^2 + y^2 = r^2$

puis la distance du point P au milieu de la corde étant égale à la moitié de cette corde, puisque l'angle est droit, on a aussi $x^2 + d^2 = y^2$

d étant la distance du point au centre.

On en tire facilement

$$2x^2 = r^2 - d^2.$$

qui est l'équation du problème. On voit qu'il faut que l'on ait $d^2 < r^2$.

6. *Étant donné un cercle* O, *et deux points* A *et* B *sur un diamètre, l'un* A *intérieur, l'autre* B *extérieur au cercle, mener par* B *une corde telle que la partie interceptée soit vue du point* A *sous un angle droit.*

Je prends pour inconnues l'angle que fait avec le diamètre OAB la perpendiculaire menée du centre sur la corde, cette perpendiculaire et la demi-corde ; je pose en outre

$$OA = d ; OB = d' ;$$

J'ai les relations, puisque la distance du point A au milieu de la corde est égal à la moitié de cette corde :

$$y^2 = x^2 + d^2 - 2dx \cos z$$
$$y^2 = r^2 - x^2.$$
$$x = d' \cos z.$$

Par suite l'équation devient, en éliminant y et $\cos z$.

$$x^2 = \frac{d^2(r^2 - d^2)}{2(d' - d)}$$

Il faut donc que l'on ait d'abord $d < r$, pour que x soit réel. En outre, on doit avoir

$$\frac{d(r^2 - d^2)}{2(d' - d)} < r^2.$$

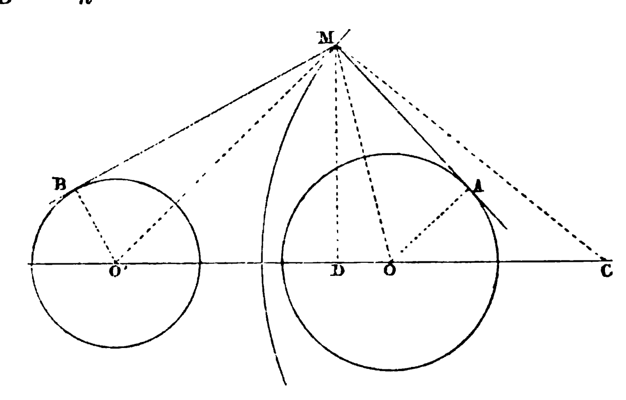
On trouve, en cherchant à résoudre cette inégalité par rapport à d, qu'elle est toujours vraie si d' est extérieur au cercle, comme nous l'avons supposé dans l'énoncé.

QUESTION 241

Solution par M. Callon, élève du lycée Louis-le-Grand.

Trouver le lieu des points M *tels que les tangentes menées de ce point à deux cercles* O *et* O' *soient dans un rapport donné* $\frac{m}{n}$.

Soient $OA = R$, $O'B = r$. M est un point de lieu. On a $\frac{MA}{MB} = \frac{m}{n}$ (1).



Elevant au carré les deux membres de cette égalité et remplaçant $\overline{MA}^2$ et $\overline{MB}^2$ par leurs valeurs, on a

$$\frac{\overline{MO}^2 - R^2}{\overline{MO'}^2 - r^2} = \frac{m^2}{n^2}$$

ou $$n^2\,\overline{MO}^2 - m^2\,\overline{MO'}^2 = n^2R^2 - m^2r^2.$$

Soit C un point quelconque pris sur OO' et MD perpendiculaire à OO'. On a

$$\overline{MO}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{OC}^2 - 2OC\,.\,CD$$
$$\overline{MO'}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{O'C}^2 - 2O'C\,.\,CD$$

multiplions les deux membres de la première de ces relations par n^2, ceux de la seconde par m^2 et retranchons membre à membre ; il vient

$$n^2.\overline{MO}^2 - m^2\overline{MO'}^2 = (n^2 - m^2)\,\overline{MC}^2 + n^2\overline{OC}^2 - m^2\overline{O'C}^2 - 2CD(n^2OC - m^2O'C).$$

Si l'on détermine le point C par la condition

$$n^2OC = m^2O'C$$

ou $$\frac{OC}{O'C} = \frac{m^2}{n^2} \qquad \text{(A)}$$

le terme qui renferme CD disparaît, et l'on a en résolvant par rapport à $\overline{MC}^2$

$$\text{(B)} \qquad \overline{MC}^2 = \frac{m^2\overline{O'C}^2 - n^2\overline{OC}^2 + n^2R^2 - m^2r^2}{n^2 - m^2} = \text{constante}.$$

Le lieu est donc un cercle décrit de C comme centre avec un rayon égal à MC. Le point C étant déterminé par la relation (A).

Lorsque $m = n$, le rayon devient infini, le lieu est alors l'axe radical des deux cercles.

La relation (A) montre que OC et O'C sont deux segments de même sens, le point C est donc toujours extérieur à OO'. On voit en outre que si $m \gtrless n$, on a également $OC \lessgtr O'C$. C'est-à-dire que si $m < n$, C est à droite de O, et à gauche si m est plus grand.

Si l'on résolvait le problème en permutant m et n et en posant par conséquent $\frac{MA}{MB} = \frac{n}{m}$, on trouverait comme lieu un cercle de centre C' symétrique de C par rapport au milieu de OO', mais de rayon différent de MC.

Pour que le problème soit possible, il faut que la valeur de $\overline{MC}^2$ donnée par (B) soit positive.

REMARQUE. — M. Mayon, du Lycée Henri IV, tire de la solution précédente la conséquence suivante :

Etant donnés trois cercles O, O', O'', *les lieux géométriques des points dont les puissances par rapport à* O *et* O' *d'une part, à* O'' *et* O' *de l'autre, sont dans un rapport donné, et l'axe radical des cercles* O *et* O'' *se coupent en un même point.*

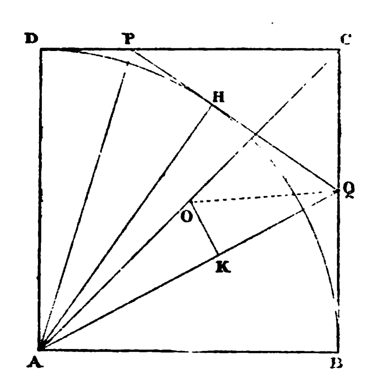
NOTA. — Ont résolu la même question: MM. Mayon, Lapareillé du lycée Henri IV (classe de M. Colas); Vazou, au collège Rollin; Al. Joly, de Tarbes; Bois, du lycée de Montauban; Bonneville, du lycée de Toulouse; Pierron, à Nantes; Santol, à Perpignan; Marit, lycée Louis le Grand; H. Bourget à Aix.

QUESTION 251

Solution par M. Ch. BONNEVILLE, élève du Lycée de Toulouse.

On donne un carré ABCD *et un cercle ayant pour centre le sommet* A *de ce cercle et pour rayon le côté du carré; à ce cercle on mène une tangente quelconque* PQ *qui rencontre les côtés* BC, CD *du carré aux points* P *et* Q. *Trouver le lieu géométrique décrit par le centre du cercle circonscrit au triangle* APQ.

Soient O le centre du cercle dont il faut chercher le lieu.



Posons BAQ $= \alpha$, HAQ $= \beta$, HAP $= \gamma$, PAD $= \delta$.

Les droites AQ et AP sont bissectrices des angles HAB, HAD.

On a $\alpha + \frac{Q}{2} = 90$

$\beta + \frac{Q}{2} = 90$

$\gamma + \frac{P}{2} = 90$

$\delta + \frac{P}{2} = 90$

d'où $\beta + \gamma = \alpha + \delta.$

mais $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 90^\circ.$

donc $\beta + \gamma = 45^\circ.$

Soit OK la perpendiculaire sur AQ. Joignons OQ, l'angle AOQ = 2APQ, donc AOK = APQ, donc les triangles AOK et APH sont équiangles et PAH = OAK et PAO = HAQ = QAB, donc

PAQ = OAB = 45°, donc le lieu du point O est la diagonale du carré. Le lieu est du reste la diagonale tout entière puisque tous les points D et A en font partie lorsque la tangente se confond avec les autres côtés du carré.

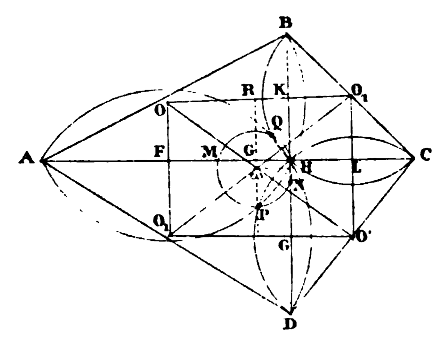
Nota. — MM. Marin, à Agen; Dupuy, à Grenoble; Santol, à Perpignan, ont résolu la même question.

QUESTION 252

Solution par M. L. Rivard, élève au Lycée du Mans.

ABCD *est un quadrilatère;* M *et* N *sont les milieux des diagonales* AHC, BHD *qui se coupent en* H. *Les cercles* AHB, CHD *se coupent en* P, *les cercles* HBC, HDA *se coupent en* Q. *Démontrer que les cinq points* M, N, H, P, Q *sont sur un même cercle.*

Par les points P, H, Q on peut faire passer une circonférence dont le centre est en ω où se coupent les lignes qui joignent les centres O et O′, O_1 et O_1'. Je dis que cette circonférence passe par le point M. Pour le démontrer, joignons O_1. O : $O.O_1'$; O'_1. O_1' ; O', O_1.



Les droites OO_1, $O'O'_1$ sont précisément les perpendiculaires élevées sur les milieux F et L des lignes AH et HL ; elles sont donc parallèles. De même les deux lignes O'_1O et $O'O_1$ sont parallèles. Donc le quadrilatère $OO_1O'O'_1$ est un parallélogramme. Donc si par le point ω, où se coupent les diagonales, on mène une parallèle aux côtés OO_1 et O'_1O', cette ligne partagera en deux parties égales toute droite FL qui joint deux points des côtés OO_1 et O'_1O'. Donc le point G est le milieu de LF.

D'un autre côté, la droite ωG parallèle à $O_1'O'$ est perpendiculaire à FL ; donc le point ω est à égale distance de F et de L ; or on a $FL = MC$

donc $FM = LC = HL$

par suite $\omega H = \omega M$. Même démonstration pour prouver que la circonférence ω passe par le point N.

NOTA : — Cette question a été résolue par M. Callon, élève du lycée Louis-le-Grand.

QUESTION 261

Solution pa M. DAGUILLON, élève du Lycée Henri IV.

On donne une circonférence O *et deux points* A *et* B *dans son plan ; on prend sur* AB *le point fixe* C *tel que* $\frac{CA}{CB} = \frac{a}{b}$.
On prend un point P *quelconque sur la circonférence et on le*

joint au point B. *On prolonge* BP *jusqu'en* D *de telle sorte que* $\frac{DP}{DB} = \frac{p}{q}$. *On demande le lieu du point de rencontre des deux droites* AP *et* CD *lorsque le point* P *décrit la circonférence donnée.*

Soit N le point de rencontre ; le triangle ABP, coupé par la transversale DMC, donne

$$\frac{BC \cdot AM \cdot CP}{DB \cdot MP \cdot CA} = 1$$

d'où

$$\frac{AM}{MP} = \frac{aq}{bp}$$

par suite

$$\frac{AM}{AP} = \frac{aq}{bp + aq}$$

ce qui montre que le lieu du point M est une circonférence homothétique à la circonférence donnée, A étant le centre d'homothétie et $\frac{aq}{bp + aq}$ le rapport d'homothétie.

Il est à remarquer que la position et la grandeur de cette circonférence dépendent uniquement de la position du point A et des rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{p}{q}$, mais nullement de la position et de la grandeur de la droite AB.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. P. Boulogne, de Saint-Quentin; Van Aubel, à Liége; Joly, à Tarbes; Perrier, Prost, à Lons-le-Saulnier; Chrétien, au Havre; Houssette, à Amiens; Cardot, à Nancy; Santol à Perpignan.

QUESTION 268

Solution par M. A. JOLY, élève au Lycée de Tarbes.

Sur les trois côtés d'un triangle quelconque comme diamètre on décrit des circonférences et on mène les tangentes communes à ces circonférences prises deux à deux.

Démontrer que la somme des carrés des inverses des tangentes est égale au carré de l'inverse du rayon du cercle inscrit.

Désignons par l, m, n, les trois tangentes obtenues. La tangente $MN = m$ est le côté de l'angle droit d'un triangle

rectangle ayant FE pour hypoténuse et AF — AE = HF pour côté de l'angle droit, on a donc

$$m^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{(c-b)^2}{4} = \frac{(a+c-b)(a-c+b)}{4}$$

Ou en posant $a + b + c = 2p$

$$m^2 = (p-b)(p-c)$$

Dès lors $$\frac{1}{m^2} = \frac{p-a}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Par analogie on a

$$\frac{1}{n^2} = \frac{p-b}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\frac{1}{l^2} = \frac{p-c}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Ajoutant membre à membre ces égalités, il vient

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{l^2} = \frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Si l'on remarque que $p^2r^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$, on aura finalement

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{l^2} = \frac{p}{pr^2} = \frac{1}{r^2}$$

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Van Aubel, à Liége ; Monterou, lycée Louis-le-Grand ; Daguillon, Lapareillé, lycée Henri IV ; Tinel, à Rouen ; Gino Loria, à Mantoue ; Arthus Bertrand (école Albert-le-Grand), Arcueil ; Charpot, à Vitry le François.

QUESTION 269

Solution par M. GINO LORIA, à Mantoue.

Par un point donné dans un angle et également distant de ses deux côtés, mener une droite terminée à ces mêmes côtés, de telle sorte que le point donné la divise en deux segments dont la somme des carrés soit donnée.

Soit P le point donné entre les côtés de l'angle XOY = ω, menons PQ parallèle à OY et PR parallèle à OX et soit l le côté du losange ORPQ. Si XY est la droite cherchée, posons

QX $= x$, RY $= y$, nous aurons

$$\overline{PX}^2 = l^2 + x^2 - 2lx \cos \omega, \quad \overline{PY}^2 = l^2 + y^2 - 2ly \cos \omega.$$

dès lors, l'une des équations du problème est

$$2l^2 + x^2 + y^2 - 2l(x + y) \cos \omega = K^2 \qquad (1)$$

de plus, les triangles semblables PQX, PRY

donnent $$\frac{x}{l} = \frac{l}{y}$$

dès lors $$xy = l^2 \qquad (2)$$

donc $$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2l^2$$

et l'équation devient

$$(x + y)^2 - 2l(x + y) \cos \omega - K^2 = 0$$

d'où $$x + y = l \cos \omega \pm \sqrt{l^2 \cos^2 \omega + K^2}.$$

Cette équation jointe à (2) fera connaître x et y.

Le problème a quatre solutions.

QUESTION 276

Solution, par M. G. Hétier, élève au Lycée de Moulins.

Par un des sommets C d'un triangle quelconque ABC mener une droite telle que la somme des projections des côtés du triangle aboutissant à ce sommet, sur cette droite, soit égale à une quantité donnée.

Du sommet A par exemple, comme centre, avec un rayon égal à la longueur donnée l, décrivons une circonférence et menons lui une tangente BD par le point B. Joignons AD et par le point C menons une parallèle EF à cette droite. La parallèle EF est la droite cherchée. En effet, si l'on projette sur EF les points A et B l'un en E l'autre en F, EF sera la somme des projections des côtés AC et BC. Comme le quadrilatère AEFD est un rectangle on a EF $=$ AD $= l$.

Comme par le point B on peut mener deux tangentes à la circonférence, la question aura en général deux solutions. La solution correspondante à la tangente BG est la droite CK, parallèle à AG, rayon de contact.

Si la longueur donnée est plus petite que AB, on aura

deux solutions. Si $l = AB$ on aura une seule solution. Dans ce cas la droite cherchée sera une parallèle à AB menée par C. Enfin, si la longueur l est plus grande que AB il n'y aura pas de solution.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Hamon, au Mans ; Andrieux, Tinel, à Rouen ; Lanoir, à Toulouse ; Pierron, à Nantes ; Daguillon, lycée Henri IV ; Latallerie, à Saint-Dier (Puy-de-Dôme) Dupuy, à Grenoble ; Pottier, à Rennes ; Bourget (H) à Aix ; Callon au lycée Louis-le-Grand ; Joly, à Tarbes.

SUR LES MAXIMA ET LES MINIMA

Par M. Kœnigs.

Nous rappellerons que si $\varphi(x)$ est une fonction continue entre deux valeurs a et b de x et qu'il en soit de même de ses premières dérivées, on a si $x + h$ est compris entre a et b :

$$\varphi(x + h) = \varphi(x) + \frac{h}{1}\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x + \theta h)$$

où θ est un nombre inférieur à l'unité; de même si $x - h$ est compris entre a et b :

$$\varphi(x - h) = \varphi(x) - \frac{h}{1}\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x - \theta_1 h)$$

où θ_1 est aussi inférieur à 1.

On en déduit par addition :

$$\varphi(x + h) + \varphi(x - h) - 2\varphi(x) = \frac{h^2}{2}[\varphi''(x + \theta h) + \varphi''(x - \theta_1 h)]$$

Si on suppose que $\varphi''(x)$ conserve le même signe entre a et b, il en sera de même du premier membre de cette identité, de sorte que si φ'' est constamment positif, on a :

$$\varphi(x + h) + \varphi(x - h) > 2\,\varphi(x).$$

Cela posé, considérons la fonction

$$V = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta) + \ldots + \varphi(\lambda)$$

où $\alpha + \beta + \ldots + \lambda = c$, c étant constant : le minimum de V est aisé à trouver si on assujettit les variables α, β, ...λ à varier entre a et b.

Soient α', β', γ' ... λ' les valeurs donnant ce minimum, je dis que l'on a: $\alpha' = \beta' = \gamma' \ldots = \lambda'$
en effet, supposons $\alpha' > \beta'$

on a
$$\alpha' = \frac{\alpha' + \beta'}{2} + \frac{\alpha' - \beta'}{2}$$
$$\beta' = \frac{\alpha' + \beta'}{2} - \frac{\alpha' - \beta'}{2}$$

Or α' et β' étant compris entre a et b, il en est évidemment de même de leur demi-somme, donc
$$\varphi(\alpha') + \varphi(\beta') > 2\varphi\left(\frac{\alpha' + \beta'}{2}\right)$$
donc en prenant pour α et β la demi-somme $\frac{\alpha' + \beta'}{2}$, on a une valeur de V inférieure à celle que l'on avait supposée minimum, résultat absurde qui montre que α' et β' doivent être égaux.

On voit que si φ'' était constamment négative entre a et b, au lieu d'un minimum ce serait un maximum que l'on aurait. De là le théorème suivant:

Soit $\varphi(x)$ *une fonction continue, ainsi que ses deux premières dérivées ente deux limites* a *et* b : α, β, γ ... λ *des variables comprises entre ces limites et dont la somme est constante.*

Si φ'' *conserve un signe constant entre ces limites, la fonction*
$$\varphi(\alpha) + \varphi(\beta) + \ldots + \varphi(\lambda)$$
sera maximum ou minimum pour des valeurs égales des variables $\alpha, \beta, \ldots \lambda$.

Le maximum aura lieu si φ'' *est négatif et le minimum s'il est positif.*

On peut appliquer ce théorème à divers exemples :

Soit d'abord $\varphi(x) = x^p$, $\varphi''(x) = p(p-1)x^{p-2}$.

Snpposons $p \geq 2$, et prenons $a = 0$ et $b = \infty$ $\varphi''(x)$ est constamment positive, le minimum de la somme $\alpha^p + \beta^p + \ldots + \lambda^p$ est donc atteint lorsque $\alpha = \beta \ldots = \lambda$, la somme $\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda = C$ étant constante.

Considérons, par exemple, une équation de degré m assujettie seulement à avoir toutes ses racines réelles et positives et de somme constante : on voit que la somme des

puissances p^{me} de ses racines (où $p \geq 2$) sera minimum si l'équation a toutes racines égales.

Si l'équation était simplement assujettie à avoir ses racines réelles et que l'on prît $p \geq 2$ mais pair, le minimum de la même somme aurait lieu dans les mêmes circonstances.

Considérons encore $\varphi(x) = Lx$; $\varphi' = -\frac{L}{x^2}$. Si a et b ne comprennent pas zéro, le théorème s'applique : et comme

$$L\alpha + L\beta + \ldots + L\lambda = L(\alpha\beta \ldots \lambda)$$

on voit que $\alpha\beta\gamma \ldots \lambda$ sera maximum, lorsque $\alpha = \beta \ldots = \lambda$

NOTE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Par M. **Jouanne**, professeur au Lycée de Caen.

Remarque sur le problème d'agrégation de 1879

(Voir 4e année, page 420.)

Autre discussion de l'équation de la surface S.

L'équation peut s'écrire, en posant :

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} - 1 = H,$$

$$\frac{H}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) - \left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2}\right)^2$$

$$+\left(\frac{H+4}{2}\right)\left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2}\right) - (H+1) = 0.$$

On forme les équations du centre, savoir :

$$\frac{Hx}{a^2} - \frac{2x_0}{a^2}\left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2}\right) + \frac{x_0(H+4)}{2a^2} = 0,$$

$$(1)\quad \frac{Hy}{b^2} - \frac{2y_0}{b^2}\left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2}\right) + \frac{y_0(H+4)}{2b^2} = 0,$$

$$\frac{Hz}{c^2} - \frac{2z_0}{c^2}\left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2}\right) + \frac{z_0(H+4)}{2c^2} = 0.$$

D'abord on reconnaît que pour $H = 0$ les trois équations se réduisent à une seule $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} - 1 = 0,$

et dans ce cas la surface se réduit à deux plans confondus (le plan tangent à l'hyperboloïde au point où se trouve A).

Écartant cette hypothèse on voit que $\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}$ et que le centre se trouve sur la droite qui joint le point A à l'origine, centre de l'hyperboloïde donné.

En joignant à ces équations l'une des équations (1), on trouve pour les coordonnées du centre :

$$x = \frac{x_0(\mathrm{H}+4)}{2(\mathrm{H}+2)} \qquad y = \frac{y_0(\mathrm{H}+4)}{2(\mathrm{H}+2)} \qquad z = \frac{z_0(\mathrm{H}+4)}{2(\mathrm{H}+2)}$$

lorsqu'on a $\mathrm{H}+2=0$ le centre est à l'infini sur la droite et la surface est un paraboloïde elliptique. Supposons $\mathrm{H}+2 \gtrless 0$ et transportons l'origine au centre. Alors l'équation de la surface S devient :

$$(2) \quad \frac{\mathrm{H}}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)-\left(\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-\frac{z_0z}{c^2}\right)^2 + \frac{(\mathrm{H}+1)\,\mathrm{H}^2}{8(\mathrm{H}+2)} = 0.$$

Pour déterminer la nature de la surface, il faut chercher les intersections du diamètre conjugué de

$$(3) \quad \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-\frac{z_0z}{c^2} = 0$$

et la nature de la section faite par ce plan.

Les équations du diamètre conjugué sont

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0};$$

et les points d'intersection de cette ligne et de la surface sont déterminés par l'équation suivante :

$$\frac{z^2}{z_0^2}\left[(\mathrm{H}+1)\frac{\mathrm{H}}{2}-(\mathrm{H}+1)^2\right]+\frac{(\mathrm{H}+1)\,\mathrm{H}^2}{8(\mathrm{H}+2)} = 0. \quad (4)$$

où

$$z^2 = \frac{z_0^2\,\mathrm{H}^2}{4(\mathrm{H}+2)^2}$$

d'où

$$z = \pm\frac{z_0\,\mathrm{H}}{2(\mathrm{H}+2)},$$

valeurs toujours réelles.

L'équation de la projection de la section sur le plan xy, s'obtient en éliminant z entre (2) et (3), ce qui donne :

$$\frac{H}{2}\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{c^2}{z_0^2}\left(\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}\right)^2\right]+\frac{H^2}{8}\frac{(H+1)}{H+2}=0;$$

ou en ordonnant et en tenant compte de la valeur

$$H=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}-1;$$

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{z_0^2}{c^2}-\frac{x_0^2}{a^2}\right)+\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{z_0^2}{c^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right)-\frac{2x_0y_0}{a^2b^2}xy$$
$$+\frac{z_0^2H(H+1)}{c^2H(H+2)}=0. \qquad (5)$$

Le genre de la courbe est donné par le signe de la fonction suivante :

$$\frac{x_0^2y_0^2}{a^2b^2}-\left(\frac{z_0^2}{c^2}-\frac{x_0^2}{a^2}\right)\left(\frac{z_0^2}{c^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right)=\frac{z_0^2}{c^2}(H+1).$$

Alors on voit aisément que cette courbe est du genre hyperbole, si $H+1>0$, parabole pour $H+1=0$, et ellipse pour $H+1<0$. Donc :

1° Si le point A est en dehors du cône $H+1=0$, la surface est un hyperboloïde à une nappe.

2° Si le point A est sur le cône, la surface S est un cône.

3° Si le point A est à l'intérieur du cône $H+1=0$, mais en dehors de l'hyperboloïde à deux nappes $H+2=0$, S est un hyperboloïde à deux nappes.

4° Si le point A est sur l'hyperboloïde $H+2=0$, la surface S est un paraboloïde elliptique.

5° Si le point A est à l'intérieur de l'hyperboloïde $H+2$ la surface S est un ellipsoïde. Il est facile de reconnaître que, dans ce cas, $H+1<0, H+2<0$ et *à fortiori* $H<0$ et alors que l'ellipse (5) est réelle, tandis qu'elle est imaginaire pour $H+2>0$ et $H+1<0$.

6° On a vu que pour $H=0$ la surface est réduite à deux plans confondus.

La troisième partie du problème devient très facile au moyen de cette notation.

L'équation de la surface devient en ordonnant :

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{H}{2}-\frac{x_0^2}{a^2}\right)+\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{H}{2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right)-\frac{z^2}{c^2}\left(\frac{H}{2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)$$
$$+\frac{2y_0z_0}{b^2c^2}yz+2\frac{x_0z_0}{a^2c^2}xz+\frac{2x_0y_0}{a^2b^2}xy+\ldots=0.$$

1° Supposons que x_0, y_0 et z_0 soient différents de zéro ; alors la condition pour que la surface soit de révolution est:

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{H}{2} - \frac{x_0^2}{a^2}\right) + \frac{x_0^2}{a^4} = \frac{1}{b^2}\left(\frac{H}{2} - \frac{y_0^2}{b^2}\right) + \frac{y_0^2}{b^4}$$

$$= - \frac{1}{c^2}\left(\frac{H}{2} + \frac{z_0^2}{c^2}\right) + \frac{z_0^2}{c^4}.$$

Cette condition ne peut être remplie que pour $H = 0$ et alors la surface se réduit à deux plans confondus.

2° Soit $z_0 = 0$.

Alors on a pour condition

$$\left[\frac{1}{a^2}\left(\frac{H}{2} - \frac{x_0^2}{a^2}\right) + \frac{H}{2c^2}\right]\left[\frac{1}{b^2}\left(\frac{H}{2} - \frac{y_0^2}{b^2}\right) + \frac{H}{2c^2}\right]$$

$$= \frac{x_0^2 y_0^2}{a^4 b^4};$$

et en développant et supprimant le facteur commun $\frac{H}{2}$ on a:

$$\frac{H}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) - \frac{x_0^2}{a^4}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

$$- \frac{y_0^2}{b^4}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right) = 0,$$

et si on remplace H par sa valeur

$$\frac{x_0^2}{a^2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) - \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\right]$$

$$+ \frac{y_0^2}{b^2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) - \frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

et enfin

$$\frac{x_0^2}{a^2}\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

$$+ \frac{y_0^2}{b^2}\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right) = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right),$$

ou encore plus simplement :

$$\frac{x_0^2(a^2 - c^2)}{a^2(a^2 + c^2)} + \frac{y_0^2(b^2 - c^2)}{b^2(b^2 + c^2)} = 1.$$

Ellipse dans le cas de $a > b > c$.

On trouverait de même des coniques dans le cas de $y_0 = 0$ ou de $x_0 = 0$.

Savoir : $$\frac{x^2(a^2+b^2)}{a^2(a^2-b^2)} + \frac{z^2}{c^2}\,\frac{(b^2-c^2)}{b^2+c^2} = 1\,;$$
et $$-\frac{y^2}{b^2}\,\frac{(a^2+b^2)}{(a^2-b^2)} + \frac{z^2}{c^2}\,\frac{(a^2-c^2)}{a^2+c^2} = 1\,;$$
il suffit d'une simple permutation circulaire.

QUESTION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Former l'équation du second degré qui admet pour racines les carrés des demi-axes d'une conique représentée par l'équation générale du second degré à deux variables, en coordonnées obliques, à priori, sans passer par les calculs de la réduction. — Applications.

Soit $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ l'équation d'une conique rapportée à des axes de coordonnées dont l'angle est θ.

Supposons que l'on fasse tourner les axes de coordonnées autour de l'origine, sans déplacer celle-ci ; les variables x et y seront remplacées par des fonctions linéaires homogènes des nouvelles coordonnées, de la forme $x = mx' + ny'$, $y = px' + qy'$, et l'on aura identiquement, en vertu de cette transformation :
$$\begin{aligned}&Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F\\ &= A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F.\end{aligned}$$
L'origine n'ayant pas changé, on aura aussi identiquement, pour tout point du plan :
$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta = x'^2 + y'^2 + 2x'y'\cos\theta'\,;$$
car les deux membres de cette égalité sont les deux expressions, dans les deux systèmes de coordonnées, de la même grandeur, qui est le carré de la distance à l'origine du point considéré.

λ désignant un paramètre numérique quelconque, .n aura donc identiquement :
$$\begin{aligned}&Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - \lambda(x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta)\\ &= A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 - \lambda(x'^2 + y'^2 + 2x'y'\cos\theta'),\end{aligned}$$

(x, y) et $(x'y')$ désignant les coordonnées dans les deux systèmes d'un même point de la conique considérée.

Si l'on vient à déterminer λ de manière que le premier membre de cette dernière égalité soit le carré parfait d'une fonction linéaire et homogène $ux + vy$, la transformation de coordonnées sera aussi du second membre, et pour la même valeur de λ, un carré parfait, puisque cette transformation ne sera autre chose que la substitution dans $(ux + vy)^2$, à la place de x et de y, des valeurs $x = mx' + ny'$, $y = px' + qy'$, ce qui fera de $(ux + vy)^2$ un autre carré parfait $(u'x' + v'y')^2$.

Or la première fonction devient un carré parfait pour les valeurs de λ qui annulent son discriminant, c'est-à-dire qui sont racines de l'équation du second degré

$$(A - \lambda)(C - \lambda) - (B - \lambda \cos \theta)^2 = 0$$

ou $$\lambda^2 \sin^2 \theta - \lambda(A + C - 2B \cos \theta) + AC - B^2 = 0.$$

La seconde fonction devient de même un carré parfait pour les valeurs de λ qui sont racines de l'équation analogue

$$\lambda^2 \sin^2 \theta' - \lambda(A' + C' - 2B' \cos \theta') + A'C' - B'^2 = 0.$$

Mais nous avons montré que les valeurs de λ qui rendent les deux fonctions carrés parfaits, sont nécessairement les mêmes ; les deux équations précédentes doivent donc avoir les mêmes racines ; et par conséquent leurs coefficients sont proportionnels. Par suite :

$$\frac{A + C - 2B \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{A' + C' - 2B' \cos \theta'}{\sin^2 \theta'} \qquad (1)$$

et $$\frac{AC - B^2}{\sin^2 \theta} = \frac{A'C' - B'^2}{\sin^2 \theta'} \qquad (2).$$

C'est la traduction de ce fait que l'on exprime quelquefois assez improprement d'ailleurs, en disant que les fonctions ci-dessus sont des invariants de l'équation du second degré. Les relations (1) et (2) ne sont en réalité que des effets d'une cause algébrique dont l'étude ne fait pas encore partie des programmes actuels ; il faut nous borner ici à les considérer comme signifiant que les fonctions $\frac{A + C - 2B \cos \theta}{\sin^2 \theta}$ et $\frac{AC - B^2}{\sin^2 \theta}$ conservent la même valeur dans tous les sys-

tèmes d'axes de coordonnées, et proscrire de la façon la plus absolue tout autre énoncé, qui ne serait pas exact parce que la définition véritable et précise d'un invariant nous fait complètement défaut dans les cours de spéciales.

Il est facile de reconnaître que l'équation

$$\lambda^2 \sin^2 \theta = \lambda(A + C - 2B \cos \theta) + AC - B^2 = 0 \quad (3)$$

est, en géométrie plane, une sorte d'équation en S, c'est-à-dire qu'elle admet pour racines les coefficients des carrés des variables dans l'équation de la conique rapportée à ses axes principaux.

Supposons, en effet, que la transformation de coordonnées effectuée soit telle que les axes nouveaux soient parallèles aux axes principaux de la courbe ; l'équation nouvelle manquera du terme en $x'y'$, et sera de la forme

$$Mx'^2 + Ny'^2 + 2Hx' + 2Ky' + F = 0.$$

Or l'équation (3), dont nous avons vu que les racines sont invariables, se réduit dans ce cas à

$$(M - \lambda)(N - \lambda) = 0. \quad (4)$$

Les racines sont évidemment M et N; donc les racines de l'équation générale (3) sont aussi M et N.

Dès lors, il est facile d'arriver à l'équation aux carrés des demi-axes d'une conique représentée par l'équation générale.

L'équation de cette conique, rapportée à son centre et à ses axes est, en effet :

$$MX^2 + NY^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \quad (5)$$

Δ et δ étant les déterminants connus

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \quad \text{et } \delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}.$$

(On sait, en effet, qu'en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes en un point quelconque du plan, les termes du second degré ne changent pas.)

Or les carrés des demi-axes de la conique (5) sont respectivement en grandeur et en signe

$$-\frac{1}{M}\frac{\Delta}{\delta} \text{ et } -\frac{1}{N}\frac{\Delta}{\delta}.$$

L'équation (3) admet pour racines M et N; donc l'équa-

tion en $-\frac{1}{\lambda}$ admettra pour racines $-\frac{1}{M}$ et $-\frac{1}{N}$. Cette équation est la suivante:

$$\delta\lambda^2 + \lambda(A + C - 2B\cos\theta) + \sin^2\theta = 0,$$

et pour avoir l'équation cherchée, il suffit de multiplier les racines de cette dernière par $\frac{\Delta}{\delta}$, c'est-à-dire de changer λ en $\frac{\delta z}{\Delta}$, ce qui donne:

$$\delta^3 z^2 + \Delta\delta(A + C - 2B\cos\theta)z + \Delta^2\sin^2\theta = 0. \quad (6)$$

Les valeurs de z qui sont les racines de cette équation sont, en grandeur et en signe, les carrés des demi-axes de la conique représentée par l'équation générale.

Application. — 1° *Condition pour que l'équation générale représente une hyperbole équilatère.* — Dans l'hyperbole équilatère, les carrés des demi-axes sont égaux et de signes contraires; la condition est donc

$$A + C - 2B\cos\theta = 0,$$

et dans ce cas $$a^2 = \frac{\Delta\sin\theta}{\delta\sqrt{-\delta}},$$

formule où $-\delta = B^2 - AC$, quantité que l'on sait être positive dans le cas de l'hyperbole.

2° *Aire de l'ellipse.* — L'aire de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est, comme on sait, la projection de l'aire du cercle $x^2 + y^2 = a^2$ sous l'angle dont le cosinus est $\frac{b}{a}$; cette aire est donc $\pi a^2 \times \frac{b}{a}$ ou πab.

Or on a, par l'équation (6):

$$a^2b^2 = \frac{\Delta^2\sin^2\theta}{\delta^3};$$

donc $$ab = \frac{\Delta\sin\theta}{\delta\sqrt{\delta}}$$

$$\text{et } S = \pi\frac{\Delta\sin\theta}{\delta\sqrt{\delta}},$$

formule de la composition de laquelle il est facile de se rendre compte à priori.

Elle doit, en effet, contenir Δ en numérateur; car l'aire doit s'annuler quand l'ellipse se réduit à son centre, c'est-à-dire pour $\Delta = 0$; elle doit contenir un facteur δ à son dénominateur ; car l'aire doit devenir infinie quand l'ellipse se déforme en parabole, c'est-à-dire pour $\delta = 0$; si le facteur Δ est à la puissance 1 au numérateur, le facteur δ doit être à la puissance $\frac{3}{2}$ au dénominateur, puisque Δ est du troisième degré et δ du second degré par rapport aux coefficients de l'équation générale, et que S doit être du degré 0 par rapports à ces mêmes coefficients, cette valeur numérique n'étant qu'un nombre d'unités de surface c'est-à-dire un simple rapport. L'existence du facteur π est nécessitée par le fait que l'aire de l'ellipse doit se réduire à celle du cercle quand les axes sont égaux, et enfin le facteur $\sin\theta$ provient, si l'on veut, de ce que $\frac{S}{\sin\theta}$ doit être indéterminé, c'est-à-dire prendre la forme $\frac{0}{0}$, quand il n'y a plus ni ellipse définie, ni axes de coordonnées (*).

3° *Théorème d'Apollonius.* — Reprenons les relations (1) et (2) :

$$\frac{A + C - 2B\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{A' + C' - 2B'\cos\theta'}{\sin^2\theta'}$$

et

$$\frac{AC - B^2}{\sin^2\theta} = \frac{A'C' - B'^2}{\sin^2\theta'}.$$

Prenons l'ellipse ou l'hyperbole rapportée dans le premier cas, à un système de diamètres conjugués faisant entre eux l'angle θ, et dans le second, aux axes principaux. Leurs équations sont alors :

$$1^\circ \quad \frac{x^2}{a'^2} \pm \frac{y^2}{b'^2} = 1 \qquad \text{et} \qquad 2^\circ \quad \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(*) Cette dernière interprétation nous paraît bien un peu bizarre, mais nous l'indiquons comme nous l'avons vu donner. Il vaudrait mieux la rapporter à la constance d'une autre fonction des coefficients qui est $\frac{\Delta}{\sin\theta}$.

L'application de la première relation donne, en observant que dans les deux cas $B = B' = 0$, et que dans le second

$$\theta = 90^\circ: \qquad \frac{\dfrac{1}{a'^2} \pm \dfrac{1}{b'^2}}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{a^2} \pm \frac{1}{b^2}$$

L'application de la seconde relation donne de même :

$$\frac{1}{a'^2 b'^2 \sin^2 \theta} = \frac{1}{a^2 b^2}$$

d'où immédiatement $\quad ab = a'b' \sin \theta.$

En divisant membre à membre les deux formules précédentes, il vient :

pour l'ellipse : $\qquad a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$

et pour l'hyperbole : $\qquad a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2.$

Ces relations sont précisément les deux théorèmes connus sous le nom de théorèmes d'Apollonius.

CHOIX DE QUESTIONS

PROPOSÉES AUX EXAMENSD'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1880

Algèbre.

Décomposer le polynôme $(x^2 + x + 1)^2 + 1$ en un produit de deux facteurs réels du 2e degré en x.

— Développer en fraction continue la valeur de x qui satisfait à l'équation $10^x = 2$.

— Est-on sûr d'arriver, par le seul emploi du théorème de Rolle, à séparer des racines d'une équation algébrique de degré quelconque ? (abstraction faite de la longueur des calculs.) Appliquer à l'exemple $x^5 + 5x^4 - 3x^3 + 8x + 9 = 0$.

Former une équation dont les racines (y) soient liées à celles de l'équation $f(x) = 0$ par la relation $y = x' + 2x''$, x' et x'' étant deux racines quelconques de l'équation $f(x) = 0$.

— Soit l'équation $2x^4 - 3x^3 + ax^2 + bx + 5 = 0$. Quelle relation doit exister entre a et b pour que deux des racines satisfassent à la relation

$$x' + \frac{2}{x''} = 3 ?$$

— Appliquer le théorème de Rolle à l'équation,

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0,$$

p et q étant deux nombres impairs premiers entre eux, décomposer la fraction $\dfrac{x^{100} + 1}{(x^p - 1)(x^q - 1)}$ en fractions simples.

— Former le polynôme du deuxième degré qui est égal à a pour $x = \alpha$, à b pour $x = \beta$, et à c pour $x = \gamma$.

— Extraire la racine carrée de l'expression $1 + 2\sqrt{-1}$.

— Étudier la série $1 + x \cos \varphi + x^2 \cos 2\varphi + \ldots + x^n \cos n\varphi + \ldots$ Former la somme des n premiers termes.

— Limite de l'expression $\left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3}\right)^m$, quand m croît indéfiniment.

— Montrer que la méthode des groupements ne peut donner pour la limite supérieure des racines positives d'une équation un nombre inférieur à celui que donne la méthode de Newton.

— Parmi tous les cylindres de même surface totale, quel est celui qui a le plus petit volume ?

— Les racines d'une équation $f(x) = 0$ pouvant se partager en groupes tels que la somme de deux des racines de chaque groupe soit égale à une quantité donnée R, comment peut-on abaisser le degré de l'équation $f(x) = 0$?

— Chercher quel est le quadrilatère de périmètre minimum inscrit dans une demi-circonférence.

— Que direde la série

$$1 + \frac{x \cos \theta}{1} + \frac{x^2 \cos 2\theta}{1 \cdot 2} + \frac{x^3 \cos 3\theta}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{x^n \cos n\theta}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} + \ldots$$

Trouver, sans employer les dérivées, vers quelle valeur tendent les deux expressions $\frac{x^m}{m\sqrt{m}}$, $\frac{x^m}{m p}$ quand m augmente indéfiniment. (p est un nombre positif, et x une quantité donnée.)

— Etudier les variations de la fraction

$$y = x + \sin x + \sqrt{x^2 - 1}$$

quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$.

— Appliquer le théorème de Rolle à l'équation

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} - \operatorname{tg} x + 1 = 0.$$

— Quelle est la valeur du déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

lorsque α, β, γ, δ sont des quantités satisfaisant aux relations :

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1$$
$$\gamma^2 + \delta^2 = 1$$
$$\alpha\gamma + \beta\delta = 0.$$

— Étudier les variations de la fraction

$$y = \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{x}.$$

— $F(x)$ et $f(x)$ étant deux équations algébriques, on veut exprimer que les racines de la première sont respectivement égales à celles de la deuxième augmentées chacunes du nombre 2; méthode à suivre.

Géométrie analytique plane.

— Maximum du quadrilatère inscrit dans une ellipse.

— Lieu des points tels que la polaire de chacun d'eux soit normale à l'elllipse.

— Construire la courbe

$$y^2 = \frac{x(x-1)(x-2)}{x+3}.$$

— Construire la courbe représentée par l'équation

$$y^2 = 1 - x\sqrt{x+1}.$$

— Construire la courbe ayant pour équation en coordonnées polaires

$$\rho^2 + \rho \sin\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0.$$

— Construire la courbe dont l'équation est

$$\frac{1}{\rho} = \cos^2 \omega.$$

Trouver les points d'inflexion.

— Recherche des asymptotes de la courbe

$$y = \sqrt[5]{\frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots}{b_0 x^p + b_1 x^{p-1} + \dots}}.$$

— Calculer le paramètre d'une parabole représentée par l'équation générale du second degré à deux variables.

Incidemment, démontrer que les trois quantités

$$\frac{A + C - 2B\cos\theta}{\sin^2\theta}, \quad \frac{\delta}{\sin^2\theta} \text{ et } \frac{\Delta}{\sin^2\theta}$$

sont des invariants.

— On demande de prévoir complètement, *a priori*, la formule

$$\delta = \frac{(Ax + By + C)\sin\theta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}}$$

qui donne la distance d'un point (x, y) à une droite $Ax + By + C = 0$.

— Si une hyperbole a mêmes axes qu'une ellipse donnée, et que l'on joigne à un foyer de l'ellipse les points de rencontre de cette hyperbole avec la directrice de l'ellipse qui correspond au foyer considéré, on a deux tangentes à l'hyperbole. — Ces tangentes sont rectangulaires.

— Former l'équation qui représente le système des deux bissectrices des deux droites représentées par l'équation

$$A(x-\alpha)^2 + 2B(x-\alpha)(y-\beta) + C(y-\beta)^2 = 0.$$

— Trouver les longueurs des axes de la courbe représentée par l'équation

$$x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 2y = 0.$$

— Construire la courbe dont les points ont pour coordonnées

$$x = \frac{1+t}{1-t}, \quad y = \frac{1}{1-t}.$$

— Étant donnés un point $(\alpha\beta)$ et une ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, décrire de ce point comme centre, un cercle tel que deux sécantes communes au cercle et à l'ellipse soient rectangulaires.

— On donne une droite et trois points. Construire la conique passant par les trois points, et ayant pour axe la droite donnée.

— Construire la courbe

$$\rho = \frac{\sin\omega}{1 - 2\cos\omega}.$$

— Discuter l'équation $y^3 + x^5 = 1$ ...
Points remarquables de la courbe qu'elle représente.

— Construire la courbe représentée par l'équation

$$\frac{1}{\rho} = \text{tang}\ \omega\ \sin\ \omega.$$

— Lieu des milieux des cordes parallèles à la direction $y = mx$ dans la courbe $y^2 = x^3$.

— Lieu du sommet de l'angle droit dont les côtés sont normaux à la parabole.

— Lieu des foyers des hyperboles ayant une asymptote et une directrice communes.

— On considère les hyperboles équilatères ayant un sommet réel commun, ainsi qu'un point de l'une des asymptotes. — Trouver l'équation générale de ces courbes et le lieu de leurs foyers.

— Etant donnée la longueur qui représente l'unité linéaire, construire les longueurs définies par les formules

$$x = \sqrt{\frac{3}{7}}, \quad \text{et} \quad x = \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

ÉTUDE SUR LES COORDONNÉES TANGENTIELLES

ET LEURS APPLICATIONS

Par M. E. J. Boquel.

(*Suite*, voir page 80.)

Interprétation géométrique de la projectivité. — Deux figures projectives sont telles que le rapport anharmonique de quatre éléments de l'une est égal au rapport anharmonique des quatre éléments correspondants de l'autre. — En effet, le rapport anharmonique de quatre éléments dans l'une des figures a pour valeur, ainsi que nous l'avons démontré,

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_2}.$$

Les paramètres étant les mêmes pour les éléments correspondants, le rapport précédent est nécessairement le même.

Il suit de là que toutes les propriétés résultant de la conservation du rapport anharmonique appartiennent aux figures projectives; cette simple remarque peut servir de base à la géométrie supérieure, et elle a donné les magnifiques résultats dont les Poncelet, les Steiner, les Chasles ont enrichi la science.

Mais nous ferons observer que leur point de vue, d'ailleurs purement géométrique, est précisément l'inverse de l'étude analytique de la projectivité, et c'est surtout à Clebsch que revient l'honneur d'avoir considéré les figures projectives sous cet aspect nouveau, à la fois original et logique.

Définition de l'homographie. — La relation

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0,$$

en vertu de laquelle à un point d'une base ou à un rayon d'un faisceau correspond un point *unique* d'une autre base ou un rayon *unique* d'un autre faisceau, est ce qu'on nomme une relation *homographique*, et deux séries de points pris sur une même base ou sur des bases différentes et satisfaisant à cette relation s'appellent *divisions homographiques de même base ou de bases différentes*.

Deux séries de points *en projectivité* sont donc *homographiques*, et les divisions homographiques jouissent par conséquent des propriétés des figures projectives, et en particulier de celle qui est la plus importante de toutes, de la conservation du rapport anharmonique.

Il résulte aussi de tout ce qui précède que deux divisions homographiques de même base qui ont trois points correspondants confondus coïncident dans toute leur étendue, c'est-à-dire ne forment qu'une seule et même division.

Il en est de même pour deux faisceaux de même centre dont trois rayons correspondants coïncident.

Nous nous occuperons plus tard des propriétés des figures homographiques, mais toujours au point de vue analytique; car, au point de vue géométrique, elles ont été complètement étudiées par Chasles et Poncelet.

Figures perspectives. — Si l'on considère une division (c.-à-d. une série de points en ligne droite), et un faisceau (c.-à-d. une série de droites passant par un même point), et que l'on suppose la série et le faisceau projectifs, il peut arriver que chaque rayon du faisceau passe par le point qui lui correspond; on dit alors que les deux figures sont *en perspective*.

Or, il est facile de se convaincre que *les séries et les faisceaux*

qui sont projectifs peuvent toujours être amenés en perspective (*). Il suffit, en effet, de déplacer le faisceau tout d'une pièce, de manière à faire passer trois de ses rayons par les trois points correspondants de la série des points. Les autres rayons passeront alors par les points qui leur correspondent respectivement, en vertu des théorèmes démontrés plus haut.

Les figures projectives d'espèces différentes peuvent donc être considérées comme provenant du déplacement de figures perspectives.

Cette remarque peut être étendue aux figures projectives de même espèce.

Nous dirons pour cela que deux divisions projectives sont perspectives quand les lignes qui joignent les points correspondants concourent en un même point, qu'on appelle le *centre de perspective*, et que deux faisceaux projectifs sont perspectifs quand les rayons correspondants se coupent sur une même ligne droite, qu'on appelle *axe de perspective*.

On amènera deux divisions projectives à être en perspective, en déplaçant l'une des divisions, de manière à faire coïncider l'un de ses points avec le point correspondant de l'autre division, et, de même, on amènera deux faisceaux projectifs à être en perspective en déplaçant l'un des faisceaux, de manière à faire coïncider l'un de ses rayons avec le rayon correspondant de l'autre faisceau.

Tous ces résultats, que nous venons d'exposer très sommairement, et par conséquent, les propriétés qui en découlent, sont donc établis directement par l'analyse, et l'on voit qu'en réalité, pour regagner le terrain d'abord conquis par la géométrie pure, il suffit de fournir au calcul des moyens d'investigation plus commodes et plus puissants que les procédés trop restreints dus à l'emploi des seules coordonnées de Descartes. Les coordonnées tangentielles constituent l'un de ces moyens, et leurs principal avantage consiste dans la facilité avec laquelle elles mettent en lumière le principe de dualité.

(*) Clebsch, *Leçons sur la géométrie*, t. I, p. 57 et 58.

De l'équation tangentielle d'une courbe. — Si entre les coordonnées tangentielles u et v de la droite on établit une équation $f(u, v) = 0$, nous avons dit qu'un système de solutions réelles u_1 et v_1 de cette équation définit une tangente d'une certaine courbe qu'on peut regarder comme représentée par la succession continue de ses tangentes, et par l'équation $f(u, v) = 0$, que l'on appellera pour ce motif *l'équation tangentielle* de la courbe considérée.

Si la définition géométrique, ou la construction de la courbe au moyen de quelqu'une de ses propriétés, permet d'établir à priori une relation entre les coordonnées tangentielles u et v de l'une quelconque de ses tangentes, relation s'appliquant à chacune de ces tangentes, et à ces droites seulement, la relation ainsi établie donnera immédiatement l'équation tangentielle de la courbe.

Par exemple, toutes les tangentes d'un cercle jouissant de la propriété d'être équidistantes du centre ; si nous prenons pour axes deux diamètres rectangulaires passant par le centre ; il est clair que l'on a :

$$\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} = l^2$$

en appelant u et v les coordonnées d'une tangente quelconque, et l la longueur comprise entre les axes. Mais on a aussi : $\quad Rl = \frac{1}{uv}$; donc $l = \frac{1}{Ruv}$

et par conséquent entre u et v on aura la relation

$$\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} = \frac{1}{R^2u^2v^2}$$

c'est-à-dire $\quad u^2 + v^2 = \frac{1}{R^2},$

que l'on obtient aussi, immédiatement, en écrivant que la distance de l'origine à la droite $ux + vy - 1 = 0$ est égale à R, quels que soient u et v. Le carré de cette distance est en effet, $\frac{1}{u^2 + v^2}$; on a donc $\frac{1}{u^2 + v^2} = R^2$, d'où $u^2 + v^2$

$$= \frac{1}{R^2}.$$

Cette relation entre u et v est l'équation tangentielle du

cercle, par rapport à deux diamètres rectangulaires passant par son centre, pris pour axes des coordonnées cartésiennes.

BIBLIOGRAPHIE

TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, *par* **M. A. Javary**, *chef des travaux graphiques à l'Ecole Polytechnique, professeur de géométrie descriptive aux lycées Saint-Louis, Louis-le-Grand et au collège Rollin. — Première partie: la ligne droite, le plan et les polyèdres. — Paris, librairie Delagrave.*

L'ouvrage que nous signalons aujourd'hui à nos lecteurs présente une exposition très rigoureuse et très claire des principes fondamentaux et des méthodes employées en géométrie descriptive; cette première partie, étudiée sérieusement, permettra d'apprendre avec facilité la seconde partie du cours, comprenant l'étude des surfaces, la partie la plus importante pour l'entrée à l'Ecole Polytechnique, partie indispensable à bien savoir, si l'on veut suivre avec fruit le cours, si intéressant, fait à l'intérieur de l'école, où la théorie des surfaces est l'objet maintenant d'études approfondies.

Il appartenait à M. Javary, par suite de sa double situation comme chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique et comme professeur pour les classes de mathématiques spéciales, d'écrire une sorte d'introduction au cours de M. Mannheim. Au début de la préface de son cours de Géométrie descriptive, le professeur de l'École dit qu'il est nécessaire de bien posséder les éléments de la science qu'il professe, en commençant la lecture de son ouvrage. C'est pour répondre à cette nécessité que le livre que nous annonçons a été écrit.

Parmi les modifications les plus importantes introduites dans l'étude élémentaire de la géométrie descriptive, nous signalerons l'emploi des changements de plans nettement indiqué dans un certain nombre de problèmes comme procédé d'exécution seulement, et non pas comme moyen de solution. L'auteur a soin de ne pas recommander la méthode des rotations, qui présente le grave inconvénient de compliquer les tracés, et de les superposer à la figure principale; cependant, cette méthode peut être utile dans certains cas; elle est donc étudiée à part.

Indiquons aussi la construction d'un certain nombre de problèmes au moyen d'un seul plan de projection. Ces questions, souvent intéressantes, montrent aux élèves que les deux plans ne sont pas nécessaires toujours et les acheminent à la méthode des projections cotées qui termine le premier volume.

Enfin, signalons des applications de l'intersection des polyèdres à des questions d'ombre et les principes de la perspective cavalière, limités ici à l'étude, par ce mode de représentation, des figures planes et des polyèdres, et qui ramènent les figures à l'apparence qu'on leur donne en général dans l'étude des figures de l'espace; nous aurons indiqué ainsi les parties les plus importantes de cet ouvrage.

Nous pouvons en terminant, dire que jamais lecture d'un livre de Géométrie descriptive ne nous procuré un plus réel plaisir que celui que nous avons

éprouvé en lisant cet ouvrage, dont les figures, cette partie si importante pour un livre de cette nature, sont faites avec un soin tout particulier. Nous espérons que la seconde partie du cours de M. Javary ne se fera pas attendre bien longtemps, et viendra compléter ce traité qui prendra, dès le début, sa place parmi les très bons ouvrages destinés à l'enseignement scientifique en France.

A. M.

QUESTIONS PROPOSÉES

Mathématiques élémentaires.

313. — Si dans un triangle ABC, les côtés a et b sont tels que l'on ait $a = b\sqrt{2}$, démontrer que : 1° la médiane du triangle qui part du sommet A coupe le côté BC sous un angle égal à l'angle A du triangle; 2° que $\cos {}^2A = \cos 2B$.

(de Longchamps.)

314. — On considère un cercle de centre O, et deux diamètres rectangulaires AB, CD. Du point A comme centre, avec AC = AD pour rayon, on décrit un cercle, et l'on prend un point M sur ce cercle. On mène les lignes AM, BM qui rencontrent le cercle O aux points A′ et B′; on mène aussi le rayon OI qui passe par le point M. Démontrer que l'on a : arc CI = arc B′C + arc A′I, *(de Longchamps.)*

315. — On considère un cercle de centre O, et deux diamètres rectangulaires AB, CD dans ce cercle. Dans le demi-cercle ADB, on trace deux rayons rectangulaires OP, OP′; on abaisse des extrémités P et P′ de ces rayons des perpendiculaires PQ, P′Q′ sur le diamètre AB. On forme ainsi deux triangles rectangles OPQ, OP′Q′ dont nous désignerons les centres des cercles inscrits respectivement par ω et ω'. Cela posé, la figure donne lieu aux remarques suivantes, qu'on propose de démontrer :

1° La droite $\omega\omega'$ qui est, pour des raisons évidentes, parallèle au diamètre AB, est égale au rayon du cercle donné;

2° Le lieu géométrique décrit par le point I, centre du cercle circonscrit au triangle $C\omega\omega'$(est un cercle;

3° La droite qui joint les milieux de PP′ et de $\omega\omega'$ est constamment parallèle à CD, et égale à la moitié du rayon;

4° Les droites AP, BP', CI sont concourantes;

5° Les cinq points P, P', ω, ω', O sont sur un même cercle;

6° On a $C\omega'^2 + O\omega^2 = C\omega^2 + O\omega'^2 = 2R^2$;

7° Le milieu de PP' et les points ω, ω', I forment les quatre sommets d'un carré. *(de Longchamps.)*

316. — On donne deux parallèles A, B, et sur la première un point fixe O. Soit C un point quelconque de B. Sur OC comme diamètre, décrivons une circonférence et menons en C la tangente CD, sur laquelle nous prenons CD = CO. Enfin joignons le point D au milieu E de CO. Cette droite rencontre le cercle en deux points I et I' dont on demande le lieu géométrique. *(de Longchamps.)*

Mathématiques spéciales.

317. — Trouver l'enveloppe de la ligne

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = \sqrt[n]{(a\cos n\varphi)}.$$

(Edmunds.)

318. — Résoudre le système

$$x + y = 3\sqrt[3]{x - 1}$$
$$x^3 + y^3 = \frac{2y}{x + y}.$$

(Edmunds.)

319. — 1° On prend sur la tangente à une courbe fixe, à partir du point de contact, une longueur proportionnelle à la normale en ce point. Trouver le lieu de l'extrémité de cette longueur quand la tangente se déplace. — 2° On prend sur la normale à une courbe fixe, à partir du pied de la normale à la courbe, une longueur proportionnelle à la tangente en ce point. Trouver le lieu du point ainsi obtenu quand la normale se déplace. — Application aux coniques et à la cycloïde. *(Julliard.)*

320. — Établir l'identité suivante, qui a lieu pour toutes les valeurs entières et positives de p et de n :

$$n^p - C^1_{p+1}(n-1) + C^2_{p+1}(n-2)^p + \dots + (-1)^p C^p_{p+1}(n-p)^p + (-1)^{p+1}(n-p-1)^p = 0.$$

(de Longchamps.)

321. — Établir, pour des valeurs entières et positives de p et de n, et quel que soit x, l'identité

$$(x - 1)^{p+1} [1^p x + 2^p x^2 + \dots + n^p x^n]$$
$$= \beta_1 x^{n+p+1} + \beta_2 x^{n+p} + \dots + \beta_{p+1} x^{n+1}$$
$$+ \alpha_p x^p + \alpha_{p+1} x^{p-1} + \dots + \alpha_1 x,$$

les coefficients α, β étant indépendants de x, et donnés par les égalités

$$\beta_1 = n^p$$
$$\beta_2 = (n-1)^p - C^1_{p+1} n^p$$
$$\beta_3 = (n-2)^p - C^1_{p+1} (n-1)^p + C^2_{p+1} n^p$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$
$$\beta_{p+1} = (n-p)^p - C^1_{p+1} (n-p+1)^p + \dots + (-1)^p C^p_{p+1} n^p$$
$$\alpha_1 = (-1)^{p+1}. 1^p$$
$$\alpha_2 = (-1)^{p+1}. 2^p + (-1)^p C_{p+1}. 1^p$$
$$\alpha_3 = (-1)^{p+1}. 3^p + (-1)^p C^1_{p+1} 2^p + (-1)^{p-1} C^2_{p+1} 1^p$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$
$$\alpha_p = (-1)^{p+1} p^p + \dots + (-1)^2 C^{p-1}_{p+1}. 1^p.$$

(de Longchamps.)

Le Rédacteur-Gérant,

J. KŒHLER.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 5758-1.

NOTE D'ARITHMÉTIQUE

1. — *Décomposer en facteurs premiers le produit :*

$$1.2.3.4\ldots m$$

Soit a un facteur premier qui entre dans ce produit ; si l'on divise m par a, et que l'on trouve pour partie entière du quotient q, les seuls facteurs divisibles par a seront

$$a,\ 2a,\ 3a,\ 4a\ \ldots\ qa.$$

Par conséquent, en réunissant ces facteurs, nous pourrons mettre en évidence le produit

$$a^q.1.2.3\ldots q.$$

Supposons de même que l'on ait

$$q = aq' + r'.$$

Dans le produit $1.2.3\ldots q$, nous pourrons encore mettre en évidence le produit

$$a^{q'}.1.2.3\ldots q'.$$

Enfin, supposons qu'en divisant q' par a, on ait un quotient q'' inférieur à a ; on mettra en évidence le produit

$$a^{q''}1.2\ 3\ldots q''.$$

Il en résulte que, pour chaque facteur premier, on trouvera facilement la puissance à laquelle il entre dans le produit $1.2.3\ldots m$, d'après la règle suivante :

On divise m par le facteur premier considéré a, on a pour partie entière du quotient q ; on divise q par a, ce qui donne pour partie entière q' ; on divise q' par a, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on trouve un quotient q_n inférieur à a ; la puissance à laquelle le facteur a entre dans le produit est

$$q + q' + q'' + \ldots + q_n.$$

En opérant ainsi pour tous les facteurs premiers qui entrent dans le produit, on décomposera celui-ci en facteurs premiers.

Ainsi, par exemple, prenons le produit

$$1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.$$

Les facteurs premiers qui entrent dans le produit sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17.

On trouve pour le facteur 2, les quotients

$$8,\ 4,\ 2,\ 1\ ;$$

donc 2 entre au produit avec la puissance 15 ; on trouverait pour 3 la puissance 6 ; pour 5 la puissance 3 ; pour 7 la puissance 2, et pour les autres la puissance 1 ; donc on aura pour le résultat de la décomposition du nombre en facteurs premiers $2^{15} \times 3^{6} \times 5^{3} \times 7^{2} \times 11 \times 13 \times 17$

2. — *Décomposer en facteurs premiers le produit*

$$(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)\ \ldots\ (p+m).$$

Je remarque que ce produit est le quotient du produit des $(m+p)$ premiers nombres par le produit des p premiers nombres.

Cela posé, si nous considérons un facteur premier supérieur à p, il est certain qu'il n'entrera pas au dénominateur; nous le retrouverons au quotient avec un exposant égal à celui qu'il a dans le numérateur, exposant que nous obtenons d'après la règle précédente. Si, au contraire, nous prenons un facteur premier b inférieur à p, nous aurons, en appliquant au numérateur et au dénominateur la règle précédente, d'abord

$$m+p = bq_1 + r_1\ ; \qquad p = bq + r,$$

et il est bien certain que l'on a

$$q_1 \geq q.$$

Nous en déduirons donc, en continuant de même, et appelant q_1', q_1'', . . . les quotients successifs pour le numérateur, q', q'' . . . les quotients pour le numérateur

$$q_1' \geq q'\ ; \qquad q''_1 \geq q'' \ldots$$

et, en définitive, en posant d'une part

$$Q_1 = q_1 + q_1' + q_1'' + \ldots$$

d'autre part $Q = q + q' + q'' + \ldots$

Nous trouverons que le facteur b entre au quotient à une puissance égale à $Q_1 - Q$.

En opérant de même pour tous les facteurs premiers inférieurs à p, nous décomposerons en facteurs premiers le produit donné, en mettant en outre tous les facteurs supérieurs à p, pour lesquels nous appliquons la règle donnée dans le premier problème.

EXEMPLE. — *Décomposer en facteurs premiers le produit*

18.19.20.21.22.23.24.25.26.27.28.29.

On a ici : $p = 17$; $p + m = 29$.

Les facteurs premiers sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Les facteurs 19, 23, 29 entreront dans le produit avec l'exposant 1 ; pour les autres, on trouve le tableau suivant

	Q_1	Q	$Q_1 - Q$		Q_1	Q	$Q_1 - Q$
2	25	15	10	11	2	1	1
3	13	6	7	13	2	1	1
5	6	3	3	17	1	1	0
7	4	2	2				

Donc le produit, décomposé en facteurs premiers, donne

$$2^{10} \times 3^7 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 19 \times 23 \times 29.$$

3. **Théorème.** — *Le produit de* p *nombres entiers consécutifs est toujours divisible par le produit des* p *premiers nombres.*

Je puis toujours supposer que le plus petit des nombres qui entrent au numérateur surpasse d'au moins une unité le plus grand facteur du dénominateur ; sans quoi, il y aurait des facteurs communs au numérateur et au dénominateur, que je pourrais supprimer immédiatement, ce qui me ramènerait au cas précédent ; je considère donc la fraction $\dfrac{(m+1)(m+2)(m+3)\ \dots\ (m+p)}{1.2\ \dots\ p}$

dans laquelle je suppose $m \geq p$; il en résulte que l'on a, pour un facteur premier a, en appelant q_1 le quotient de $m+p$ par a, et q le quotient de p par a

$$q_1 \geq 2q$$

de même

$$q'_1 \geq 2q'$$

$$q''_1 \geq 2q''$$

etc., q'_1, q''_1, ... q', q''... ayant la signification que je leur ai donné précédemment. J'en déduis :

$$Q_1 - Q \geq Q.$$

Donc tout facteur premier du dénominateur entre au numérateur avec un exposant au moins égal; par conséquent le numérateur contient tous les facteurs premiers du dénominateur avec des exposants au moins égaux à ceux qu'ils ont dans ce dénominateur; par suite l'expression considérée est un nombre entier.

4. **Théorème.** — *Si l'on a*

$$m \geq \alpha + \beta + \gamma + \delta,$$

l'expression

$$\frac{1.2.3.4 \ldots m}{1.2.3\ldots \alpha \times 1.2.3\ldots \beta \times 1.2.3\ldots \gamma \times 1.2.3\ldots \delta}$$

est un nombre entier.

En effet on peut d'abord supprimer le produit $1.2.3\ldots\alpha$ au numérateur; puis on remarquera que l'expression est le produit des expressions suivantes :

$$\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots\alpha+\beta)}{1.2.3\ldots\beta},$$

$$\frac{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)\ldots(\alpha+\beta+\gamma)}{1.2.3\ldots\gamma},$$

$$\frac{(\alpha+\beta+\gamma+1)\ldots(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}{1.2.3\ldots\delta},$$

et de plus, un produit sous forme entière P s'il y a lieu.

Or, chacune des expressions précédentes est entière, d'après ce que l'on a dit; donc l'expression considérée est un nombre entier.

APPLICATIONS DE LA TRIGONOMÉTRIE

Par M. **Gino-Loria**

(*Suite*, voir page 104.)

II

TÉTRAGONOMÉTRIE, POLYGONOMÉTRIE

13. — (R) *Trouver une expression pour la surface* S *d'un quadrilatère* ABCD *dont on connait deux côtés opposés* b, d *et les angles.*

Les côtés AB, CD se coupent en E. L'aire du triangle ADE est

$$\frac{1}{2}d^2\frac{\sin A \sin D}{\sin(A+D)},$$

et l'aire du triangle BCE est

$$\frac{1}{2}b^2\frac{\sin(\pi-B)\sin(\pi-C)}{\sin[2\pi-(B+C)]}=-\frac{1}{2}b^2\frac{\sin B \sin C}{\sin(B+C)}$$

et comme

$$S = ADE - BCE,$$

on aura

$$S=\frac{d^2 \sin A \sin D}{2\sin(A+D)}+\frac{b^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}$$

Remarque. — On reconnaît aisément que, quoique on ait supposé dans la démonstration que le quadrilatère fût convexe, la formule trouvée est vraie aussi quand il ne l'est pas.

14. — (R) *Étant donnés dans un quadrilatère quelconque les côtés* a, b, c, *et les angles* B, C, *trouver sa surface.*

Les côtés AB, CD du quadrilatère se coupent en E. Comme l'angle E est égal à $\pi-(\pi-B)-(\pi-C)$ ou $B+C-\pi$, le triangle BCE donnera

$$\frac{BC}{\sin(B+C-\pi)}=\frac{CE}{\sin A}=\frac{BE}{\sin C}$$

et on aura donc

$$BE=-\frac{b\sin C}{\sin(B+C)}; \qquad CE=-\frac{b\sin B}{\sin(B+C)};$$

et

$$AE=a-\frac{b\sin C}{\sin(B+C)}; \qquad DE=c-\frac{b\sin B}{\sin(B+C)}.$$

Or on a

$$BCE=\frac{1}{2}\left(\frac{b\sin C}{\sin(B+C)}\right)\left(\frac{b\sin B}{\sin(B+C)}\right)\sin(B+C-\pi)$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{b^2\sin B\sin C}{\sin(B+C)};$$

$$ADE=\frac{1}{2}\left(a-\frac{b\sin C}{\sin(B+C)}\right)\left(c-\frac{b\sin B}{\sin(B+C)}\right)\sin(B+C-\pi)$$
$$=-\frac{1}{2}ac\sin(B+C)+\frac{1}{2}bc\sin C+\frac{1}{2}ab\sin B$$
$$-\frac{1}{2}\frac{b^2\sin B\sin C}{\sin(B+C)},$$

et comme $S = ADE - BCE$,

on aura

$$S = \frac{1}{2}bc \sin C + \frac{1}{2}ab \sin B - \frac{1}{2}ac \sin (B + C).$$

15. — (R) *Le carré de la surface d'un quadrilatère plan quelconque est égal au carré de la surface d'un quadrilatère inscriptible ayant les mêmes côtés, diminué du produit des quatre côtés par le carré du cosinus de la demi-somme de deux angles opposés.*

En égalant les deux expressions du carré de la diagonale BD du quadrilatère, on a

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos C,$$

d'où l'on tire

$$ad \cos A - bc \cos B = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2} \qquad (1)$$

En outre, la surface S du quadrilatère est égale à la somme des aires des deux triangles ABD, BCD, donc on a

$$ad \sin A + bc \sin B = 2S. \qquad (2)$$

Élevons les deux membres de chacune des équations (1) (2) au carré, puis ajoutons les premiers et les seconds membres : il viendra

$$a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd \cos (A + C) = 4S^2 + \left(\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2}\right)^2,$$

ou

$$(ad + bc)^2 - \left(\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2}\right)^2 = 4S^2 + 4abcd \cos^2 \frac{1}{2}(A+C).$$

Le premier membre de cette égalité est le carré du double de la surface Σ du quadrilatère inscriptible dont les côtés sont a, b, c, d : donc

$$S^2 = \Sigma^2 - abcd \cos^2 \frac{1}{2} (A + C)$$

16. — *Étant donné un quadrilatère* ABCD *inscrit dans un cercle* O, *on prolonge les côtés opposés jusqu'à leur rencontre. Soient* E *le point où se coupent* AB *et* CD, F *le point où se coupent* BC *et* DA; *ayant tiré les droites* OD, OE, OF, *on aura*

$$OE \,.\, OF \cos EOF = \overline{OD}^2.$$

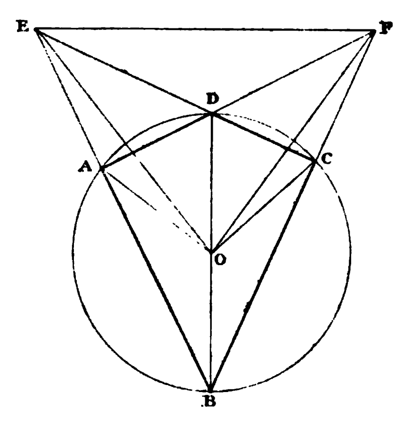
En égalant les deux expressions du carré de EF (*fig. 6*) dé-

duites des deux triangles EOF, EBF on aura :

$$\overline{OE}^2 + \overline{OF}^2 - 2OE . OF \cos EOF = \overline{BE}^2 + \overline{BF}^2 - 2BE . BF \cos B,$$

d'où

$$2OE . OF \cos EOF \qquad (1)$$
$$= \overline{OE}^2 - \overline{BE}^2 + OF^2 - \overline{BF}^2 + 2BE . BF \cos B.$$



Du triangle BCE on tire

$$\frac{b}{\sin(\pi - B - C)} = \frac{BE}{\sin C}$$

et comme $C = \pi - A$ il viendra

$$BE = \frac{b \sin A}{\sin(A - B)}. \qquad (2)$$

De même du triangle ABF on tire

$$BF = \frac{a \sin A}{\sin(A + B)}. \qquad (3)$$

En posant $OAB = OBA = \varphi$; $OBC = OCB = \psi$ les deux triangles ABO, BCO donneront :

$$\cos \varphi = \frac{a}{2R}; \ (4) \qquad \cos \psi = \frac{b}{2R}. \ (5)$$

Les deux triangles OBE, OCF donneront :

$$\overline{OE}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BE}^2 - 2OB . BE \cos \varphi;$$
$$\overline{OF}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BF}^2 - 2OB . BF \cos \psi$$

et, en nous rappelant les équations (2) (3) (4) (5) :

$$\overline{OE}^2 - \overline{BE}^2 = R^2 - \frac{ab \sin A}{\sin(A - B)};$$

$$\overline{OF}^2 - \overline{BF}^2 = R^2 - \frac{ab \sin A}{\sin(A+B)};$$

donc

$$\overline{OE}^2 - \overline{BE}^2 + \overline{OF}^2 - \overline{BF}^2 = 2R^2 \frac{2ab \sin^2 A \cos B}{\sin(A+B)\sin(A-B)}.$$

On tire encore des équations (2) (3) :

$$2BE \,.\, BF \cos B = \frac{2ab \sin^2 A \cos B}{\sin(A+B)\sin(A-B)}.$$

Il viendra donc:

$$\overline{OE}^2 - \overline{BE}^2 + \overline{OF}^2 - \overline{BF}^2 + 2BE \,.\, BF \cos B = 2R^2 \quad (6).$$

Enfin des relations (1) (6) on tire :

$$OE \,.\, OF \cos EOF = R^2 = \overline{OD}^2 \qquad \text{c. q. f. d.}$$

17 (R). — *Si les côtés* AB, BC, CD, DA *d'un quadrilatère inscrit forment une progression géométrique, on aura (si* r *est la raison) :*

$$\frac{tg\,\frac{1}{2}(BCD - ABC)}{tg\,\frac{1}{2}(BCD + ABC)} = \frac{(r^2 - 1)^2}{(r^2 + 1)^2}$$

On connait la relation:

$$\frac{\sin BCD - \sin ABC}{\sin BCD + \sin ABC} = \frac{tg\,\frac{1}{2}(BCD - ABC)}{tg\,\frac{1}{2}(BCD + ABC)}.$$

On aura $\sin ABC = 2 \sin \frac{1}{2} ABC \cos \frac{1}{2} ABC$

$$= \frac{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ab+cd} = \frac{2S}{ab+cd}$$

$$\sin BCD = \frac{2S}{bc+da};$$

donc $$\frac{tg\,\frac{1}{2}(BCD - ABC)}{tg\,\frac{1}{2}(BCD + ABC)} = \frac{ab+cd-bc-da}{ab+cd+bc+da}.$$

Comme les côtés forment une progression géométrique dont r est la raison on aura :

$$b = ar, \quad c = ar^2, \quad d = ar^3$$

et par conséquent,

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (BCD - ABC)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (BCD + ABC)} = \frac{a^2 r + a^2 r^3 - 2a^2 r^2}{a^2 r + a^2 r^3 + 2a^2 r^2}$$

et en supprimant au numérateur et au dénominateur le facteur $a^2 r$, on aura :

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (BCD - ABC)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (BCD + ABC)} = \frac{(r^2 - 1)^2}{(r^2 + 1)^2}.$$

18. — (R) *Dans tout quadrilatère circonscrit les carrés des sinus des moitiés de deux angles opposés sont entre eux dans le rapport inverse des produits des côtés qui les comprennent.*

En égalant les deux expressions du carré de la diagonale AC déduite des triangles ABC, ACD

on a $\quad a^2 + b^2 - 2ab \cos B = c^2 + d^2 - 2cd \cos D,$

ou

$$(a - b)^2 + 2ab (1 - \cos B) = (c - d)^2 + 2cd (1 - \cos D).$$

Comme le quadrilatère est circonscriptible,

on a $$a + c = b + d$$

ou $$a - b = d - c.$$

Par conséquent, l'équation précédente devient

$$4ab \sin^2 \frac{1}{2} B = 4cd \sin^2 \frac{1}{2} D$$

ou $$\frac{\sin^2 \frac{1}{2} B}{\sin^2 \frac{1}{2} D} = \frac{cd}{ab}$$

Remarque. — La relation démontrée est vraie aussi quand le quadrilatère n'est pas convexe; car alors on a (*) :

$$a - c = b - d$$

et $$a - b = c - d,$$

et la démonstration précédente ne subit aucune altération.

(*) *Steiner*, *Journal de Crelle*, XXXII, p. 25.

19. — (R) *Dans tout quadrilatère, la somme des carrés de deux côtés opposés diminuée de la somme des carrés des deux autres côtés est égale au double du produit des diagonales par le cosinus de l'angle compris.*

Si O est l'intersection des diagonales, posons AOB = COD = α.

Les triangles AOB, COD donnent

$$a^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 - 2AO \cdot BO \cos(\pi - \alpha);$$
$$c^2 = \overline{CO}^2 + \overline{DO}^2 - 2CO \cdot DO \cos(\pi - \alpha)$$

donc
$$a^2 + c^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 + \overline{DO}^2 + 2(AO \cdot BO + CO \cdot DO) \cos\alpha$$

de même
$$b^2 + d^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 + \overline{DO}^2 - 2(BO \cdot CO + DO \cdot AO) \cos\alpha.$$

En retranchant la seconde égalité de la première, on a

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2(AO \cdot BO + CO \cdot DO + BO \cdot CO + DO \cdot AO) \cos\alpha,$$
$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2(AO + OC)(BO + OD) \cos\alpha = 2AC \cdot BD \cos\alpha, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Remarque. — La même proposition s'applique à un quadrilatère non convexe; la démonstration en est tout à fait analogue.

20. — (W) *Étant données les cordes* a, b, c *de trois arcs de cercles adjacents* AB, BC, CD, *dont la somme est égale à une demi-circonférence, trouver l'équation qui donne le rayon.*

Soit O le centre de la circonférence, tirons OB, OC et posons
$$AOB = 2\varphi, \; BOC = 2\psi, \; COD = 2\omega.$$

Ces angles sont liés par la relation

$$\varphi + \psi + \omega = \frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

Le triangle isoscèle AOB donne

$$a = 2R \sin\varphi$$

d'où
$$\sin\varphi = \frac{a}{2R}.$$

De même
$$\sin\psi = \frac{b}{2R}; \quad \sin\omega = \frac{c}{2R}.$$

Il s'ensuit que

$$\cos\psi = \frac{\sqrt{4R^2 - b^2}}{2R}; \quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R}.$$

Or, de l'équation (1),

il vient : $\cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi = \sin\omega$;

donc, $\dfrac{\sqrt{(4R^2 - b^2)(4R^2 - a^2)}}{4R^2} - \dfrac{ab}{4R^2} = \dfrac{c}{2R}.$

En élevant au carré après avoir isolé le radical, on aura :

$$16R^4 - 4(a^2 + b^2)R^2 + a^2b^2 = 4c^2R^2 + 4abcR + a^2b^2$$

et supprimant le facteur commun $4R$, on a enfin

$$4R^3 - (a^2 + b^2 + c^2)R - abc = 0,$$

qui est l'équation cherchée.

(A suivre.)

QUESTIONS D'EXAMEN

Si dans un tétraèdre deux arêtes opposées AC, BD *sont perpendiculaires entre elles, on aura*

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2,$$

et réciproquement. (Le lecteur est prié de faire la figure.)

L'arête BD étant perpendiculaire à AC, on peut, par BD, mener un plan perpendiculaire à AC ; ce plan coupera AC en un point I, tel que IB et ID sont perpendiculaires à AC.

On aura par suite

$$BC^2 - AB^2 = CI^2 - AI^2$$
$$DC^2 - DA^2 = CI^2 - AI^2.$$

On en tirera facilement en égalant les premiers membres.

$$BC^2 + DA^2 = AB^2 + DC^2.$$

Réciproquement, de cette égalité on tire

$$BC^2 - AB^2 = DC^2 - DA^2.$$

Si, du point B on abaisse une perpendiculaire sur AC, elle coupera AC en un point I, tel que l'on aura

$$BC^2 - AB^2 = CI^2 - AI^2.$$

Donc, en vertu de l'égalité supposée, on aura

$$DC^2 - DA^2 = CI^2 - AI^2,$$

c'est-à-dire que la perpendiculaire menée du point D sur AC tombera au même point I. Par suite, BD sera dans un plan perpendiculaire à AC ; les deux arêtes opposées sont donc rectangulaires.

Corollaire. — *Si* AC *est perpendiculaire à* BD *et que* AB *soit perpendiculaire à* CD, AD *est aussi perpendiculaire à* BC.

En effet, on a, d'après la première hypothèse.

$$AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2.$$

Puis, d'après la seconde hypothèse, on a

$$AD^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2.$$

Donc, on aura

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2,$$

ce qui nous montre que AD et BC sont perpendiculaires.

Démontrer élémentairement que l'on a

$$x - \sin x < \frac{x^3}{6}.$$

La formule qui donne sin $3a$ est

$$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a.$$

elle devient en remplaçant a par $\frac{x}{3}$

$$\sin x = 3 \sin \frac{x}{3} - 4 \sin^3 \frac{x}{3},$$

ce qui donne, puisque l'arc est plus grand que le sinus,

$$4\left(\frac{x}{3}\right)^3 > 3 \sin \frac{x}{3} - \sin x.$$

On aura de même, en remplaçant x par $\frac{x}{3}$ et multipliant les deux membres de l'inégalité par 3,

$$4 \cdot 3\left(\frac{x}{3^2}\right)^3 > 3^2 \sin \frac{x}{3^2} - 3 \sin \frac{x}{3},$$

puis de même

$$4 \cdot 3^2\left(\frac{x}{3^3}\right)^3 > 3^3 \sin \frac{x}{3^3} - 3^2 \sin \frac{x}{3^2},$$

$$4 \cdot 3^3\left(\frac{x}{3^4}\right)^3 > 3^4 \sin \frac{x}{3^4} - 3^3 \sin \frac{x}{3^3},$$

. . . .

. . . .

$$4 \cdot 3^{n-}\left(\frac{x}{3^n}\right)^3 > 3^n \sin\frac{x}{3^n} - 3^{n-1}\sin\frac{x}{3^{n-1}}.$$

Ajoutons ces inégalités membre à membre, en supposant n infini. Le premier membre est la somme des termes d'une progression géométrique dont le premier terme est $4\left(\frac{x}{3}\right)^3$, et la raison $\frac{1}{3^2}$. On a donc pour ce premier membre, tout calcul fait,

$$\frac{x^3}{6}.$$

Le second membre devient

$$3^n \sin\frac{x}{3^n} - \sin x.$$

Le premier terme peut s'écrire

$$x \sin\frac{x}{3^n} : \frac{x}{3^n};$$

il se réduit donc à x; et on a bien

$$\frac{x^3}{6} > x - \sin x,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Problème. — *Trouver élémentairement le minimum de*

$$x^p + \frac{1}{x^q}.$$

Lemme. — Lorsque l'on a $m > n$ et $x - y = a$, l'expression $\frac{x^m}{y^n}$ passe par un minimum pour $\frac{x}{m} = \frac{y}{n}$.

En effet l'inverse de cette expression, ou $\frac{y^n}{x^m}$, peut s'écrire, en posant $m = n + p$,

$$\left(\frac{x-a}{x}\right)^n \times \frac{1}{x^p},$$

ou

$$a^n\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x}\right)^n \times \frac{1}{x^p}.$$

Cette quantité est un produit de puissances de facteurs dont la somme est constante; donc on aura un maximum

quand on aura $$\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x}}{n}=\frac{\frac{1}{x}}{p}$$

ou $$\frac{x-a}{an}=\frac{1}{p},$$

ou enfin $$\frac{y}{n}=\frac{a}{p}=\frac{a+y}{n+p}=\frac{x}{m}.$$

Par conséquent, pour les mêmes valeurs de x et y, la fraction proposée passera par un minimum.

Ce lemme établi, remarquons que la quantité proposée peut s'écrire: $$\frac{x^m+1}{x^q},$$

en posant $m=p+q$.

Élevons le tout à la puissance m, et remarquons que l'on a $(x^q)^m=(x^m)^q$.

Nous avons à chercher le minimum de l'expression
$$\frac{(x^m+1)^m}{(x^m)^q}.$$

Ce minimum a lieu, d'après le lemme précédent, lorsque l'on a: $$\frac{x^m+1}{m}=\frac{x^m}{q}=\frac{1}{p}.$$

On en tire: $$x^m=\frac{q}{p}.$$

QUESTION 277

Solution par M. Andrieux, élève au Lycée Corneille, Rouen.

Deux circonférences roulent sur une ligne droite AB, *une troisième circonférence de même rayon que les deux autres leur est constamment tangente; pour quelle position des trois circonférences l'aire du pentagone ayant pour sommets les trois centres et les deux points de contact sera-t-elle maxima?*

Soient E et D les deux circonférences qui roulent sur la

droite AB, et O la troisième circonférence qui leur est constamment tangente et qui a même rayon. On peut supposer une des deux premières fixe et les deux autres mobiles. Soit ACDOE, le pentagone maximum. Soient AC $=$ ED $= x$, OH $= y$ la perpendiculaire abaissée de O sur ED. La surface du pentagone est :

$$\frac{xy}{2} + Rx \text{ ou } \frac{x}{2}(2R + y).$$

Puisque les trois circonférences ont même rayon, OE $=$ OD et le triangle EOD est isoscèle ; alors

$$\overline{OE}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{GH}^2,$$

ou

$$4R^2 = y^2 + \frac{x^2}{4};$$

d'où

$$\frac{x}{2} = \sqrt{4R^2 - y^2},$$

et l'expression de la surface devient

$$\sqrt{4R^2 - y^2}\,(2R + y),$$

Expression qui sera maximum en même temps que

$$(2R + y)^3\,(2R - y).$$

Ce produit de deux facteurs dont la somme est constante sera maximum quand

$$\frac{2R + y}{3} = 2R - y;$$

d'où

$$y = R.$$

Donc le maximum a lieu lorque la circonférence O est tangente à la ligne des centres des deux premières. Si $y = R$, $x = 2R\sqrt{3}$, c'est-à-dire est le double du côté du triangle équilatéral inscrit. De là une construction facile, et la surface maxima est $3R^2\sqrt{3}$, c'est-à-dire équivalente à la surface du triangle équilatéral circonscrit que l'on obtient sur la figure en menant AK et CL qui, prolongées, se coupent en I à l'extrémité du diamètre OI.

NOTA : Ont résolu la même question : MM. Perrier, à Lons-le-Saulnier; Chrétien, au Havre; H. Bourget, à Aix; Harel, école Albert-le-Grand, (Arcueil); Hamon, au Mans; Daguillon, Lapareillé, lycée Henri IV; Gobert, au collège Chaptal; Latallerie, à Saint-Dier (Puy-de-Dôme); Tinel, à Rouen. Callon Marit, lycée Louis-le-Grand; Capelle, Davoine, Tison, Morchipont, à Tourcoing.

QUESTION 270

Solution par M. A. JOLY, élève au Lycée de Tarbes.

Résoudre un triangle connaissant un côté, l'angle opposé et le produit d'un des côtés inconnus par la somme ou la différence de ces deux côtés.

Données a, A, $b(b+c)=m^2$.

De la relation $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

on tire $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}=\frac{b}{\sin B}$$

d'où $b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}$, $b+c=\dfrac{2a\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\sin A}$.

Par suite, en multipliant ces deux égalités membre à membre :
$$m^2=\frac{2a^2\cos\frac{A}{2}\sin B\cos\frac{B-C}{2}}{\sin^2 A}$$
$$=\frac{a^2\cos\frac{A}{2}\left[\sin\frac{3B-C}{2}+\cos\frac{A}{2}\right]}{\sin^2 A},$$
expression qui peut s'écrire
$$4m^2\sin^2\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=a^2\sin\frac{3B-C}{2}+a^2\cos\frac{A}{2}.$$
On en déduit
$$\sin\frac{3B-C}{2}=\frac{\cos\frac{A}{2}\left[4m^2\sin^2\frac{A}{2}-a^2\right]}{a^2}.$$
Pour que l'on puisse accepter cette valeur il faut qu'elle vérifie les inégalités
$$-1<\frac{\cos\frac{A}{2}\left[4m^2\sin^2\frac{A}{2}-a^2\right]}{a^2}<1,$$

qui se réduisent aux deux suivantes :

$$\cos\frac{A}{2} > 0, \quad m^2 < \frac{a^2}{8\sin^2\frac{A}{u}\cos\frac{A}{2}}.$$

La première est toujours vraie.

Si ces conditions sont remplies, on obtiendra au moyen des tables deux angles β et β', supplémentaires l'un de l'autre, pour $3B - C$. On aura donc le système suivant

$$B + C = \alpha$$
$$3B - C = \beta \quad \text{ou } 3B - C = \beta' ;$$

on en conclut

$$B = \frac{\alpha + \beta}{4} \qquad C = \frac{3\alpha - \beta}{4}$$
$$B_1 = \frac{\alpha + \beta'}{4} \qquad C_1 = \frac{3\alpha' - \beta'}{4},$$

au moyen des relations (A) on calculera b, b', c, c' et par suite S.

Si au lieu de prendre $b(b + c) = m^2$ on avait posé $b(b - c) = m^2$, $c(b + c) = m^2$, $c(b - c) = m^2$ la marche à suivre pour résoudre le problème eût été la même.

NOTA. — MM. Collod, de Bellay, Dupuy de Grenoble ont résolu la même question.

QUESTION 282

Solution par M. ANDRIEUX, élève au lycée de Rouen.

Résoudre un triangle dont on donne un élément linéaire (côté, bissectrice...) sachant en outre :

1° Que le rapport du carré de chacune des hauteurs au rectangle des segments qu'elle détermine sur la base correspondante est exprimé par un nombre entier ;

2° Que le produit des trois hauteurs est un multiple du produit des trois segments non consécutifs déterminés par ces hauteurs sur les côtés opposés. (Geoffroy.)

D'après les conditions de l'énoncé on a :

$$\frac{h^2}{BD \cdot DC} = m.$$

$$h \,.\, h' \,.\, h'' = n \,.\, BD \,.\, CG \,.\, AE.$$

Or $\qquad BD = c \cos B, \qquad CD = b \cos C \ldots.$

on a donc : $$\frac{h^2}{bc \cos B \cos C} = m. \qquad (1)$$

$$hh'h'' = nabc \cos A \cos B \cos C \qquad (2)$$

de cette dernière relation on tire :

$$bc \cos B \cos C = \frac{hh'h''}{na \cos A}$$

ou en substituant dans (1) il vient :

$$\frac{na \cos A}{h'h''} = m. \qquad (3)$$

Or $\qquad ah = bh' = ch'',$

dès lors $\qquad a^2h^2 = bch'h''$

d'où $\qquad h'h'' = \frac{a^2h^2}{bc}.$

Substituant dans (3) il vient :

$$\frac{nbc \cos A}{ah} = m.$$

or $\qquad h = c \sin B,$

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$

dès lors $\qquad \frac{na \sin B \cos A}{a \sin A \sin B} = m.$

par suite, $\qquad \operatorname{tg} A = \frac{n}{m}$

De plus $\qquad h = c \sin B,$

$$h' = a \sin C,$$

$$h'' = b \sin A.$$

Donc $\qquad h.h'.h'' = abc \sin A \sin B \sin C.$

Comparant cette relation à l'égalité (2) on voit que :

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = n$$

et comme $\qquad A + B + C = 180^\circ$

on a en outre

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = n.$$

d'où $\qquad \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = n - \frac{n}{m}$

et $\qquad \operatorname{tg} B \,.\, \operatorname{tg} C = m.$

On peut dès lors calculer les trois angles. Car tg B et tg C sont racines de l'équation :

$$X^2 - \left(n - \frac{n}{m}\right)X + m = 0. \qquad (4)$$

Pour que tg B et tg C soient réelles, on doit avoir :

$$\frac{\left(n - \frac{n}{m}\right)^2}{4} - m > 0$$

ou

$$n > \frac{2m\sqrt{m}}{m - 1}.$$

Si cette condition est remplie, tg B et tg C seront positives, car la somme des racines de (4) est positive, les nombres n et m étant entiers.

Connaissant les angles du triangle on le résoudra facilement, puisqu'on donne un de ses éléments linéaires. On est ramené à un des problèmes connus.

ÉCOLE FORESTIÈRE

CONCOURS DE 1880

Mathématiques.

Définir le maximum et le minimum d'une quantité dont la grandeur dépend d'une seule variable. Exposer la théorie des questions de maximum et de minimum qui dépendent du second degré, et appliquer cette théorie aux trois exemples suivants de fonctions dont la variable est x :

1° $\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 1}$

2° $x - 1 + \sqrt{x + 1}$

3° $x^m (a - x)^n$,

m et n étant entiers et positifs.

Trigonométrie.

Dans un quadrilatère ABCD, le côté AB a une longueur de 6 toises, et le côté BC une longueur de 8 toises. Les arcs qui mesurent les angles A, B, C de ce polygone ont des longueurs dont les rapports avec leur rayon valent respectivement :

1,11724695
1,85247334
1,48997357.

On demande de calculer en mètres, avec 7 figures, la distance du centre de gravité du quadrilatère à la diagonale BD.

SUR LA SURFACE DU TRIANGLE POLAIRE
D'UN TRIANGLE DONNÉ

Par M. **Ibach**, étudiant à la Faculté des sciences de Marseille.

1. — *Trouver une expression de la surface d'un triangle dont on donne les équations des côtés.*

Soient x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3 les sommets du triangle

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = 0,$$

dont la surface est S.

On a
$$2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

En portant dans cette équation les valeurs de x_1y_1 ... tirées des équations des côtés combinées deux à deux, j'obtiens

$$(a_1b_2)(a_2b_3)(a_3b_1)\ .\ 2S = \begin{vmatrix} (b_1c_2) & (c_1a_2) & (a_1b_2) \\ (b_2c_3) & (c_2a_3) & (a_2b_3) \\ (b_3c_1) & (c_3a_1) & (a_3b_1) \end{vmatrix}.$$

Le deuxième membre n'est autre que le réciproque du déterminant D des équations des côtés.

On a donc
$$2S = \frac{D^2}{(a_1b_2)(a_2b_3)(a_3b_1)} \qquad (1)$$

2. — Par un calcul analogue au précédent on trouverait que le volume du tétraèdre déterminé par les quatre équations des faces étant V, on aurait

$$6V = \frac{D^3}{P}$$

P étant le produit des mineurs correspondant à la dernière colonne.

3. — *Trouver une expression de la surface du triangle polaire d'un triangle donné.*

Soient $(x_1y_1z_1)(x_2y_2z_2)(x_3y_3z_3)$ les coordonnées des sommets du premier triangle dont la surface est S, Σ la surface du triangle polaire, $U = 0$ l'équation de la conique auxiliaire.

Les équations des côtés du triangle polaire sont:

$$x\frac{dU}{dx_1} + y\frac{dU}{dy_1} + z\frac{dU}{dz_1} = 0.$$

$$x\frac{dU}{dx_2} + y\frac{dU}{dy_2} + z\frac{dU}{dz_2} = 0.$$

$$x\frac{dU}{dx_3} + y\frac{dU}{dy_3} + z\frac{dU}{dz_3} = 0.$$

J'applique à ces équations la formule obtenue (Probl. I).

$$2\Sigma = \frac{\begin{vmatrix} \frac{dU}{dx_1} & \frac{dU}{dy_1} & \frac{dU}{dz_1} \\ \frac{dU}{dx_2} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}^2}{P}$$

P étant encore le produit des mineurs correspondant a la dernière colonne. Soit:

$$U = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0$$

en remplaçant les symboles par leurs valeurs :

$$2\Sigma = \frac{\begin{vmatrix} Ax_1 + By_1 + Dz_1 & Bx_1 + Cy_1 + Ez_1 & Dx_1 + Ey_1 + Fz_1 \\ Ax_2 + By_2 + \ldots & Bx_2 \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}^2}{P}$$

Je considère en outre les égalités

$$2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

et le discriminant Δ de U

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

En faisant le produit de ces deux déterminants j'obtiens précisément le numérateur de la valeur précédente de

2Σ. Cette valeur est donc :

$$2\Sigma = \frac{4S^2\Delta^2}{P}$$

ou

$$\Sigma = \frac{2S^2\Delta^2}{P} \qquad (2)$$

forme que l'on pouvait obtenir *a priori*.

Remarque I. — La formule précédente donnant la surface du triangle polaire d'un triangle, permettra de même d'obtenir la surface du polygone polaire d'un polygone quelconque.

Remarque II. — La formule précédente permettra aussi de donner la surface d'un triangle inscrit ou circonscrit à une conique.

Remarque III. — Lorsque le premier triangle est autopolaire par rapport à U, $S = \Sigma$, on a donc :

$$S = \frac{D}{2\Delta^2}$$

en désignant par D la valeur de P transformée.

4. — En faisant un calcul analogue au précédent, on trouverait de même une expression du volume du tétraèdre polaire d'un tétraèdre donné par rapport à une quadrique U.

Si Θ est ce volume :

$$\Theta = \frac{24V^3\Delta^3}{P} \qquad (3)$$

P étant le produit des déterminants :

$$\left\| \begin{matrix} \frac{dU}{dx_1} & \frac{dU}{dy_1} & \frac{dU}{dz_1} \\ \frac{dU}{dx_2} & \frac{dU}{dy_2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} \right\|$$

On fera au sujet de cette formule des remarques analogues à celles faites sur la formule (2). En particulier, la surface d'un tétraèdre autopolaire sera de la forme :

$$\frac{P}{24 \cdot \Delta^3} = V^2.$$

3. — Sur l'expression (2) on peut trouver un certain nombre de théorèmes relatifs au rapport des surfaces S et Σ. Je me contenterai d'indiquer le suivant :

Théorème. — *Si une conique pivote autour de son centre et que le discriminant de la partie du second degré de son équation reste constamment égal au carré du terme constant, les triangles polaires d'un triangle donné ont une surface constante.*

Je cherche la forme du produit P de mineurs, c'est le produit des mineurs

$$\begin{vmatrix} Ax_1 + By_1 + Dz_1 & Bx_1 + Cy_1 + Ez_1 \\ Ax_2 + \ldots & Bx_2 + Cy_2 \ldots \\ Ax_3 \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

La forme de chacun de ces mineurs est

$(AC - B^2)(x_2y_1) + (AE - BD)(x_1z_2) + (CD - BE)(z_1y_2) \ldots$

Si on suppose que la conique est rapportée à son centre, D et E sont nuls et le produit P devient

$$(AC - B^2)^3(x_1y_2)(x_2y_3)(x_3y_1).$$

L'expression (2) devient donc

$$\Sigma = \frac{2S^2\Delta^2}{(x_1y_2)(x_2y_3)\ \ldots\ (AC - B^2)^3}$$

or, dans ce cas $\qquad \Delta = F(AC - B^2)$

donc $\qquad \Sigma = \dfrac{2S^2F^2}{(x_1y_2)\ \ldots\ (AC - B^2)}$;

mais si $\qquad AC - B^2 = F^2$

$$\Sigma = \frac{2S^2}{(x_1y_2)\cdot(x_2y_3)(x_3y_1)}$$

et le théorème est démontré.

Remarque. — Si B = o, la conique est rapportée à un système de diamètres conjugués. Soit donc a et b les abscisses et les coordonnées des points de rencontre

$$Ax^2 + Cy^2 + F^2 = o$$

avec les axes $\qquad a^2 = \dfrac{F^2}{A} \qquad b^2 = \dfrac{F^2}{C}$

d'où $\qquad a^2b^2 = \dfrac{F^4}{AC}$;

et comme $AC = F^2$, $a^2b^2 = F^2$, $ab = \pm F$

d'où l'on déduit que ;

Lorsqu'une conique est constamment rapportée à un système de diamètres conjugués et que le produit des longueurs des demi-axes est constant, la surface du triangle polaire d'un triangle donné est constante.

On pourrait faire sur la formule (3) des remarques analogues.

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Par M. **Haure,** élève au Lycée Louis-le-Grand.

On donne deux coniques C_1 C_2, *et on prend les polaires* P_1 P_2 *d'un point* p *de leur plan. Elles se coupent en* P. *Lieu des points* P *quand* p *décrit une courbe du plan.*

Considérons le faisceau de coniques passant par les points (C_1, C_2). On sait que :

Le triangle formé par les centres des sécantes communes est autopolaire commun à toutes les coniques du faisceau.

Les polaires d'un point quelconque, relatives à ces coniques, passent par un même point qui est dit le conjugué de l'autre. (Chasles, *Sect. con.* 308.)

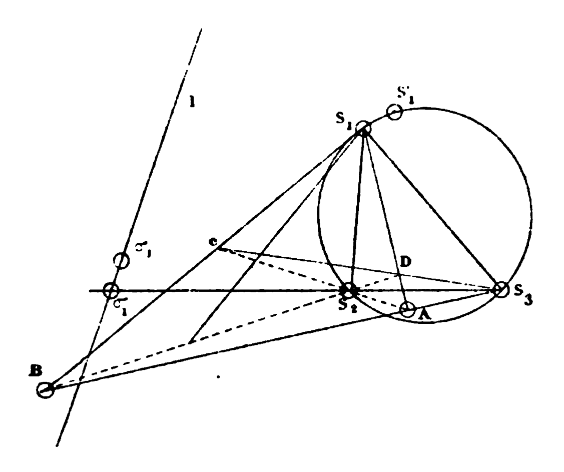
Si un point p décrit une droite l, son conjugué P décrit une conique. — Cette courbe est aussi le lieu des pôles de la droite l relatifs aux coniques. — Elle est circonscrite au triangle autopolaire commun. (Chasles, *loc. cit.* 309).

Remarquons que la tangente au sommet S_1 du triangle autopolaire est la polaire du point σ_1, où la droite l rencontre le côté S_2 S_3, par rapport à l'angle (AS_1B).

En effet, considérons le point σ'_1 infiniment voisin de σ_1 sur l; son conjugué S'_1 est infiniment voisin de S_1 sur la conique et la polaire de σ'_1 par rapport à l'angle (AS_1B) qui fait partie du faisceau sera la droite $S_1S'_1$. Donc à la limite, la polaire de σ_1 est tangente en S_1 à la conique.

Cela posé, remarquons que le problème proposé revient à chercher le lieu du conjugué P, du point p quand ce dernier

décrit une courbe. Le problème a été résolu dans le cas de la droite. Nous avons vu que le lieu de P est une conique. Nous dirons que la droite et la conique sont correspondantes.



I. — Cela posé, supposons que le point p décrive une courbe σ d'ordre m. Le point P décrira une courbe Σ que je coupe par une conique circonscrite au triangle autopolaire commun. A cette conique L correspond une droite l et une seule ; en effet, prenons deux points P_1, P_2 sur la conique et déterminons leurs conjugués p_1, p_2. La droite $p_1\ p_2$ est déterminée et sa conique correspondante, passant par (S_1, S_2, S_3, P_1, P_2), coïncidera avec la conique L. Cette droite que je désigne par l, rencontre le lieu des points p en m points, auxquels correspondent sur la conique m points de la courbe Σ. La droite $S_2\ S_3$ coupe la courbe σ en m points qui ont pour conjugué le point S_1. Donc les points $S_1\ S_2\ S_3$ appartiennent à Σ avec le degré m de multiplicité. Donc la conique rencontre la courbe Σ en $m + 3m = 4m$ points. Donc la courbe Σ est d'ordre $2m$.

II. *Tangente en un point.* — Soit l une sécante rencontrant la courbe σ en deux points voisins p et p'. Soient leurs conjugués P, P', ils se trouvent à l'intersection de Σ et de la conique correspondante. Faisons tourner la sécante l autour

de p, de manière que le point p' vienne en p. La conique se déformera en restant circonscrite au quadrilatère (S_1, S_2, S_3, P) jusqu'à ce que P' vienne en P. La conique devient tangente au point P à Σ et correspond à la tangente en p à σ. On peut donc construire la tangente en P à Σ.

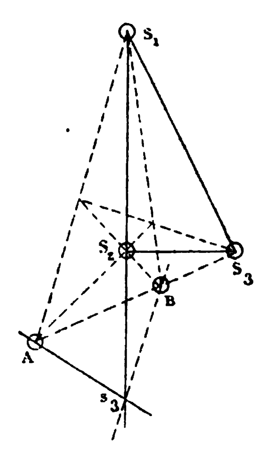
Si la tangente en p a un contact d'ordre μ avec σ, la conique correspondante aura un contact d'ordre μ avec la courbe Σ.

Un point de degré r de multiplicité dans σ possède r tangentes, auxquelles correspondent dans Σ, r coniques passant par le conjugué du point multiple. Ce point a dès lors r tangentes et est du degré r de multiplicité. Remarquons que les points A, B, C, D, d'intersection, de C_1 et de C_2 sont à eux-mêmes leurs conjugués; s'ils appartiennent à la courbe σ, ils appartiendront aussi à Σ avec le même degré de multiplicité.

Cherchons les tangentes en ces points.

Prenons le point A, par exemple, et cherchons la tangente en ce point à la conique correspondant à une tangente As_3 à la courbe σ.

Considérons les points A et s_3; la conique est le lieu des intersections de leurs polaires qui passent toutes par les points A et S_2. Considérons la droite S_2A comme appartenant au faisceau S_1 et cherchons le rayon homologue dans le faisceau A. S_2A est la polaire de s_2 par rapport à une certaine conique du faisceau. Cette conique passant par les points A et B est tangente à s_2 A, s_2 B. Par rapport à cette conique la polaire de A est la droite AT.



C'est le rayon homologue de S_2A et par conséquent la tangente cherchée. Il en résulte que si Σ et σ passent par les points (A, B, C, D), elles sont tangentes en ces points.

On verrait facilement que les tangentes en S_1 S_2 S_3 sont

les polaires des points où σ rencontre les côtés opposés du triangle autopolaire.

Cas de décomposition. — Si la courbe σ est irréductible et ne passe pas par un point S, la courbe Σ est irréductible. Si la courbe σ passe r fois par S_1, pour chaque point S_1, le conjugué est indéterminé sur $S_2 S_3$.

Donc S_2S_3 fait r fois partie de Σ. Si σ passe r fois par S_1, S_2, S_3, Σ se décompose en r fois chaque côté du triangle et une courbe de degré $2m - 3r$.

Faisons en particulier $r = \frac{m}{3}$. Le degré est $2m - m = m$.

Donc une cubique circonscrite au triangle autopolaire se transforme en une autre cubique. Si en outre elle passe par les points ABCD, sa transformée aura avec elle sept points communs et mêmes tangentes en quatre de ces points. Donc, en général ces deux courbes coïncideront. Cette cubique sera donc une sorte d'anallagmatique dans la transformation que nous étudions. Telle est entre autres la cubique lieu des points de contact des tangentes issues d'un point fixe, aux coniques du faisceau.

III. *Asymptotes.* — Les points à l'infini de la courbe Σ correspondent aux points communs à σ et au lieu des centres de coniques. Ce lieu est une conique dite des neuf points. On construira l'asymptote comme la tangente en un point. Remarquons que la tangente au point considéré de σ rencontre la conique des neuf points en un second point qui donne l'autre asymptote de la conique correspondante.

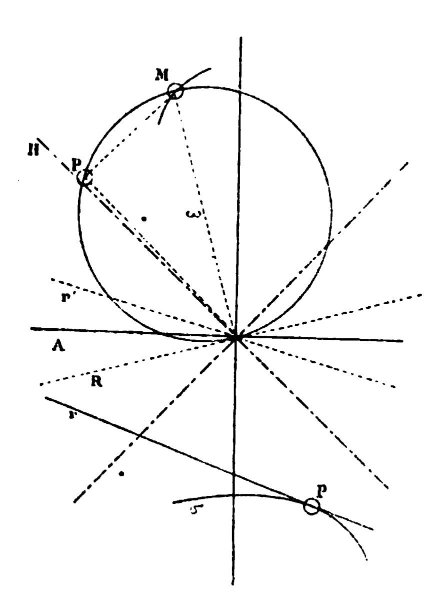
Donc si σ est tangente à la conique des neuf points, les deux asymptotes de la conique correspondante à la tangente à σ sont confondues. La conique est une parabole et Σ a une branche parabolique.

On peut avoir directement la direction asymptotique. Considérons la tangente à la conique des neuf points, au point où elle rencontre la courbe σ. Cette tangente est la polaire du point conjugué à l'infini par rapport à une conique du faisceau. Elle passe donc par le centre de la conique.

Cette conique a donc son centre au point considéré, et la direction asymptotique est le diamètre conjugué de la tangente par rapport à cette même conique.

Application. — Considérons deux hyperboles équilatères concentriques. Toutes les coniques passant par leurs points d'intersection sont concentriques, puisque la droite de l'infini fait partie du triangle autopolaire commun. De plus ce sont des hyperboles équilatères. En effet ces coniques déterminent une involution sur la droite de l'infini, et le faisceau des asymptotes ayant pour base cette division est involutif. Il a deux couples de rayons rectangulaires. Donc tous les autres couples de rayons homologues sont rectangulaires et les hyperboles sont équilatères.

Les sécantes communes réelles sont rectangulaires comme faisant partie du faisceau. Les deux sommets du triangle autopolaire, autres que le centre commun O, sont les points doubles de l'involution déterminée sur la droite de l'infini, c'est-à-dire, les points cycliques I et J.



De là résulte que la transformée d'une droite est une conique passant O.I.J. c'est donc un cercle. Si nous considérons les tangentes à la courbe σ, Σ sera une enveloppe de cercles passant par un point fixe. C'est une *podaire*. Soit ω le cercle correspondant à la tangente *pr* à la courbe σ. Soit P le conjugué de *p* et M le point diamétralement opposé au point O. La droite PM sera tangente en M à une courbe dont Σ est la podaire. Tout

revient à trouver le lieu de M. La tangente OR est la polaire du point à l'infini par rapport à (OA, OB). Donc OR et la parallèle or' à pr sont conjuguées et également inclinées sur OA. La droite OM est la polaire du point à l'infini de pr par rapport à une certaine hyperbole du faisceau. Par rapport à cette même hyperbole, la droite or' est conjuguée de OM.

Donc les asymptotes de l'hyperbole sont bissectrices des angles de Or' avec OM. Soit OH une de ces asymptotes.

Soit α l'angle de Or' avec OA.

On a $$r'OA = ROA = \alpha$$

MOR est droit.

Donc $$MOr' = 90^\circ - 2\alpha$$

et $$HOr' = \frac{MOr'}{2} = 45^\circ - \alpha$$

$$HOA = HOr' + r'OA = 45^\circ - \alpha + \alpha = 45^\circ.$$

Donc, l'hyperbole cherchée est une hyperbole fixe ayant pour axes les sécantes communes OA, OB.

D'un autre côté, le pôle de pr par rapport à cette hyperbole se trouve sur le cercle ω. Il se trouve, en outre, sur OM. Donc, il se trouve en M. Le point M étant le pôle de pr par rapport à l'hyperbole H, décrit la polaire réciproque de σ par rapport à cette même hyperbole. Donc Σ est la podaire de la polaire réciproque de σ par rapport à H.

Supposons que σ soit un cercle. Il passe par I et J. Donc Σ se décompose en OJ et OI et un cercle, à condition que σ ne passe pas par O. Si σ passe par O, on obtient OI, OJ, la droite de l'infini et une droite. Dans le premier cas, la polaire réciproque de σ est une conique de foyer O et dans le second une parabole de foyer O.

Il est à remarquer que cette transformation présente de nombreuses analogies avec l'inversion qui aurait pour pôle le point O.

En effet :

1° Un cercle passant par O donne une droite ;

2° Un cercle quelconque donne un cercle ;

3° Une droite donne un cercle passant par O ;

4° Une conique donne une podaire de conique ;

5° L'inverse d'une figure est la podaire de sa polaire réciproque prise par rapport au cercle qui définit l'inversion.

ÉTUDE SUR LES COORDONNÉES TANGENTIELLES
ET LEURS APPLICATIONS

Par M. E. J. Boquel.

(*Suite*, voir page 80.)

Méthode générale pour passer de l'équation d'une ligne en coordonnées cartésiennes à l'équation de cette ligne en coordonnées tangentielles, et inversement.

Pour passer de l'équation $F(x,y) = 0$ d'une ligne en coordonnées cartésiennes à l'équation $f(u,v) = 0$ de cette même ligne en coordonnées tangentielles, il suffit évidemment de former la condition qui doit exister entre les quantités u et v de l'équation $ux + vy - 1 = 0$ pour que cette équation représente une tangente de la courbe $F(x, y) = 0$.

(x,y) étant le point de contact d'une de ces tangentes, la droite a pour équation en coordonnées homogènes :

$$XF'_x + YF'_y + ZF'_z = 0.$$

L'identification de cette équation avec l'équation $uX + vY - Z = 0$, ou mieux avec l'équation homogène $uX + vY + wZ = 0$ donne les deux relations

$$\frac{F'_x}{u} = \frac{F'_y}{v} = \frac{F'_z}{w}$$

qui, jointes à la condition $F(x,y,z) = 0$, permettent d'éliminer x et y (en faisant $z = 1$), et donnent entre u, v et w la relation cherchée. Si l'on ne veut conserver que u et v, on fera $w = 1$, et si l'on veut, en outre, avoir la condition relative à la forme $ux + vy - 1 = 0$, et non à la forme $ux + vy + 1 = 0$, on donnera à w la valeur $- 1$.

La difficulté du calcul se réduit un peu si l'on remarque que le point (x,y) appartenant à la courbe et à sa tangente en ce point, on peut remplacer la condition $F(x,y,z) = 0$ par la

condition équivalente $ux + vy + wz = 0$, ce qui résulte d'ailleurs du théorème d'Euler ; car on a :

$$xF'_x + yF'_y + zF'_z = mF(x, y, z) = 0.$$

relation qui, en vertu des égalités de rapports

$$\frac{F'_x}{u} = \frac{F'_y}{v} = \frac{F'_z}{w}$$

devient : $$ux + vy + wz = 0.$$

Soit, par exemple, à calculer l'équation tangentielle de la cissoïde de Dioclès, dont l'équation est, en coordonnées rectangulaires : $x(x^2 + y^2) - 2ay^2 = 0$

c'est-à-dire $x(x^2 + y^2) - 2ay^2z = 0$

On aura à éliminer x et y entre les relations :

$$\frac{3x^2 + y^2}{u} = \frac{2xy - 4ay}{v} = \frac{-2ay^2}{w}$$

et $$ux + vy + w = 0$$

qui peuvent s'écrire :

$$w(3x^2 + y^2) + 2ay^2u = 0 \qquad (1)$$

$$(x - 2a)w + ayv = 0 \qquad (2)$$

$$ux + vy + w = 0. \qquad (3)$$

On tire de (2) et (3) :

$$x = \frac{3aw}{w - au} \qquad y = -\frac{w(w + 2au)}{v(w - au)}$$

et, en reportant dans (1) :

$$w[27a^2w^2v^2 + w^2(w + 2au)^2] + 2auw^2(w + 2au)^2 = 0$$

En faisant $w = 1$, il vient :

$$27a^2v^2 + (1 + 2au)^2 + 2au(1 + 2au)^2 = 0$$

c'est-à-dire $$27a^2v^2 + (1 + 2au)^3 = 0.$$

Eu égard à la forme $ux + vy - 1 = 0$, on aurait :

$$27a^2v^2 + (2au - 1)^2 - 2au(2au - 1)^2 = 0$$

c'est-à-dire

$27a^2v^2 - (2au - 1)^3 = 0$, ou encore $27a^2v^2 + (1 - 2au)^3 = 0$.

Cet exemple montre que l'équation tangentielle d'une courbe est généralement d'une tout autre forme que l'équation cartésienne ; sauf dans des cas tout à fait particuliers, dont l'exemple précédent fait partie, elle est même d'un autre degré que cette dernière ; nous reviendrons sur ce point.

Avant de poursuivre, nous appliquerons encore la méthode

générale à la recherche de l'équation tangentielle générale des coniques, dont l'équation cartésienne homogène est

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0.$$

Il faut éliminer x et y entre les équations

$$\frac{Ax + By + Dz}{u} = \frac{Bx + Cy + Ez}{v} = \frac{Dx + Ey + Fz}{w}$$

et

$$ux + vy + wz = 0.$$

En appelant λ la valeur commune des trois rapports précédents, on a

$$\begin{aligned} Ax + By + Dz - u\lambda &= 0, \\ Bx + Cy + Ez - v\lambda &= 0, \\ Dx + Ey + Fz - w\lambda &= 0, \\ ux + vy + wz &= 0. \end{aligned}$$

Ces quatre équations, homogènes et linéaires en x, y, z, λ, admettent des solutions qui ne sont pas toutes simultanément nulles, puisque dans tous les cas l'une d'elles z est égale à l'unité; la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que le déterminant de leurs coefficients soit nul. L'équation tangentielle homogène des coniques, et relativement à la forme $ux + vy + w = 0$, est donc

$$\begin{vmatrix} A & B & D & u \\ B & C & E & v \\ D & E & F & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

— Inversement, pour passer de l'équation $f(u, v) = 0$, en coordonnées tangentielles, à l'équation $F(x, y) = 0$ en coordonnées cartésiennes, il faut résoudre un cas du problème des enveloppes.

En effet, puisque $f(u, v) = 0$ est la condition entre u et v pour que la droite $ux + vy - 1 = 0$ soit tangente à la courbe considérée, l'enveloppe de cette droite, quand u et v varient d'une manière continue sous la condition $f(u, v) = 0$, est précisément la courbe dont il s'agit.

Regardons u comme la variable indépendante, le point de rencontre de deux tangentes très voisines sera donné par le système des deux équations

$$ux + vy - 1 = 0$$
$$(u + \Delta u)x + (v + \Delta v)y - 1 = 0$$

Δu et Δv étant liés entre eux par la relation

$$f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v) = 0$$

ou bien

$$\Delta u\,[f'_u(u, v) + \omega] + \Delta v\,[f'_v(u, v) + \omega'] = 0$$

Δu et Δv tendant simultanément vers o, le point considéré tend vers une position limite sur la droite $ux + vy - 1 = 0$, et la deuxième équation étant remplacée dans le système par sa différence avec la première, elle devient

$$x \,.\, \Delta u + y \,.\, \Delta v = 0$$

et par conséquent à la limite, on aura le système des quatre équations

$$ux + vy - 1 = 0$$

$$x + y \lim \frac{\Delta v}{\Delta u} = 0$$

$$f'_u(u, v) + \lim \frac{\Delta v}{\Delta u} f'_v(u, v) = 0$$

$$f(u, v) = 0$$

Le point limite sur $ux + vy - 1 = 0$ est donc défini par les deux équations : $ux + vy - 1 = 0$

et

$$f'_u(u, v) - \frac{x}{y} f'_v(u, v) = 0,$$

ou bien

$$\frac{f'_u(u, v)}{x} = \frac{f'_v(u, v)}{y}$$

Les valeurs de u et v qui répondent à un point particulier étant un certain système de solutions de l'équation $f(u, v) = 0$.

Si donc entre les trois équations

$$ux + vy - 1 = 0$$

$$yf'_u(u, v) - xf'_v(u, v) = 0$$

et

$$f(u, v) = 0$$

on élimine les deux paramètres u et v, il restera entre x et y une relation s'appliquant à la succession de tous les points limites définis précédemment; cette relation sera donc l'équation cartésienne de la courbe considérée.

Supposons que l'équation $f(u, v) = 0$ soit algébrique et du degré m, on peut la rendre homogène, comme on le fait en coordonnées rectilignes, en remplaçant u et v par $\frac{u}{w}$ et $\frac{v}{w}$; elle prend alors la forme $f(u, v, w) = 0$, d'où l'on

déduit, par le théorème d'Euler

$$u f'_u v, + v f'_v + w f'_v = 0$$

Écrivant alors la relation

$$\frac{f'_u}{x} = \frac{f'_v}{y}$$

sous la forme $\frac{f'_u}{x} = \frac{f'_v}{y} = \frac{uf'_u + vf'_v}{ux + vy}$,

c'est-à-dire $\frac{f'_u}{x} = \frac{f'_v}{y} = \frac{-wf'_w}{1}$

L'expression $uf'_u + vf'_v$, qui est du degré m, se trouvera ramenée au degré $m - 1$, et le calcul d'élimination de u et v sera quelque peu simplifié.

Cherchons, par exemple, l'équation en coordonnées rectilignes de la courbe dont l'équation tangentielle est

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F = 0.$$

Nous aurons à éliminer u et v entre cette relation et les équations $\frac{Au + Bv + D}{x} = \frac{Bu + Cv + E}{y}$

et $ux + vy - 1 = 0.$

Si nous prenons les formes homogènes

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Duw + 2Evw + Fw^2 = 0$$

et $ux + vy + wz = 0.$

Les relations deviendront

$$\frac{Au + Bv + Dw}{x} = \frac{Bu + Cv + Ew}{y} = \frac{Du + Ev + Fw}{z}.$$

On aura donc, en appelant λ la valeur commune de ces trois rapports,

$$Au + Bv + Dw - \lambda x = 0,$$
$$Bu + Cv + Ew - \lambda y = 0,$$
$$Du + Ev + Fw - \lambda z = 0,$$

avec $ux + vy + wz = 0.$

Pour que ces équations admettent, comme cela a lieu, des solutions qui ne soient pas simultanément nulles, il faut et il suffit que le déterminant de leurs coefficients soit nul.

L'équation cherchée sera donc

$$\begin{vmatrix} A & B & D & x \\ B & C & E & y \\ D & E & F & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Il y a lieu d'observer la forme remarquable de cette équation, qui se déduit de l'équation tangentielle

$$\begin{vmatrix} A & B & D & u \\ B & C & E & v \\ D & E & F & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ établie plus haut,}$$

par le simple changement de u, v, w en x, y, z.

C'est encore là un résultat du principe de dualité et un exemple de la facilité avec laquelle l'emploi des coordonnées tangentielles met ce principe en lumière. Nous reviendrons d'ailleurs sur ces deux équations, dont la réciprocité est si remarquable.

— Pour achever de faire bien comprendre la méthode, considérons encore la courbe dont l'équation tangentielle est $u^3 - av^2 = 0$, et proposons-nous de trouver son équation en coordonnées cartésiennes.

Il faut éliminer u et v entre les équations

$$ux + vy + wz = 0$$

$$u^3 - av^2w = 0$$

$$\text{et } \frac{3u^2}{x} = -\frac{2avw}{y}$$

Mais la dernière donne :

$$\frac{3u^2}{x} = -\frac{2avw}{y} = \frac{3u^3 - 2av^2w}{ux + vy} = \frac{av^2w}{-wz} = -\frac{av^2}{z}$$

d'où l'on tire (en faisant z et $w = 1$) :

$$v = \frac{2}{y} \text{ et } \frac{3u^2}{x} = -\frac{4a}{y^2}, \text{ d'où } u^2 = -\frac{4ax}{3y^2}$$

L'équation cherchée est donc :

$$x\frac{2}{y}\sqrt{-\frac{ax}{3}} + 2 + 1 = 0, \text{ ou } y^2 = -\frac{4ax^3}{27}$$

THÉORÈME DE M. LAGUERRE

On sait que si l'on considère l'expression imaginaire $\alpha + \beta i$, on peut représenter cette quantité par un point, en convenant de prendre pour ce point celui dont les coordonnées sont α, β ; les axes étant d'ailleurs rectangulaires.

Ceci posé, considérons l'imaginaire,

$$u = \frac{\alpha + \beta\lambda + i(\alpha' + \beta'\lambda)}{\gamma + \delta\lambda + i(\gamma' + \delta'\lambda)}$$

dans laquelle λ représente *un périmètre réel et variable.* Pour chaque valeur de λ, u prendra la forme $A + Bi$ et si l'on considère le point M, dont les coordonnées sont $x = A$, $y = B$, ce point M décrira un lieu géométrique. *On propose de démontrer que ce lieu est un cercle*; ce théorème a été donné par M. Laguerre.

En multipliant haut et bas la valeur de u parl' expression imaginaire conjuguée du dénominateur, on trouve d'abord :

$$x = \frac{(\alpha + \beta\lambda)(\gamma + \delta\lambda) + (\alpha' + \beta'\lambda)(\gamma' + \delta'\lambda)}{(\gamma + \delta\lambda)^2 + (\gamma' + \delta'\lambda)^2} \qquad (1)$$

$$y = \frac{(\alpha' + \beta'\lambda)(\gamma + \delta\lambda) - (\alpha + \beta\lambda)(\gamma' + \delta'\lambda)}{(\gamma + \delta\lambda)^2 + (\gamma' + \delta'\lambda)^2} \qquad (2)$$

Il faut éliminer λ entre ces deux équations. A cet effet, multiplions (1) par $(\gamma' + \delta'\lambda)$; et (2), par $(\gamma + \delta\lambda)$; il viendra, après avoir ajouté les deux résultats :

$$x(\lambda' + \delta'\lambda) + y(\gamma + \delta\lambda) = \alpha' + \beta'\lambda. \qquad (3)$$

On trouve de même,

$$x(\gamma + \delta\lambda) - y(\gamma' + \delta'\lambda) = \alpha + \beta\lambda \qquad (4)$$

Il n'y a plus aucune difficulté à éliminer λ entre (3) et (4) et l'on trouve $(x^2 + y^2)(\delta\gamma' - \gamma\delta') + P = 0$, équation dans laquelle P désigne une fonction du premier degré en x et y. Les axes étant supposés rectangulaires, cette équation est bien l'équation d'un cercle. Il faut pourtant observer que ce cercle se réduit à la droite $P = 0$, quand on suppose $\delta\gamma' - \gamma\delta' = 0$.

Sans former explicitement l'équation du cercle, on peut encore démontrer le théorème de la manière suivante :

En ajoutant les carrés de x et y, on obtient

$$x^2 + y^2 = \frac{(\alpha + \beta\lambda)^2 + (\alpha' + \beta'\lambda)^2}{(\gamma + \delta\lambda)^2 + (\gamma' + \delta'\lambda)^2}.$$

Mais le second membre peut se mettre sous la forme

$$Ax + By + C$$

car x, y, $x^2 + y^2$ sont trois fractions rationnelles de la forme

$$\frac{p\lambda^2 + q\lambda + r}{s\lambda^2 + t\lambda + u},$$

$$\frac{p'\lambda^2 + q'\lambda + r'}{s\lambda^2 + t\lambda + u},$$

$$\frac{p''\lambda^2 + q''\lambda + r''}{s\lambda^2 + t\lambda + u};$$

on peut donc poser

$$\frac{p''\lambda^2 + q''\lambda + r''}{s\lambda^2 + t\lambda + u} = \frac{A(p\lambda^2 + q\lambda + r)}{s\lambda^2 + t\lambda + u} + \frac{B(p'\lambda^2 + q'\lambda + r')}{s\lambda^2 + t\lambda + u} + C.$$

Les coefficients A, B, C sont déterminés par les équations

$$Ap + Bp' + Cs = p'',$$
$$Aq + Bq' + Ct = q'',$$
$$Ar + Br' + Cu = r''.$$

L'équation du lieu est donc

$$x^2 + y^2 = Ax + By + C, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

QUESTION D'ALGÈBRE

On demande souvent dans les examens la sommation de la suite,

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n$$

Cette question n'est qu'un cas particulier de la suivante, qui est beaucoup plus étendue :

Sommation d'une suite de la forme

$$x + 2^p x^2 + 3^p x^3 + \ldots + n^p x^n$$

Posons $S_p = 1^p x + 2^p x^2 + 3^p x^3 + \ldots + n^p x^n$

et prenons la dérivée de S_p par rapport à x ; il vient :

$$S'_p = 1^{p+1} + 2^{p+1} x + 3^{p+1} x^2 + \ldots + n^{p+1} x^{n-1},$$

Par conséquent :

$xS'_p = 1^{p+1}x + 2^{p+1}x^2 + 3^{p+1}x^3 + \dots + n^{p+1}x^n$

c'est-à-dire :

$xS'_p = S_{p+1}$.

Cette relation générale permet de calculer S_1 connaissant S_0, puis S_2, connaissant S_1 et par conséquent S'_1 ; ayant S_2, on formera S'_2, ce qui donnera S_3, et ainsi de suite.

Par exemple,

$S_1 = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n$

résultera de la relation

$S_1 = xS'_0$

Or,

$$S_0 = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = x\,\frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}$$

donc

$$S'_0 = \frac{[(n+1)\,x^n - 1]\,(x - 1) - (x^{n+1} - x)}{(x - 1)^2}$$

$$= \frac{nx^{n+1} - (n+1)\,x^n + 1}{(x - 1)^2}$$

Par suite,

$$S_1 = \frac{nx^{n+2} - (n+1)\,x^{n+1} + x}{(x - 1)^2}$$

Formant S'_1, on en conclura S_2 par la relation $S_2 = xS'_1$ et ainsi de suite.

SUR L'ÉQUATION AUX CARRÉS DES DIFFÉRENCES

Pour calculer cette équation, on forme habituellement l'équation aux différences des racines, équation que l'on transforme ensuite de manière à obtenir l'équation aux carrés des différences des racines. Il nous paraît sensiblement plus simple d'opérer d'une façon inverse et de calculer directement, comme nous allons le montrer dans le cas du troisième degré, l'équation aux carrés des différences des racines.

1. — Soit $f = x^3 + px + q = 0$
l'équation proposée; x', x'' deux racines de cette équation; y la racine correspondante de l'équation cherchée : de telle sorte que
$$y = (x' - x'')^2$$
ou
$$y = (x' + x'')^2 - 4x'x''$$
soit x, la troisième racine; on aura donc
$$y = x^2 + \frac{4q}{x}.$$
ou
$$x^3 - xy + 4q = 0;$$
d'ailleurs
$$x^3 + px + q = 0$$
et, par différence,
$$x = \frac{3q}{p + y}.$$
On obtient ainsi l'équation demandée
$$\frac{27q^2}{(p + y)^3} + \frac{3p}{p + y} + 1 = 0$$
ou enfin
$$\varphi = y^3 + 6py^2 + 9p^2y + 4p^3 + 27q^2 = 0.$$
L'équation f, par un théorème connu, aura toutes les racines réelles, si φ est une équation complète et n'offrant que des variations; on retrouve ainsi la condition
$$4p^3 + 27q^2 < 0.$$

2. — Considérons maintenant le cas le plus difficile de l'équation complète du troisième degré;
$$f = x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \qquad (1)$$
On a toujours $y = (x' + x'')^2 - 4x'x''$
ou
$$y = (a + x)^2 + \frac{4c}{x}$$
c'est-à-dire $x^3 + 2ax^2 + x(a^2 - y) + 4c = 0 \qquad (2)$
Il s'agit maintenant d'éliminer x, entre (1) et (2). Une soustraction donne d'abord :
$$ax^2 + x(a^2 - b - y) + 3c = 0 \qquad (3)$$
D'autre part l'élimination du terme constant entre (1) et (2) conduit à la combinaison,
$$3x^2 + 2ax + (4b - a^2 + y) = 0 \qquad (4)$$
Des équations (3) et (4) et par la règle connue qui sert à éliminer, entre deux équations, un paramètre qui y entre au second degré;

$$(4ab - a^2 - 9c + ay)^2 = (a^2 - 3b - 3y)$$
$$[y^2 + y(5b - 2a^2) + (a^2 - b)(a^2 - 4b) + 6ac]$$

Développant et simplifiant on a l'équation aux carrés des différences ;

$$\text{(A)} \qquad y^3 - 2y^2(a^2 - 3b) + y(a^2 - 3b)^2 + \text{H} = 0$$

en posant

$$\text{H} = 27c^2 + 2ac(2a^2 - 9b) + b^2(4b - a^2)$$

Cette équation donne lieu à plusieurs remarques.

3. — L'équation aux carrés des différences devant être complète et n'offrir que des variations, si f n'a que des racines réelles, on voit d'abord que,

$$a^2 - 3b > 0.$$

Cette relation, entre les trois premiers coefficients, appliquée à l'équation aux inverses, donne, pour les trois derniers coefficients, la condition ;

$$b^2 - 3ac > 0$$

et l'on peut énoncer le théorème suivant; théorème qu'on peut établir de bien des façons différentes ;

Lorsqu'une équation du troisième degré a ses racines réelles, le carré d'un coefficient quelconque est toujours plus grand que le triple produit des coefficients voisins.

On peut remarquer pourtant le *cas limite* ; celui où l'on aurait à la fois

$$a^2 = 3b \qquad \text{et} \qquad b^2 = 3ac.$$

L'équation est alors

$$x^3 + ax^2 + \frac{a^2}{3}x + \frac{a^3}{27} = 0$$

ou

$$\left(x + \frac{a}{3}\right)^3 = 0.$$

Les racines sont réelles mais coïncidentes; l'équation aux carrés des différences se réduit a $y^3 = 0$; c'est ce qu'on vérifie facilement.

4. — Le coefficient de y est lui-même positif ou nul : les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation du troisième degré ait ses trois racines réelles, sont donc

$$a^2 - 3b > 0,$$
$$\text{H} < 0.$$

Nous allons montrer (*) que ces deux conditions rentrent l'une dans l'autre et que la seule condition nécessaire et suffisante est $H < 0$.

Posons
$$9c - ab = U \quad (1)$$
et, dans l'égalité
$$3H = 81c^2 + 6ac(2a^2 - 9b) + 3b^2(4b - a^2),$$
remplaçons c au moyen de l'égalité (1); on obtiendra, après des calculs simples et évidents,
$$9H = 3U^2 + 4aU(a^2 - 3b) + 4b(a^2 - 3b)^2.$$

Dans ce trinôme du second degré en U, la quantité soumise au radical est $4(a^2 - 3b)^3$.

Si l'on avait $a^2 - 3b < 0$, les racines de l'équation $H = 0$ seraient imaginaires et H conserverait le signe de son premier terme, le signe +, par conséquent, et l'on ne saurait avoir $H < 0$. En résumé, les deux inégalités
$$H < 0 \quad \text{et} \quad a^2 - 3b < 0$$
sont en contradiction; et, du moment que $H > 0$, *on a nécessairement* $a^2 - 3b > 0$.

5. — La question que nous venons de résoudre et qui consiste à *faire rentrer les unes dans les autres* des inégalités qu'on pourrait nommer *surabondantes*, pour exprimer ce fait que quelques-unes d'entre elles suffisent et que toutes ne sont pas nécessaires, se présente aussi dans la discussion de l'équation du troisième degré par la méthode de Sturm.

L'équation étant toujours
$$V = x^3 + Ax^2 + Bx + C$$
on a, pour la suite de Sturm,
$$V_1 = 3x^2 + 2Ax + B$$
$$V_2 = 2(A^2 - 3B)x + AB - 9C$$
$$V_3 = -3(9C - AB)^2 - 4A(9C - AB)(A^2 - 3B) - 4B(A^2 - 3B)^2$$

Les conditions données par cette méthode seraient, comme celles qu'a fournies l'équation aux carrés des différences,
$$A^2 - 3B > 0; \quad V_3 > 0$$
et comme
$$V_3 = -9H$$

(*) Cette question, croyons-nous, a été soulevée aux examens de l'année dernière par M. Marie.

on trouve, par une discussion semblable à celle que nous avons faite sur H, que *la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation,* $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ *ait ses trois racines réelles et distinctes, est :*

$$27c^2 + 2ac(2a^2 - 9b) + b^2(4b - a^2) < 0.$$

CHOIX DE QUESTIONS

PROPOSÉES AUX EXAMENS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1880

Géométrie analytique plane.

— On donne l'un des sommets de l'axe focal d'une ellipse, et une extrémité de l'un des diamètres conjugués égaux. Former l'équation des courbes qui ont ces éléments communs.

— On considère les paraboles ayant une tangente et son point de contact communs, ainsi qu'un point de la tangente au sommet. — Trouver le lieu des sommets de ces courbes.

— Asymptotes de la courbe

$$y = \sqrt[5]{\frac{2x^7 + 3x^6 + \ldots\ldots}{4x^2 + 3x - 1}}$$

— On donne une tangente à une parabole, et les points où elle est coupée : 1° par la directrice; 2° par la tangente inclinée à 45° sur l'axe. — On demande l'équation générale de ces paraboles.

— Expliquer *a priori* pourquoi dans la valeur générale du paramètre d'une parabole contenant à son numérateur Δ et $\sin\theta$, et à son dénominateur $A + C - 2B\cos\theta$, le rapport des exposants Δ et de $A + C - 2B\cos\theta$ est $\frac{1}{3}$, et pourquoi $\frac{1}{2}$ est facteur dans ces exposants.

— Lieu des sommets des hyperboles équilatères, ayant un foyer donné et passant par un point donné.

— Lieu du foyer des hyperboles ayant une asymptote et un sommet donné.

— Construire la courbe

$$\rho = \frac{1 - \sin\omega}{1 - 2\cos\omega}$$

— Construire la courbe $y\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{1-x}$, et étudier cette courbe autour de l'origine.

— Lieu des sommets des paraboles qui ont la directrice et une tangente communes.

— Former l'équation générale des hyperboles ayant comme éléments communs un sommet réel et le point de rencontre de l'une des directrices avec l'une des asymptotes.

— On donne la droite sur laquelle est compté un des diamètres conjugués égaux d'une ellipse, et la grandeur de ce diamètre (mais non sa position); on

donne aussi le pied d'une directrice sur l'axe. — Former l'équation de la courbe qui satisfait à ces conditions.

— On forme l'équation générale des paraboles ayant une tangente et l'axe communs, trouver le lieu des contacts des tangentes qui font avec l'axe un angle de 45°.

— Expliquer pourquoi l'équation aux carrés des demi-axes d'une conique est homogène par rapport aux coefficients de l'équation de la courbe, pourquoi $AC - B^2$ est facteur dans les deux premiers termes, et pourquoi Δ est facteur dans les deux derniers.

— Construire la courbe dont l'équation en coordonnées polaires est

$$\rho = \frac{1 - \text{tang}^3 \omega}{\text{tang}^2 \omega - 1}$$

— Etant donnée la courbe $y = x^4$, trouver le lieu des milieux des cordes parallèles à la droite $y = 2x$.

— Construire la courbe dont l'équation est

$$x^4 + x^2 y^2 - 6x^2 + y^2 = 0.$$

— Construire la courbe dont un point quelconque a pour coordonnées

$$x = \frac{t^2 + t + 1}{t + 1} \qquad y = \frac{t^2 - 1}{2 - t}$$

— Former l'équation générale des hyperboles équilatères passant par un point fixe, et telles que le lieu de leurs centres est un cercle de rayon R, dont on donne le centre.

— Construire la courbe dont l'équation en coordonnées polaires est

$$\rho = \frac{1 + \sin \omega}{\cos^2 \omega}$$

— Construire le lieu dont les coordonnées d'un point quelconque sont

$$x = \frac{t}{1 - t} \qquad y = \frac{1}{1 + t}$$

A priori quel sera ce lieu?

Géométrie analytique dans l'espace.

— Étant donnés l'ellipsoïde $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ et le plan $x + 2y + 3z = 0$, former l'équation aux carrés des demi-axes de la section de la surface par le plan, et trouver les directions de ces axes.

— Faire voir *a priori* que le lieu des points où les génératrices de l'hyperboloïde à une nappe se coupent à angle droit est l'intersection de la sphère de Monge avec l'hyperboloïde.

— Reconnaître la nature de la surface

$$x^2 + y^2 + 2z^2 - 2zx - 2z = 0$$

par la méthode des contours apparents.

— Lieu des centres des sections faites dans une surface du second ordre par les plans qui passent : 1° par un point fixe; 2° par une droite fixe.

— A quels axes est rapportée la surface $xy = z$?

— Étant donnée l'équation $x^2 - y^2 + yz + z - x = 0$, calculer l'angle des deux génératrices de la surface qui passent à l'origine, et l'équation du plan des deux droites.

— Étudier la surface représentée par l'équation

$$(x - \alpha)(y - \beta)(z - \gamma) = (x - \alpha')(y - \beta')(z - \gamma').$$

Quelle particularité présente le plan $x - \alpha = 0$ par rapport à cette surface?

— Étant donnée l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, former l'équation générale des plans qui coupent la surface suivant deux droites.

— L'équation générale du second degré à trois variables représentant un paraboloïde, on demande les équations de son axe.

— Trouver les plans principaux de la surface

$$xy + xz - y^2 + 1 = 0.$$

— Étant donnée la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, former l'équation de la surface engendrée par une droite tangente à la sphère, et assujettie à s'appuyer sur l'axe des z et sur la droite ($x = \alpha$, $z = \gamma$).

— Étant donnée la surface $x(x + y + 1) + y(z + y - 2) = 0$, on donne sur l'axe des z un point à la hauteur $z = \gamma$; former les équations de la seconde génératrice qui passe par ce point.

— Étant donnée l'équation $\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w} = 0$ dans laquelle

$$u = ax + by + cz + d$$
$$v = a'x + b'y + c'z + d'$$
$$w = a''x + b''y + c''z + d'',$$

on demande les propriétés de la surface qu'elle représente.

— Former l'équation de l'hyperboloïde à une nappe, quand on prend pour axe des x une génératrice du cône asymptote, et pour plan des zy son plan diamétral conjugué.

— Former l'équation générale des cônes du second ordre qui contiennent es axes Ox et Oy. — On prend sur Oz deux points A et A' symétriques par rapport à l'origine; on mène dans le plan des zx AB parallèle à Ox et dans le plan des zy A'B' parallèle à Oy. On demande l'équation de la surface engendrée par une droite s'appuyant sur AB et A'B' et parallèle aux génératrices de l'un des cônes considérés. Quel est le cône asymptote de cette surface?

— Lieu des centres des sphères tangentes à deux droites rectangulaires.

— Lieu des centres des sections faites dans une surface du second ordre $f(x, y, z) = 0$ par des plans constamment tangents à une sphère donnée.

— On coupe l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ par des plans parallèles au plan $px + qy + rz = 0$; trouver le lieu des foyers des sections ainsi obtenues.

— Lieu des sommets des cônes de révolution ayant pour directrice l'ellipse $\left(z = 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0\right)$.

Géométrie descriptive.

— Étant donné un triangle par les projections et les côtés de ses sommets, mener par l'un des côtés un plan faisant avec le plan du triangle un angle de 45 degrés. *(Pas de plan vertical de projection.)*

— On donne deux droites AB, BC dans le plan horizontal. AB est la projection d'une droite située à un décimètre au-dessus du plan horizontal. Cette droite tourne autour de BC et engendre un hyperboloïde de révolution. Par AB on fait passer un plan incliné de 45 degrés sur le plan horizontal. On demande un point de l'intersection, et la tangente en ce point. *(Pas de plan vertical de projection).*

— Étant donnés un cercle dans le plan vertical, et une droite quelconque, le cercle est la base d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la droite.

Mener à ce cylindre un plan tangent faisant avec le plan vertical un angle de 45 degrés.

— Étant donné un triangle ABC dans le plan horizontal, ce triangle est la base d'un tétraèdre dont le sommet se projette horizontalement en S et dont le côté est $\frac{AB}{2}$. On demande le centre et le rayon de la sphère inscrite dans le tétraèdre.— On demande aussi les centres et les rayons de toutes les sphères qu'on peut mener tangentes aux quatre faces du tétraèdre. *(Pas de plan vertical de projection.)*

— Etant donné dans le plan vertical un cercle qui est la section droite d'un cylindre, on considère un plan défini par sa trace horizontale qui ne rencontre pas la ligne de terre dans les limites de l'épure, et passant par un point (c, c'); on demande : 1° un point quelconque de l'intersection du cylindre par le plan; 2° si dans les développements du cylindre, le développement de l'intersection présentera des points d'inflexion.

QUESTION 256

Solution, par M. BARON, élève au Lycée Henri IV.

On donne une ellipse dont les axes sont OA *et* OB ; *la tangente en* M *à la courbe rencontre les axes en* C *et* D ; *on construit le rectangle* OCPD *et on joint le sommet* P *au point* M. *Démontrer que si du centre on abaisse une perpendiculaire sur* PM, *cette perpendiculaire rencontre la normale en* M *en un point* I *qui est le centre du cercle osculateur de l'ellipse au point* M.

Je rapporte l'ellipse à deux axes rectangulaires d'origine M, parallèles aux axes de la courbe. L'équation de l'ellipse est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{2x \cos \varphi}{a} + \frac{2y \sin \varphi}{b} = 0$;
celle de la tangente en M est

$$\frac{x \cos \varphi}{a} + \frac{y \sin \varphi}{b} = 0.$$

On sait que les cordes communes à l'ellipse et au cercle osculateur en M sont la tangente et la droite symétrique de la tangente par rapport à la parallèle à l'axe focal menée par M. Cette droite aura pour équation,

$$\frac{x \cos \varphi}{a} - \frac{y \sin \varphi}{b} = 0. \qquad (1)$$

Elle coupe l'ellipse au point M, et au point M', dont les coordonnées sont $x' = -4a \sin^2 \varphi \cos \varphi$

$$y' = -4b \sin \varphi \cos^2 \varphi.$$

Le centre du cercle osculateur sera donc déterminé par l'intersection de la normale

$$y = \frac{a \sin \varphi}{b \cos \varphi} x \qquad (2)$$

et de la perpendiculaire au milieu de MM' :

$$(y + 2b \sin \varphi \cos^2 \varphi) = -\frac{a \sin \varphi}{b \cos \varphi}(x + 2a \sin^2 \varphi \cos \varphi). \quad (3)$$

Cela posé, je cherche les coordonnées du point P; elles seront

$$y = \frac{b \cos^2 \varphi}{\sin \varphi}$$

$$x = \frac{a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}.$$

La perpendiculaire abaissée de O sur PM aura donc pour équation

$$(y + b \sin \varphi) = -\frac{a \sin^3 \varphi}{b \cos^3 \varphi}(x + a \cos \varphi). \quad (4)$$

Si cette droite détermine le centre du cercle osculateur par son intersection avec la normale, il faut que l'intersection des droites (3) et (4) soit sur la normale en M.

Si je cherche l'équation de la droite passant par M et l'intersection des droites (3) et (4), je trouverai après réduction

$$b \cos \varphi \,.\, y(1 - 2 \cos^2 \varphi) = a \sin \varphi \,.\, x(2 \sin^2 \varphi - 1)$$

c'est-à-dire l'équation de la normale en M. Donc le point I est bien le centre du cercle osculateur cherché.

NOTA. — La même question a été résolue par M. Bonvalet, élève au Lycée de Versailles.

QUESTIONS PROPOSÉES

Mathématiques élémentaires.

322.— Trouver cinq nombres en progression arithmétique, connaissant leur somme et leur produit.

323. — Trouver le minimum du volume d'un tronc de cône droit à bases parallèles circonscrit à un hémisphère.

324. — Construire géométriquement un triangle, connaissant un côté, le périmètre et la surface.

325. — Résoudre l'équation

$$\sqrt[n]{\frac{a+x}{a}} + \sqrt[n]{\frac{a+x}{x}} = \sqrt[n]{\frac{x}{b}}.$$

326. — Étant donné un cercle O et deux points extérieurs A et B donnés par les quantités suivantes : $OA = a$, $OB = b$, $AB = d$, trouver sur la circonférence un point M tel que la somme des carrés des distances MA et MB soit égale à une quantité donnée. On discutera le problème et on construira géométriquement le point M lorsqu'il existe.

327. — On donne un cercle C, une corde AB de ce cercle, et sur AB un point P; mener par le point P une corde XPY telle que, si on abaisse XX′ et YY′ perpendiculaire sur AB, on ait $XX' - YY' = D$. *(Lieber.)*

328. — On donne un cercle, un diamètre et deux points P et P′ sur ce diamètre, de part et d'autre du centre, à des distances inégales du centre. Mener par P et P′ deux cordes égales qui se coupent sur la circonférence. *(Lieber.)*

Mathématiques spéciales.

329. — On considère une ellipse et deux normales à cette courbe faisant entre elles un angle droit. Soit M le point de rencontre de ces deux normales. Par ce point M on mène à l'ellipse les deux autres normales, dont les pieds sont A et B. En A et B, on mène les tangentes à l'ellipse. Trouver le lieu du point P de rencontre de ces tangentes, quand le point M décrit le lieu des sommets des angles droits dont les côtés sont normaux à l'ellipse donnée.

330. — On donne trois points, A, B, C, dans un plan. Autour du point A, on fait tourner un angle de grandeur constante, dont les côtés rencontrent en M et N une droite fixe donnée ; on demande le lieu décrit par le point de ren-

contre des lignes BM et CN lorsque l'angle donné tourne autour du point A. Étudier les propriétés de ce lieu.

331. — Étant données deux ellipses homofocales, par un point P de leur plan, on mène à l'une d'elles deux tangentes, A et B d'une part, C et D d'autre part étant les points où ces tangentes rencontrent la seconde ellipse, établir la relation
$$\frac{1}{PA} \pm \frac{1}{PB} = \frac{1}{PC} \pm \frac{1}{PD};$$
trouver à quelles positions du point P conviennent respectivement les signes $+$ et $-$.

332. — On coupe un ellipsoïde :

1° Par des plans parallèles à un plan donné;

2° Par des plans passant par une droite donnée;

3° Par des plans passant par un point donné.

Trouver les lieux décrits par les foyers de ces sections dans les trois cas.

333. — M et M' étant deux points d'une parabole, P le point de concours des tangentes en ces deux points, et F le foyer, démontrer que l'on a :
$$\frac{PM^2}{MF} = \frac{PM'^2}{M'F}$$
Existe-t-il un théorème analogue pour l'ellipse et l'hyperbole ?

334. — Étant donnée la fonction
$$\varphi(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$
on demande de calculer la fonction analogue $\varphi(2x)$ en fonction de $\varphi(x)$.

335. — Construire les courbes suivantes :
$$2x^3y^3 + x^4 - y^4 - 2xy = 0$$
$$4x^5y^5 + x^6 - y^6 + 5x^2y^2(x^2 - y^2) - 4xy = 0.$$

Le Rédacteur-Gérant,

J. KŒHLER.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 6136-1

QUESTION DE GÉOMÉTRIE

Par MM. **Delpit** et **Docteur**, élèves de l'École préparatoire de Sainte-Barbe

Solution et développement de la question 315.

On donne dans un cercle deux diamètres fixes AB, CD. *Par le centre, on mène des rayons perpendiculaires* OP, OP′ ; *on abaisse de* P *et* P′ *des perpendiculaires* PQ *et* P′Q′ *sur* AB ; *soient* ω *et* ω′ *les centres des cercles inscrits dans les triangles* POQ, P′OQ′. *La figure jouit des propriétés suivantes :*

1° *Les trois points* P, ω, C, *sont en ligne droite.*

En effet, le triangle OCP, qui est isoscèle, donne

$$\text{OPC} = \text{OCP};$$

de plus PQ est parallèle à OC; donc

$$\text{CPQ} = \text{OCP};$$

par suite PC est la bissectrice de l'angle en P; elle contient donc le point ω. Pour la même raison, les points P′, ω′, C sont en ligne droite.

2° *Les deux droites* ωP, ωA *sont égales et rectangulaires.*

Ces lignes sont égales, parce que PH = AH; elles sont perpendiculaires parce que $\text{P}\omega\text{H} = \frac{\text{P}}{2} + \frac{\text{O}}{2} = 45°$. Donc $\text{P}\omega\text{A} = 90°$.

On voit aussi que les angles ωAO, OPω sont égaux ainsi que OPω et ω′OQ′; donc les droites ωA, ω′O sont égales et parallèles.

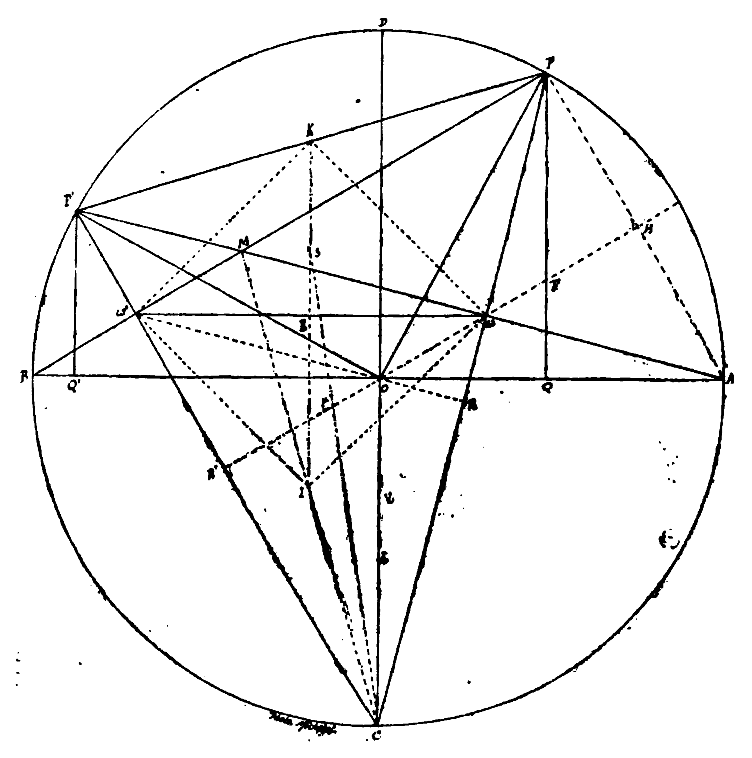
3° *La droite* ωω′ *est égale au rayon.*

Cela résulte de ce que nous venons de dire; les lignes ωA et ω′O étant égales et parallèles, la figure ωω′AO est un parallélogramme.

4° *Le lieu du centre* I *du cercle circonscrit au triangle* Cωω′ *est un cercle.*

En effet, l'angle en C étant égal à 45°, ωω′ est le côté du

carré inscrit dans le cercle $\omega C \omega'$, et si par le point E, milieu de $\omega\omega'$, on élève à cette droite une perpendiculaire sur laquelle on prend une longueur EI égale à ωE dans l'intérieur du triangle, le point I est le centre du cercle circonscrit; on a donc $CI = I\omega'$; or comme on a $I\omega' = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, on voit que CI est constant; le lieu du point I est donc un cercle ayant le point C pour centre, et pour rayon $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.



5° *La droite qui joint les milieux de* PP' *et de* $\omega\omega'$ *est constante et égale à la moitié du rayon.*

D'abord les droites OK et CI sont égales; de plus elles sont parallèles. En effet, on a

$$KOD = KOP - DOP = 45^\circ - OPQ.$$

$$ICO = IC\omega - \frac{P}{2} = 90^\circ - C\omega'\omega - \frac{P}{2}.$$

Mais $$C\omega'\omega = 90^\circ - \frac{P'OD}{2};$$

donc $$ICO = \frac{P'}{2} - \frac{P}{2} = 45^\circ - OPQ.$$

et par suite $$KOD = ICO.$$

Il en résulte que la figure OKIC est un parallélogramme, et puisque IE est déjà parallèle à CO, la ligne KE est aussi parallèle à CO; enfin, on a $IK = R$, et comme $IE = \frac{R}{2}$, il en résulte que KE est égal à $\frac{R}{2}$.

6° *Les points* K, ω, ω', I *sont les sommets d'un carré.*

Cela résulte de ce que les droites KI et $\omega\omega'$ se coupent en leurs milieux et à angle droit et sont de plus égales.

7° *Les trois points* A, ω, P', *sont en ligne droite.*

En effet on a $\omega AB = \frac{P}{2}$, et puisque $P'AB = \frac{P}{2}$, les droites $A\omega$, AP' se confondent.

8° *Les trois droites* BP, AP' *et* CI *concourent en un même point.*

En effet, nous avons vu que $C\omega$ était perpendiculaire sur AM; de même, $C\omega'$ est perpendiculaire sur BM; donc le quadrilatère $M\omega C\omega'$ est inscriptible, et CM est un diamètre du cercle; ce diamètre passe donc par le point I.

9° *Les cinq points* P, P', ω, ω', O *sont sur une même circonférence ayant pour centre le point* K.

Cela résulte de la propriété démontrée (6), puisque $K\omega = K\omega' = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, et que cette même quantité exprime les distances KO, KP et KP'.

10° *On a* $C\omega'^2 + O\omega^2 = C\omega^2 + O\omega'^2 = 2R^2$.

En effet, on a $$O\omega = P'\omega' = B\omega';$$

Donc $C\omega'^2 + O\omega'^2 = C\omega'^2 + B\omega'^2 = CB^2 = 2R^2$.

On a de même $C\omega^2 + O\omega'^2 = 2R^2$.

Il existe beaucoup d'autres propriétés, dont nous allons signaler les plus importantes.

11° *Le lieu du point* M *est une circonférence ayant pour centre* C.

Cela résulte immédiatement de (8), puisque $CM = 2CI = R\sqrt{2}$. On voit que cette circonférence passe par les points A et B.

12° *Le lieu du point* E *est une circonférence.*

En effet, si nous joignons le point E au milieu L de OC, la ligne EL est toujours égale et parallèle à CI; donc $EL = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

13° *Le point* O *est le point d'intersection des hauteurs du triangle* $C\omega\omega'$.

En effet, les cordes PA, P'C sont parallèles, parce que les arcs PP' et AC sont égaux; donc $O\omega$, perpendiculaire à PA. est aussi perpendiculaire à P'C.

Pour la même raison, $\omega'O$ est perpendiculaire à PC.

14° *Le lieu géométrique du centre de gravité du triangle* $C\omega\omega'$ *est un cercle.*

En effet, le centre de gravité se trouve sur OI, et sa distance au point O est les deux tiers de OI. Donc, le lieu du centre de gravité est un cercle dont le centre est sur OC, à une distance de O égale aux deux tiers du rayon.

15° *Le lieu du centre du cercle des neuf points du triangle* $C\omega\omega'$ *est un cercle.*

En effet, ce centre se trouve au milieu de OI. Donc le lieu de ce centre est un cercle dont le centre est au point L.

16° *Les six points* P, H, Q, R, O, K *sont sur une même circonférence.*

Car les angles qui ont pour sommets les points H, Q, R ou K et passent par les points O, P sont droits.

17° *Les lieux des points* ω *et* ω' *se composent de deux cercles.*

En effet, l'angle $O\omega C$, opposé par le sommet à l'angle $P\omega H$, est égal à 45°. Le lieu du point ω est donc le cercle circonscrit au triangle AOC.

18° *Les trois points* D, K, M *sont en ligne droite.*

Car IK est la moitié de CD, et le point I est au milieu de MC, IK étant parallèle à CD. Donc le point K est le milieu de DM.

19° *La ligne* $K\omega$ *passe par le point* Q.

En effet, l'angle ωQO est égal à 45° ainsi que l'angle $K\omega\omega'$, et les droites $\omega\omega'$ et AB sont parallèles.

20° *Les six points* K, ω, ω', I, R, R' *sont sur une même circonférence.*

Les quatre premiers points sont sur une circonférence ayant E pour centre, et les angles $\omega R\omega'$, $\omega R'\omega'$ sont droits; donc cette circonférence passe par les points R et R'.

21° *Le lieu du point* F *est une strophoïde.*

Menons AF. L'angle aigu de cette droite avec OF sera égal à PFH, ou $P + \frac{O}{2}$. Or, l'angle DOF a la même valeur. Donc, le point F s'obtiendra en portant à partir du point de rencontre de AF avec OD une longueur égale à la distance de ce point au point O. Il appartient donc à la boucle d'une strophoïde.

22° *Soit* μ *le centre du cercle inscrit au triangle* $C\omega\omega'$. *Le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle* $\omega\mu\omega'$ *est un cercle.*

En effet, l'angle $\omega\mu\omega'$ est égal à $\frac{\pi}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{45}{2}$. Donc, le rayon du cercle circonscrit au triangle $\omega\mu\omega'$ est constant. Soit S le centre de ce cercle; la droite SE est constante. Prenons sur CO, à partir du point L, une longueur LV égale à SE. SV sera toujours égal à LE; donc V sera le centre d'un cercle de rayon $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ qui sera le lieu du point S.

23° *Les trois points* S, μ, C *sont en ligne droite.*

En effet, on a $\quad S\mu\omega = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega\omega'C}{2}.$

L'angle aigu de $C\mu$ avec $\omega\mu$ est égal à $\frac{\pi}{8} + \frac{\omega'\omega C}{2}.$

Si l'on égale ces valeurs, on en tire

$$\omega\omega'C + \omega'\omega C = 135°;$$

telle est la condition à laquelle doivent satisfaire les angles en ω et ω' du triangle $C\omega\omega'$ pour que les trois points S, μ et C soient en ligne droite; on sait que cette condition est remplie.

24° *Le lieu du centre du cercle inscrit dans le triangle* $C\omega\omega'$ *est un limaçon de Pascal.*

En effet, le point S appartient, d'après ce que l'on vient de dire, au cercle circonscrit au triangle $C\omega\omega'$, puisque la ligne $C\mu$ est la bissectrice de l'angle en C; il en résulte que, puisque $S\mu$ est constant, le point μ décrit un limaçon de Pascal.

25° *Il existe une ellipse, ayant pour foyers les points* O *et* I, *et tangente aux trois côtés du triangle* $C\omega\omega'$.

Nous remarquons que les angles $IC\omega'$, $OC\omega$ sont égaux; en effet, l'angle $\omega'CO$ et l'angle $IC\omega$ sont égaux comme complément d'un même angle $C\omega'\omega$. Donc, en retranchant la partie commune ICO, on voit que les angles ωCO, $\omega'CI$ sont égaux. En outre, les angles $I\omega'C$, $O\omega'\omega$ sont égaux; en effet, l'angle $O\omega'\omega$ est le complément de l'angle $C\omega\omega'$; il en est de même de l'angle $I\omega'C$, qui est le complément de la moitié de l'angle au centre $CI\omega'$. On prouverait de même que les angles $\omega'\omega O$ et $I\omega C$ sont égaux. Cela posé, prenons une ellipse ayant pour foyers O et I et tangente à $\omega\omega'$. Si des points ω et ω' on mène deux autres tangentes à cette ellipse, elles feront respectivement avec les droites ωI, $\omega'I$ des angles égaux à $\omega'\omega O$ et $\omega\omega'O$. Les droites ωC, $\omega'C$ satisfont précisément à cette relation. Le théorème est donc démontré.

Note de la Rédaction. — Les auteurs auraient pu démontrer ce dernier théorème en rappelant que les symétriques

de O par rapport aux côtés du triangle $C\omega\omega'$ sont sur la circonférence circonscrite, puisque le point O est le point de concours des hauteurs de ce triangle ; si l'on appelle R le symétrique de O par rapport à $C\omega$, le point de rencontre de IR avec $C\omega$ est tel, que la somme de ses distances aux points I et O est égale à IC, et de plus la ligne $C\omega$ est également inclinée sur les deux droites qui joignent ce point aux points I et O. Donc $C\omega$ est tangente à l'ellipse ayant I et O pour foyers, et pour cercle directeur le cercle circonscrit à $C\omega\omega'$. Il en est de même pour les deux autres côtés du triangle. Nous avons reproduit la démonstration des auteurs, quoiqu'elle s'appuie sur un théorème moins connu des élèves de Mathématiques élémentaires.

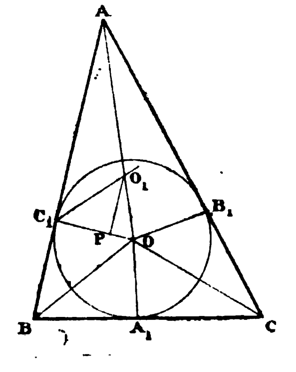
NOTA. — La question 315, telle qu'elle avait été proposée, a été résolue, en outre, par MM. Launay, à Bourges; Baudouin, au collège de Beauvais; Fiévet, à Lille; Hamon, au Mans; Jullien et Lapareillé, au lycée Henri IV, à Paris.

APPLICATIONS DE LA TRIGONOMÉTRIE

Par M. **Gino-Loria**

(*Suite et fin*, voir pages 62, 104 et 148.)

21. — (T, W) O *est le centre*, r *le rayon du cercle inscrit dans un triangle quelconque* ABC. *On mène* OA_1, OB_1, OC_1 *perpendiculaires aux côtés* BC, CA, AB. *Soient* r_1, r_2, r_3 *les rayons des cercles inscrits dans les quadrilatères* AB_1OC_1, BC_1OA_1, CA_1OB_1. *Trouver des relations entre* r_1 r_2 r_3 *et les éléments du triangle donné.*



Considérons le quadrilatère

$$AB_1\ OC_1\ ;$$

puisque

$$OB_1 = OC_1, \quad AB_1 = AC_1,$$

on a

$$OB_1 + AC_1 = OC_1 + AB_1$$

et le quadrilatère est circonscriptible. OA étant la bissectrice des angles A et O, cette droite doit contenir le centre O_1 du cercle inscrit dans le quadrilatère. Menons la bissectrice de l'angle C_1 ; cette droite aussi contient O_1. Donc ce point est le point de rencontre de ces deux droites.

Ayant tiré O_1P perpendiculaire à OC_1, on aura $O_1P = r_1$. Dans le triangle OO_1C l'angle O est égal à $\frac{\pi - A}{2}$, l'angle C_1 est égal à $\frac{\pi}{4}$, donc l'angle O_1 vaut $\frac{\pi + 2A}{4}$.

Il viendra donc $OO_1 = \frac{r \sin \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi + 2A}{4}}$.

Le triangle OO_1P donne

$$r_1 = OO_1 \sin \frac{\pi - A}{2} = r \frac{\sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi - A}{2}}{\sin \frac{\pi + 2A}{4}};$$

on en tire

$$\frac{r_1}{r} = \frac{r \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{A}{2}}$$

et
$$\frac{r_1}{r - r_1} = \frac{\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{A}{2}} = \cot \frac{1}{2} A. \qquad (1)$$

De même
$$\frac{r_2}{r - r_2} = \cot \frac{1}{2} B; \qquad (2)$$

$$\frac{r_3}{r - r_3} = \cot \frac{1}{2} C. \qquad (3)$$

a) Additionnant les égalités (1) (2) (3), on obtient :

$$\frac{r_1}{r - r_1} + \frac{r_2}{r - r_2} + \frac{r_3}{r - r_3}$$
$$= \cot \frac{1}{2} A + \cot \frac{1}{2} B + \cot \frac{1}{2} C.$$

Mais, puisque $A + B + C = \pi$

on a (*) $$\cot \frac{1}{2}A + \cot \frac{1}{2}B + \cot \frac{1}{2}C$$
$$= \cot \frac{1}{2}A \cot \frac{1}{2}B \cot \frac{1}{2}C.$$

Par conséquent

$$\frac{r_1}{r - r_1} + \frac{r_2}{r - r_2} + \frac{r_3}{r - r_3}$$
$$= \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}} \sqrt{\frac{p(p-b)}{(p-c)(p-a)}} \sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}$$

c'est-à-dire

$$\frac{r_1}{r - r_1} + \frac{r_2}{r - r_2} + \frac{r_3}{r - r_3} = \frac{p}{r}.$$

b) Les équations (1) (2) (3) peuvent s'écrire

$$\frac{r - r_1}{rr_1} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}A}{r};$$

$$\frac{r - r_2}{rr_2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}B}{r};$$

$$\frac{r - r_3}{rr_3} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}C}{r};$$

ou

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}A}{r};$$

$$\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}B}{r};$$

$$\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}C}{r}.$$

(*) Desboves, *Questions de trigonométrie*, 2e éd., p. 120.

Par conséquent :

$$\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r}\right)+\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r}\right)+\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}A\operatorname{tg}\frac{1}{2}B+\operatorname{tg}\frac{1}{2}B\operatorname{tg}\frac{1}{2}C+\operatorname{tg}\frac{1}{2}C\operatorname{tg}\frac{1}{2}A}{r^2}.$$

Comme $A+B+C=\pi$

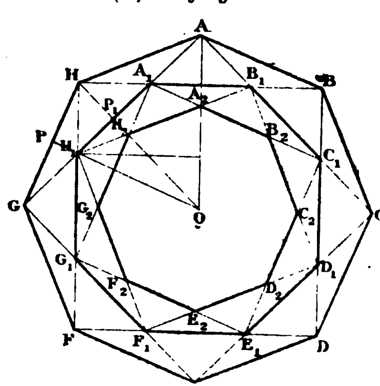
on a (*)

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}A\operatorname{tg}\frac{1}{2}B+\operatorname{tg}\frac{1}{2}B\operatorname{tg}\frac{1}{2}C+\operatorname{tg}\frac{1}{2}C\operatorname{tg}\frac{1}{2}A=1$$

il s'ensuit que

$$\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r}\right)+\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r}\right)+\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r^2}.$$

22. — (T) *En joignant alternativement deux à deux les sommets d'un polygone régulier de* n *côtés par* n *droites, on forme un second polygone de* n *côtés. Si l'on effectue sur ce nouveau polygone et sur les suivants la même opération, on propose de trouver la somme des aires de tous ces polygones.*



Appelons A, A_1, A_2, A_3, ... les aires du polygone donné et des polygones formés suivant la loi donnée; OP, OP_1, OP_2, OP_3, ... leurs apothèmes.

Les triangles rectangles OPH, OP_1A donnent

$$OP = R\cos\frac{\pi}{n}; \qquad OP_1 = R\cos\frac{2\pi}{n}$$

(*) Desboves, *Questions de trigonométrie*, 2e éd.. p. 120.

et comme les figures semblables sont entre elles comme les carrés de deux lignes homologues, on aura

$$\frac{A}{A_1} = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{n}}{\cos^2 \frac{2\pi}{n}}.$$

Cette équation montre que les aires des polygones considérés forment une progression géométrique indéfinie dont le premier terme A_1 est $A \dfrac{\cos^2 \frac{2\pi}{n}}{\cos^2 \frac{\pi}{n}}$ et la raison est $\dfrac{\cos^2 \frac{2\pi}{n}}{\cos^2 \frac{\pi}{n}}$. Comme cette dernière quantité est moindre que l'unité, la progression est décroissante; en appelant S la somme de ses termes, on aura

$$S = \frac{A \cos^2 \frac{2\pi}{n}}{\cos^2 \frac{\pi}{n} - \cos^2 \frac{2\pi}{n}}$$

ou (*)

$$S = \frac{A \cos^2 \frac{2\pi}{n}}{\sin \frac{3\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n}}.$$

Cas particuliers. — 1° Soit $n = 3$; on a alors

$$S = A \frac{\cos^2 \frac{2\pi}{3}}{\sin \pi \sin \frac{\pi}{3}},$$

et comme $\sin \pi = 0$, on aura $S = \infty$. En effectuant en effet sur le triangle l'opération indiquée par le problème, on obtient toujours le triangle donné; et comme la somme

(*) Colenso, *Plane Trigonometry*, p. 58.

d'une série infinie de termes égaux est infinie, on doit avoir $S = \infty$.

2° Si $n=4$, on a $S = A\dfrac{\cos^2 \frac{\pi}{2}}{\sin\frac{3\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}}$; et comme $\cos\frac{\pi}{2} = 0$,

$S = 0$; en effet, tous les polygones déduits d'un carré de la manière indiquée se réduisent à un point (point de rencontre des diagonales), donc leur somme est égale à o.

3° Soit $n = 6$; alors on a

$$S = A\,\frac{\cos^2\frac{2\pi}{6}}{\sin\frac{3\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6}} = A\frac{\cos^2\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3}} = A\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}A$$

III

MAXIMA ET MINIMA (*)

23. *Entre tous les rectangles qui ont la même diagonale déterminer celui* a) *de périmètre maximum,* b) *de la plus grande surface.*

Soit $AC = d$ la diagonale donnée; appellons φ l'angle BAC; alors $AB = d\cos\varphi$; $BC = d\sin\varphi$.

a) Le demi-périmètre p du triangle sera donné par la relation $p = d\left[\sin\varphi + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right]$

$$p = 2d\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$$

Le maximum de p correspond donc au maximum de $\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$, c'est-à-dire à $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

b) La surface S du rectangle sera donnée par l'équation

$$S = d^2\sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}d^2\sin 2\varphi.$$

Le maximum de S correspond donc au maximum de

(*) Toutes les questions suivantes sont tirées de l'ouvrage de M. Reidt.

sin 2φ, c'est-à-dire à $\quad 2\varphi = \frac{\pi}{2}$

et $$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

Donc : *Entre tous les rectangles ayant la même diagonale le carré est celui qui a le plus grand périmètre et la plus grande surface.*

Il s'ensuit aussi (*) : *Entre tous les rectangles ayant le même périmètre ou la même surface, le carré est celui qui a la moindre diagonale.*

24. *Un quadrilatère a deux côtés parallèles, et les deux autres égaux ; on en donne une diagonale et la somme des côtés parallèles, et on demande de trouver entre tous les quadrilatères qui satisfont à ces conditions, celui dont l'aire est un maximum.*

Soit $AC = d$ la diagonale donnée, et soit aussi donné $AB + CD = 2s$. Posons $BAC = \varphi$. En appelant h la hauteur CH du quadrilatère, on aura

$$h = d \sin \varphi.$$

La surface S du quadrilatère sera donc donnée par l'équation

$$S = sd \sin \varphi.$$

Le maximum de S correspond donc au maximum de sin φ, c'est-à-dire à

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

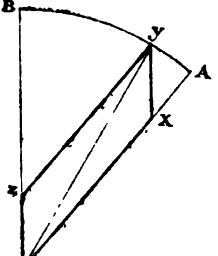
Par conséquent, *entre tous les quadrilatères proposés, celui qui a la plus grande surface a la diagonale perpendiculaire aux côtés parallèles.*

25. *Inscrire dans un secteur circulaire un parallélogramme ayant un angle commun avec le secteur, un sommet sur l'arc du secteur et dont la surface soit un maximum.*

Soit OXYZ un parallélogramme ayant un angle commun avec le secteur, et le sommet Y sur l'arc du secteur. Posons

(*) Bertrand, *Traité d'algèbre*, 1re partie, 10e éd., p. 247.

AOB $= \alpha$, AOY $= \varphi$. L'aire S du parallélogramme sera donnée par la relation



$$S = \frac{R^2 \sin\varphi \sin(\alpha - \varphi)}{\sin\alpha}.$$

Le maximum de S correspond donc au maximum de

$$\sin\varphi \sin(\alpha - \varphi)$$

ou de $\quad \cos(2\varphi - \alpha) - \cos\alpha$

Et comme cette expression atteint son maximum quand

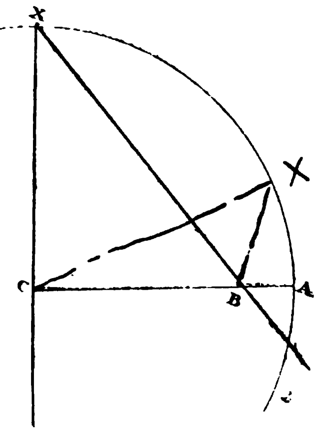
$$2\varphi - \alpha = 0$$

ou

$$\varphi = \frac{\alpha}{2},$$

nous pourrons dire que, *entre tous les parallélogrammes considérés, le losange ayant son sommet au milieu de l'arc du secteur a la plus grande surface.*

26. — *Du centre* C *d'un cercle donné on tire un rayon quelconque* CA *sur lequel on prend un segment arbitraire* CB $= a$. *Trouver le plus grand de tous les angles dont le sommet est sur la circonférence et dont les côtés passent par* B, C.



Soit x un point quelconque de la circonférence : posons

$$BXC = \varphi; \quad BX = x.$$

Le triangle BCX donne

$$a^2 = R^2 + x^2 - 2Rx\cos\varphi$$

ou

$$x^2 - 2Rx\cos\varphi + (R^2 - a^2) = 0.$$

D'où l'on tire

$$x = R\cos\varphi \pm \sqrt{a^2 - R^2(1 - \cos^2\varphi)}$$

ou $\quad x = R\cos\varphi \pm \sqrt{a^2 - R^2\sin^2\varphi}).$

Pour que le problème soit possible il faut qu'on ait

$$a^2 - R^2\sin^2\varphi \geq 0; \quad \sin\varphi \leq \frac{a}{R}.$$

Le maximum de sin φ et de φ a lieu donc quand

$$\sin \varphi = \frac{a}{R}.$$

Dans ce cas BX est perpendiculaire à BC et on déduit qu'*entre tous les angles proposés, le plus grand est celui dont le côté passant par* B *est perpendiculaire à* BC.

27. — *Entre tous les triangles ayant la même base et pour lesquels la somme des deux autres côtés est constante, déterminer celui qui a le plus grand angle au sommet.*

Soient : a la base, s la somme des deux autres côtés x, y, φ l'angle au sommet. On aura :

$$x + y = s; \quad (1)$$
$$a^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi. \quad (2)$$

L'équation (2) peut s'écrire :

$$a^2 = (x + y)^2 - 4xy \cos^2 \frac{1}{2} \varphi;$$

c'est-à-dire $$a^2 = s^2 - 4\, xy \cos^2 \frac{1}{2} \varphi$$

d'où l'on tire $$\cos^2 \frac{1}{2} \varphi = \frac{s^2 - a^2}{4xy}.$$

Le maximum de $\frac{1}{2} \varphi$ (et de φ) correspond au minimum de $\cos \frac{1}{2} \varphi$ (et de $\cos^2 \frac{1}{2} \varphi$) : or, le minimum d'une fraction correspond au maximum de son dénominateur ; donc le maximum de φ correspond au maximum du produit xy de deux nombres dont la somme s est constante.

L'angle φ atteint donc son maximum quand (*)

$$x = y = \frac{1}{2} s.$$

Donc : *Entre tous les triangles qui ont même base et même somme des deux autres côtés, le triangle isoscèle a le plus grand angle au sommet.*

28. — *Partager un arc en deux parties telles que :* a) *la*

(*) **Bertrand**, *l. c.*, p. 233.

somme, b) *le produit*, c) *la somme des carrés des cordes soient maximum.*

Soit $AB = c$ la corde de l'arc α donné, X un point quelconque de la circonférence. Posons

$$AX = x, \quad BX = y, \quad BAX = \varphi, \quad ABX = \psi.$$

On aura
$$x = 2R \sin \varphi \qquad (1)$$
$$y = 2R \sin \psi \qquad (2)$$

a) Des équations (1) (2) on tire

$$x + y = 4R \sin \frac{1}{2} (\varphi + \psi) \cos \frac{1}{2} (\varphi - \psi)$$

ou
$$x + y = 4R \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} (\varphi - \psi).$$

Le maximum de $x + y$ correspond donc au maximum de $\cos \frac{1}{2} (\varphi - \psi)$, c'est-à-dire à

$$\varphi = \psi.$$

b) Les équations (1) (2) donnent aussi

$$xy = 4R^2 \sin \varphi \sin \psi$$

ou
$$xy = 2R^2 [\cos (\varphi - \psi) + \cos \alpha] o.$$

Le maximum de xy correspond donc au maximum de $\cos (\varphi - \psi)$, c'est-à-dire à $\varphi = \psi$.

c) On a encore des équations (1) (2)

$$x^2 + y^2 = 4R^2 (\sin^2 \varphi + \sin^2 \psi).$$

Le maximum de $x^2 + y^2$ correspond donc au maximum de

$$\sin^2 \varphi + \sin^2 \psi = (\sin \varphi + \sin \psi)^2 - 2 \sin \varphi \sin \psi$$
$$= 4 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha \cos^2 \frac{1}{2} (\varphi - \psi) - \cos \alpha - \cos (\varphi - \psi)$$
$$= 1 - \cos \alpha + 2 \cos^2 \frac{1}{2} (\varphi - \psi) \cos \alpha$$

c'est-à-dire au maximum de $\cos \frac{1}{2} (\varphi - \psi)$.

La fonction $x^2 + y^2$ atteint donc son maximum quand

$$\varphi = \psi.$$

Concluons donc : *Pour partager un arc en deux parties telles que la somme, le produit, ou la somme des carrés des cordes soient maximum, il faut le partager en deux parties égales.*

29. — *Entre tous les triangles isoscèles inscrits dans un cercle*

donné quel est celui dont, a) *le périmètre,* b) *la surface est un maximum ?*

Soit φ l'angle au sommet du triangle isoscèle ; les autres angles seront chacun égal à $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\varphi$. Sa base sera donc $2R \sin \varphi$ et chacun de ses côtés sera $2R \cos \frac{1}{2}\varphi$.

a) Le périmètre de ce triangle est donc

$$2R\left[\sin\varphi + 2\cos\frac{1}{2}\varphi\right] = 4R\cos\frac{1}{2}\varphi\left(1 + \sin\frac{1}{2}\varphi\right).$$

Ayant posé

$$\frac{1}{2}\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi, \qquad (1)$$

la question est réduite à trouver le maximum de

$$\sin\psi(1 + \cos\psi) \text{ ou de } 4\sin\frac{1}{2}\psi\cos^3\frac{1}{2}\psi,$$

qui est le même de celui de l'expression

$$\sin^2\frac{1}{2}\psi \times \left(1 - \sin^2\frac{1}{2}\psi\right)^3.$$

Comme les quantités positives $\sin^2\frac{1}{2}\psi$, $1 - \sin^2\frac{1}{2}\psi$ ont une somme constante, le maximum de ce produit sera atteint quand (*)

$$\sin^2\frac{1}{2}\psi = \frac{1 - \sin^2\frac{1}{2}\psi}{3};$$

d'où l'on tire $\sin\frac{1}{2}\psi = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}\psi = \frac{\pi}{2}$.

La relation (1) donne par conséquent

$$\varphi = \pi - 2\psi = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

b) La surface S du triangle est donnée par l'équation

$$S = 2R^2\cos^2\frac{1}{2}\varphi\sin\varphi = 4R^3\sin\frac{1}{2}\varphi\cos^3\frac{1}{2}\varphi.$$

Donc le maximum de S correspond au maximum de

$$\left(1 - \sin^2\frac{1}{2}\varphi\right)^3\sin^2\frac{1}{2}\varphi.$$

(*) Bertrand, *l. c.*, p. 245.

Cette expression atteint son maximum quand

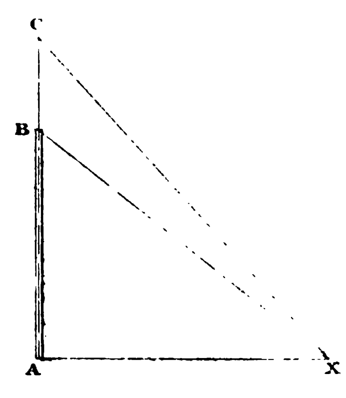
$$\frac{1 - \sin^2 \frac{1}{2}\varphi}{3} = \sin^2 \frac{1}{2}\varphi$$

De cette équation on tire

$$\sin \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2} \text{ et } \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Donc : *Entre tous les triangles isoscèles inscriptibles dans un cercle donné, le triangle équilatéral est celui dont le périmètre et l'aire sont maxima.*

30. — *La hauteur* AB *d'une tour est* a*; sur son sommet est fixé un étendard* BC *de hauteur* b. *On demande de trouver le point du terrain horizontal d'où l'étendard est vu sous l'angle maximum.*



Soit X le point cherché. En posant

$$AX = x; \quad AXC = \varphi;$$
$$AXB = \psi; \quad BXC = \mu,$$

on aura :

$$\operatorname{tg} \mu = \operatorname{tg}(\varphi - \psi) = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \psi}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi}$$

Or on a

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a+b}{x}; \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{a}{x};$$

donc, toute réduction faite,

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{bx}{x^2 + a(a+b)}$$

ou $$x^2 \operatorname{tg} \mu - bx + a(a+b) \operatorname{tg} \mu = 0.$$

D'où l'on tire

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a(a+b) \operatorname{tg}^2 \mu}}{2 \operatorname{tg} \mu}.$$

Les racines de cette équation seront réelles si

$$b^2 - 4a(a+b) \operatorname{tg}^2 \mu \geqq 0$$

ou si $$\operatorname{tg}^2 \mu \leqq \frac{b^2}{4a(a+b)}$$

Le maximum de tg μ et de μ sera donc atteint, quand

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{b}{2\sqrt{a(a+b)}}.$$

Alors $$x = \sqrt{a(a+b)},$$
qui est l'expression de la distance cherchée.

QUESTIONS D'EXAMEN

Démontrer que, quel que soit l'entier positif n, $2^{4n} - 1$ *est divisible par* 5.

En effet, cette expression peut s'écrire

$$(2^4)^n - 1.$$

Or, on sait que 2^4 est terminé par 6, et que toutes les puissances d'un nombre terminé par 6 sont elles-mêmes terminées par 6. Donc, en retranchant l'unité, la différence sera terminée par 5.

On peut remarquer aussi que ce nombre peut s'écrire

$$(2^n)^4 - 1.$$

Or 1 peut être considéré comme la quatrième puissance de l'unité et l'on sait que, lorsque deux nombres sont premiers avec 5, la différence de leurs quatrièmes puissances est divisible par 5; mais 2^n est premier avec 5, donc

$$(2^n)^4 - 1$$

est divisible par 5.

Cette seconde démonstration s'applique à un nombre quelconque premier avec 5 et n'est même qu'une conséquence du théorème de Fermat.

La condition nécessaire et suffisante pour que deux petits cercles d'une sphère se coupent à angle droit, est que le sommet du cône circonscrit à la sphère suivant l'un des cercles soit dans le plan de l'autre.

On sait que, dans une surface de révolution quelconque, un parallèle rencontre tous les méridiens à angle droit; que

les génératrices du cône de révolution circonscrit à la surface le long d'un parallèle donné sont tangentes aux divers méridiens aux points où ils coupent ce parallèle et rencontrent l'axe au même point; enfin, que chacune de ces génératrices est perpendiculaire à la tangente au parallèle au point de contact.

D'après cela, si je considère une sphère et deux petits cercles se coupant à angle droit, la tangente à l'un de ces cercles au point d'intersection est dans le plan tangent, et perpendiculaire à la tangente à l'autre cercle; elle se confond donc avec une génératrice du cône circonscrit à la sphère le long de ce second cercle, et, par suite, contient le sommet de ce cône; elle est du reste aussi dans le plan du premier cercle; donc la condition nécessaire pour que les deux cercles se coupent à angle droit est que le sommet de l'un des cônes soit dans le plan de l'autre cercle.

Je dis de plus que la condition est suffisante: car, si par l'une des génératrices du cône circonscrit à la sphère le long d'un cercle donné, je fais passer un plan quelconque, ce plan coupe la sphère suivant un cercle ayant pour tangente la génératrice considérée, et, par conséquent, orthogonal au cercle donné.

Le raisonnement précédent montre bien que la condition s'étend à chacun des deux sommets; on peut voir, du reste, que, le sommet du cône étant le pôle du plan du cercle de contact, le pôle de tout plan qui passe par ce sommet est situé dans le plan de ce cercle de contact; la condition indiquée est donc bien applicable pour les deux sommets.

On a un triangle ABC, *inscrit dans un cercle. Par le sommet* A *on mène une tangente au cercle; d'un point* M *de la circonférence on abaisse des perpendiculaires* MP *sur la tangente,* MQ, MR, MS *respectivement sur* BC, CA *et* AB. *Démontrer que l'on a*

$$MR.\ MS = MP.\ MQ.$$

Ce théorème, que l'on pourrait démontrer directement, est une conséquence du théorème suivant et se démontre de même :

Si un quadrilatère ABCD *est inscrit à une circonférence, et que d'un point* M *de cette circonférence on abaisse des perpendiculaires sur les côtés, le produit des perpendiculaires abaissées sur deux côtés opposés est égal au produit des deux autres* (*).

En effet, si nous menons les droites MA et MC, les deux triangles MAP, MCR, qui sont rectangles et ont un angle aigu égal, sont semblables, et donnent

$$\frac{\text{MP}}{\text{MR}} = \frac{\text{MA}}{\text{MC}}.$$

De même les deux quadrilatères ABCM, SBQM étant l'un inscrit, l'autre inscriptible puisqu'il a deux angles opposés droits, les angles AMS, CMQ sont égaux et on en tire

$$\frac{\text{MS}}{\text{MQ}} = \frac{\text{MA}}{\text{MC}}.$$

On en déduit l'égalité $\frac{\text{MS}}{\text{MQ}} = \frac{\text{MP}}{\text{MR}}$.

Si maintenant nous supposons que le point D se rapproche indéfiniment du point A, le côté AD devient la tangente en A et comme, dans le raisonnement, nous ne nous sommes pas occupés de la longueur des côtés, nous arrivons au théorème proposé.

Si nous supposons successivement que ce soit l'un des côtés autre que AC qui se réduise à la tangente, nous aurons, en appelant MP, MT, MU les perpendiculaires sur les tangentes menées à la circonférence par les trois sommets du triangle inscrit :

$$\text{MP. MQ} = \text{MR. MS}$$
$$\text{MT. MR} = \text{MQ. MS}$$
$$\text{MU. MS} = \text{MR. MQ}.$$

En multipliant membre à membre, il vient, après réduction

$$\text{MP. MT. MU.} = \text{MR. MQ. MS.}$$

Donc, si l'on considère un triangle inscrit à une circonférence et le triangle circonscrit tel que les points de contact de ce dernier triangle soient aux sommets du premier, le produit des perpendiculaires abaissées d'un point de la circonférence sur les côtés du triangle inscrit est égal aux

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

produit des perpendiculaires abaissées du même point sur les côtés du triangle circonscrit.

Soient AB *un arc de cercle,* M *son milieu,* C *et* D *deux points quelconques de la circonférence; démontrer que, si l'on a*

$$\frac{\sin CA}{\sin CB} = \frac{\sin DA}{\sin DB},$$

on aura $$tg^2 AM = tg\ MC\ .\ MD\ (*).$$

Il est d'abord évident que, des deux points C et D, l'un est sur l'arc AMB, l'autre sur l'autre partie de la circonférence; sans quoi, si les deux points C et D étaient entre A et B, la somme des arcs CA et CB étant égale à DA + DB et les sinus ayant le même rapport, les points C et D seraient confondus.

Cela posé, on a $AB = CA + CB$,

avec $AB = DA - DB$, par exemple.

Puis, de l'égalité proposée, on tire, par une propriété des proportions,

$$\frac{\sin CA - \sin CB}{\sin CA + \sin CB} = \frac{\sin DA - \sin DB}{\sin DA + \sin DB},$$

ou bien
$$\frac{tg\,\frac{CA - CB}{2}}{tg\,\frac{CA + CB}{2}} = \frac{tg\,\frac{DA - DB}{2}}{tg\,\frac{DA + DB}{2}}.$$

Or on a $CA - CB = 2MC;$

$$CA + CB = DA - DB = 2AM;$$
$$DA + DB = 2DM.$$

On a donc bien, en remplaçant,

$$\frac{tg\ MC}{tg\ MA} = \frac{tg\ MA}{tg\ MD}.$$

Étant donné l'angle x *par la relation*

$$\sin x = \frac{a - b}{a + b},$$

déterminer $$tg\left(45 - \frac{x}{2}\right).$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

De la relation donnée, on tire facilement

$$\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = \frac{b}{a}$$

ou bien

$$\frac{\operatorname{tg}\left(45 - \frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{x}{2}\right)} = \frac{b}{a}.$$

Mais les angles $45 - \frac{x}{2}$ et $45 + \frac{x}{2}$ sont complémentaires; on a donc $\operatorname{tg}^2\left(45 - \frac{x}{2}\right) = \frac{b}{a}$, qui est la relation cherchée.

Des droites de l'espace qui coupent deux autres droites données en parties proportionnelles sont-elles parallèles à un même plan (*) ?

Soient les deux droites AB et CD, partagées en parties proportionnelles aux points EF pour l'une, HK pour l'autre; je mène AM égal et parallèle à CD, et je prends les points I. L tels que AI = CH, IL = HK; alors IH est parallèle à AC; il en est de même pour les lignes LK et MD. De même, je mène CQ égal et parallèle à AB, et je prends AE = CN, EF = NP. Donc EN, FP et BQ sont parallèles à AC. On verrait de même que les lignes EI, FL, BM sont parallèles entre elles; donc le plan IEH est parallèle au plan LFK et au plan MBD. Il en résulte que toutes les droites qui partagent AB et CD en parties proportionnelles sont parallèles au plan qui est parallèle à BD et AC.

QUESTION 186

Solution par M. du Motel, élève au Lycée Saint-Louis.

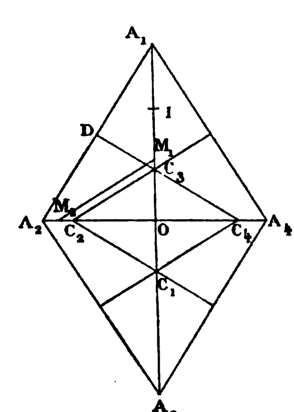
On considère un losange $A_1 A_2 A_3 A_4$. *Soit* C_4 *le centre du cercle circonscrit au triangle* $A_1 A_2 A_3$. *On a ainsi quatre points* C_1, C_2, C_3, C_4. *On prend les milieux des longueurs* $A_1 C_1$, $A_2 C_2$, $A_3 C_3$,

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

$A_4 C_4$. *Démontrer que la figure formée par ces quatre points est un losange homothétique à celui des points* C_1, C_2, C_3, C_4.

(De Longchamps).

Soient M_1, M_2, les milieux de $A_1 C_1$, $A_2 C_2$. Il suffit de démontrer que $\frac{OM_2}{OM_1} = \frac{OC_2}{OC_3}$.



Or

$$OM_2 = \frac{OC_2 + OA_2}{2} = \frac{A_2 C_4}{2}.$$

De plus I étant le milieu de A C_3, $IM_1 = OC_3$. Donc $OM_1 = IC_3 = \frac{A_1 C_3}{2}$.

Dès lors

$$\frac{OM_2}{OM_1} = \frac{A_2 C_4}{A_1 C_3}.$$

Soit D le milieu de $A_1 A_2$.

Les triangles semblables $A_2 C_4 D$, $A_1 D C_3$, donnent

$$\frac{A_1 C_4}{A_1 C_3} = \frac{A_2 D}{D C_3} = \frac{A_1 D}{D C_3};$$

mais dans les triangles semblables $A_1 D C_3$, $C_2 OC_3$ on a

$$\frac{A_1 D}{D C_3} = \frac{OC_2}{OC_3};$$

donc

$$\frac{A_2 C_4}{A_1 C_3} = \frac{OC_2}{OC_3}$$

et le théorème est démontré.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. H. Bourget, à Aix; Lagier, à Autun.

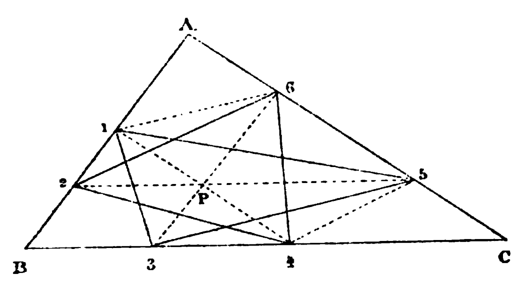
QUESTION 266

Solution par M. H. Bourget, élève au Collège d'Aix.

On donne un point P *dans l'intérieur d'un triangle. Par ce point, on mène des parallèles aux côtés; la parallèle* AC *rencontre les côtés aux points* 1 *et* 4; *la parallèle* BC *aux points* 2 *et* 5,

enfin la parallèle AB *rencontre les côtés aux points* 3 *et* 6 ; *en joignant les points* 1, 3, 5, *on forme un triangle; de même pour les points* 2, 4, 6. *On demande : 1° de démontrer que ces deux triangles sont équivalents ; 2° de déterminer le point* P *de façon que le triangle* 1, 3, 5 *soit maximum.*

1° Tirons les lignes 2, 3; 1, 6; 4, 5; le triangle 2 3 P est équivalent au triangle 1 3 P comme ayant même base et même hauteur; de même 1 6 P et 4 5 P sont respectivement équivalents à 1 5 P et à 3 5 P. Ainsi le triangle 1 3 5 est équivalent à



la somme des triangles 2 3 P, 1 6 P, 4 5 P. On prouvera de même que le triangle 2 4 6 est équivalent à la même somme ; donc, les deux triangles 2 4 6, 1 3 5 sont équivalents entre eux.

2° Il s'agit de trouver le maximum de la somme des triangles 2 3 P, 1 6 P, 4 5 P. Or, ces triangles étant chacun la moitié d'un parallélogramme, la question revient à trouver le maximum de la somme des trois parallélogrammes B 2 P 3, A 6 P 1, C 4 P 5. On voit que cette somme sera maxima lorsque la somme des surfaces 3 4 P, 5 6 P, 1 2 P sera minima. Soient α, β, γ ces surfaces semblables entre elles et semblables au grand triangle. Si l'on désigne par Σ la somme de α, β et γ, et si l'on pose $34 = u$, $B3 = v$, $4C = w$, on aura

$$\frac{\alpha}{u^2} = \frac{\beta}{v^2} = \frac{\gamma}{w^2} = \frac{\Sigma}{u^2 + v^2 + w^2} = \frac{S}{a^2},$$

a étant la ligne BC.

De là on tire $\quad \Sigma = \dfrac{S(u^2 + v^2 + w^2)}{a^2}.$

$\dfrac{S}{a^2}$ étant une constante, Σ sera minimum quand la somme $u^2 + v^2 + w^2$ sera minima.

Le problème est donc ramené au suivant :

Trouver sur une droite a *deux points tels que la somme des carrés des segments* x, y, z, *déterminés par ces points, soit minima.*

Dans la solution de ce problème nous distinguerons trois cas :

Ou les segments sont égaux,

Ou il y en a deux plus petits et un qui sera forcément plus grand,

Ou deux plus grands et un plus petit.

Premier cas. — Soit $x = y = z = \frac{a}{3}$.

En élevant au carré x, y et z et faisant la somme

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{3}.$$

Deuxième cas. — Soit $x = \frac{a}{3} - \varepsilon$; $y = \frac{a}{3} - \delta$; alors

$$z = \frac{a}{3} + \varepsilon + \delta,$$

et, de même que dans le cas précédent, il vient

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^3}{9} + 2\varepsilon^2 + 2\delta^2 + 2\varepsilon\delta;$$

d'où nous concluons que de ces deux cas le premier est le minimum.

Troisième cas. — Soit $x = \frac{a}{3} + \varepsilon$; $y = \frac{a}{3} + \delta$; dès lors $z = \frac{a}{3} - \varepsilon - \delta$. Ce cas est identique au précédent, si nous changeons les signes de ε et de δ. Et comme dans le cas précédent, ces quantités n'entrent que comme facteurs ou comme carrés; on trouvera donc la même valeur pour l'expression considérée.

Donc dans tous les cas le minimum de la somme $x^2 + y^2 + z^2$ sera égal à $\frac{a^2}{3}$ et x, y, z égaleront chacun $\frac{a}{3}$. C'est-à-dire qu'il faut par le tiers de a mener une parallèle à un côté du triangle ABC, faire de même par les deux tiers, et l'in-

tersection de ces droites sera le point P, qui donnera le maximum de l'aire du triangle 1 3 5. Ce point P sera le point de rencontre des médianes du triangle ABC.

QUESTION 281

Solution par M. Joly, élève au Lycée de Tarbes.

Résoudre le système

$$\frac{1}{ax - by - 1} + \frac{1}{by - ax - 1} = \frac{1}{ax + by - 1}.$$

$$bx + ay = m.$$

Chassant les dénominateurs de la première équation, il vient, après réductions

$$a^2x^2 - 2ax + 1 = 2by\,(1 + ax - b^2y^2);$$

remplaçons y par sa valeur $\frac{m - bx}{a}$, on a, après simplification,

$$x^2(a^2 + b^2) - 2x[a^3 + 2a^2bm - 2ab^2 + 2mb^3] + (a - bm)^2 = 0,$$

et si l'on pose $3b^2(a^2 + b^2)^2 = A,$

$$2a^3b^3 + 4ab^5 - 2a^5b - 2a^4b - .2a^2b^3 - b^5 = B$$

$$3a^2b^2(a^2 - b^2) = C,$$

la valeur de x devient

$$x = \frac{a^3 + 2a^2b - 2ab^2 + 2mb^3 \pm \sqrt{Am^2 - 2Bm - C}}{(a^2 + b^2)^2}.$$

Pour que les valeurs de x soient réelles, on doit avoir

$$Am^2 - 2Bm - C > 0$$

ou $$A(m - m')(m - m'') > 0,$$

ce qui exige que $m \geq m'$; $m \leq m''$.

Si ces conditions sont remplies, on aura pour chaque inconnue des valeurs bien déterminées.

$m = m'$ est un minimum

$m = m''$ est un maximum.

On déduira aisément les valeurs correspondantes de x et de y.

QUESTION 284

Solution par M. L. Malcor, élève au Lycée du Havre.

Résoudre le système $\dfrac{x^5 + y^5}{x^3 + y^3} = \dfrac{121}{13}$.

On a, en divisant haut et bas par $x + y$:

$$\frac{x^5 + y^5}{x^3 + y^3} = \frac{(x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 - xy\,(x^2 + y^2)}{(x + y)^2 - 3\,xy};$$

or $\qquad x + y = 2\,; \qquad$ donc $x^2 + y^2 = 4 - 2\,xy$.

remplaçant et simplifiant et il vient

$$65\,x^2y^2 + 103\,xy - 276 = -\,0\,;$$

d'où $\qquad (1)\; xy = \frac{92}{65}$ et $xy = 3$ (2);

(1) donne pour x et y des valeurs imaginaires Si l'on prend $xy = -3$, les valeurs d'x et d'y sont données par l'équation

$$X^2 - 2X - 3 = 0\,;$$

d'où $x = 3$, $y = -1$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Fleury, au Havre; Fievet, Boudignier, à Lille; Leclair, Masserand, à Passy; Bourget, à Aix; Gobert, au collège Chaptal, à Paris; Lapareillé, lycée Henri IV; Hellot, Tinel, à Rouen; Baudoin, à Beauvais; Barchat, à Vitry-le-François; de Lagenardière, à Besançon; Henry, à Brechaincourt (Vosges); Calon, lycée Louis-le-Grand; Simonet, à Neufchâteau; Gino Loria, à Mantoue; Joly, à Tarbes; Perrier, à Lons-le-Saulnier.

SUR
UNE LIMITE SUPÉRIEURE DES RACINES D'UNE ÉQUATION

Par M. **Catalan**.

Les *Nouvelles Annales* ont publié récemment (*) un intéressant article de M. Candèze, élève de l'École polytechnique; mais la limite indiquée est moins avantageuse qu'une autre limite attribuée à Lagrange (**).

(*) *Nouvelles Annales*, février 1881.

(**) *Nouvelles Annales* (t. Ier, 1842, p. 58). — Cours d'analyse de l'université de Liége.

En effet,

$$Ax^m \ldots - Nx^{m-n} - Px^{m-p} \ldots - Qx^{m-q} = o \quad (1)$$

étant la préposée, posons $x = Ky$, et disposons du nombre K de manière que dans la transformée

$$AK^m y^m \ldots - NK^{m-n} y^{m-n} \ldots - PK^{m-p} y^{m-p} = o$$

le coefficient du premier terme surpasse tous les coefficients négatifs (ceux-ci étant, bien entendu, pris en valeurs absolues). Alors, d'après un lemne préliminaire, 2 sera une limite supérieure des racines de la transformée.

Or, la condition énoncée donne

$$K > \sqrt[n]{\frac{N}{A}},\ K > \sqrt[p]{\frac{P}{A}}\ K, > \sqrt[q]{\frac{Q}{A}}, \ldots$$

par conséquent, *la plus grande des quantités.*

$$2\sqrt[n]{\frac{N}{A}},\ 2\sqrt[p]{\frac{P}{A}},\ 2\sqrt[q]{\frac{Q}{R}}, \ldots$$

sera limite supérieure.

2° Supposons pour fixer les idées

$$\sqrt[p]{\frac{P}{A}} > \sqrt[q]{\frac{Q}{A}} > \sqrt[n]{\frac{N}{A}} \ldots$$

Il est clair que l'on a

$$2\sqrt[p]{\frac{P}{A}} > \sqrt{\frac{P}{A}} + \sqrt{\frac{Q}{A}}.$$

Donc la limite trouvée par M. Candèze est moins *avantageuse* que l'autre.

NOTE SUR LE THÉORÈME DE STURM

Lorsqu'on applique le théorème de Sturm à la recherche des conditions de réalité des racines d'une équation de degré m, on est conduit à poser $m - 1$ inégalités constituant $m - 1$ conditions. Ces conditions sont-elles distinctes les unes des autres? peuvent-elles en général se ramener à un nombre de conditions moindre?

Soient V, V_1, V_2,... V_m les polynômes composant la suite de Sturm pour l'équation $V = 0$ de degré m ; pour que les racines soient toutes réelles, on sait que les coefficients 1, p_1, p_2, ... p_m des premiers termes de V, V_1, V_2, ... V_m doivent être tous positifs. On peut ajouter qu'il y aura autant de couples de racines imaginaires que de variations dans la suite 1, p_1, p_2, ...p_m (dont les deux premiers termes sont essentiellement positifs). Le nombre maximum de variations possibles est évidemment $m - 1$; mais il ne peut être atteint lorsque m surpasse 2, car on aurait $2m - 2$ racines imaginaires, nombre plus grand que le degré de l'équation. Si l'on forme le tableau de toutes les alternances de signes que peuvent présenter les $m - 1$ quantités p_2, p_3, ... p_m, il est assez facile de reconnaître que le nombre des combinaisons possibles est 2^{m-1} ; mais il faudra rejeter toutes celles qui donnent un nombre de variations supérieur à $\frac{m}{2}$ dans la suite complète, si m est pair, supérieur à $\frac{m-1}{2}$, si m est impair.

On ne peut donc pas disposer tout à fait arbitrairement des signes de p_2, p_3, ... p_m ; ces fonctions des coefficients de l'équation ne sont pas indépendantes les unes des autres. Toutefois il n'est pas exact de dire que les conditions de réalité des racines fournies par le théorème de Sturm rentrent nécessairement et dans tous les cas les unes dans les autres.

Ce qui est seulement vrai, c'est qu'on n'a pas le droit de changer arbitrairement le sens des inégalités qui expriment ces conditions, car on pourrait être conduit à des absurdités. Nous allons éclairer ces considérations par des exemples.

1° *Équation du troisième degré.* — On a

$V = x^3 + 3px^2 + 3qx + r$

$V_1 = x^2 + 2px + q$

$V_2 = 2x(p^2 - q) + pq - r \dots (p^2 - q = p_2)$

$V_3 = p_3 = (pq - r)(4p^3 - 5pq + r) - 4q(p^2 - q)^2$

Toutes les combinaisons de signes des p_i sont données

par le tableau :

$(+ + + +)\ (+ + + -)\ (+ + - -)\ (+ + - +)$.

La dernière ne peut avoir lieu, car on aurait deux couples de racines imaginaires. Donc, si p_3 est positif, p_2 le sera aussi ; ainsi, pour l'équation du 3e degré, les conditions de réalité des racines, $p_2 > o$, $p_3 > o$ se réduisent à une seule : $p_3 > o$.

C'est ce qu'il est facile de vérifier directement.

La condition $p_3 > o$ peut s'écrire

$$(pq - r)[4p(p^2 - q) - (pq - r)] - 4q(p^2 - q)^2 > o$$

ou $4q(p^2 - q)^2 - 4p(p^2 - q)(pq - r) + (pq - r)^2 < o$.

Si q est négatif, la condition $p_2 > o$ ou $p^2 - q > o$ est satisfaite d'elle-même. Si q est positif, l'inégalité ci-dessus peut s'écrire

$$(p^2 - q)^2 - \frac{p}{q}(p^2 - q)(pq - r) + \frac{(pq - r)^2}{4q} < o$$

$$\left[p^2 - q - \frac{p}{2q}(pq - r)\right]^2 + \frac{(pq - r)^2}{4q} - \frac{p^2(pq - r)^2}{4q^2} < o$$

$$\left[p^2 - q - \frac{p}{2q}(pq - r)\right]^2 + \frac{(pq - r)^2}{4q}\left[1 - \frac{p^2}{q}\right] < o$$

et l'on doit avoir nécessairement $1 - \dfrac{p^2}{q} < o$ ou $p^2 - q > o$.

2° *Équation du quatrième degré.* — Nous considérerons l'équation simplifiée $x^4 + 6px^2 + 4qx + r = o$. On a

$V_1 = x^3 + 3px + q$

$V_2 = - 3px^2 - 3qx - r \ldots (p_2 = - p)$

$V_3 = x(pr - 3q^2 - 9p^3) - q(3p^2 + r) \ldots (p_3 = pr - 3q^2 - 9p^3)$

$V_4 = p_4 = r(pr - 3q^2 - 9p^3)^2 + 3pq^2(3p^2 + r)^2$
$\qquad + 3q^2(3p^2 + r)(pr - 3q^2 - 9p^3)$.

Les conditions de réalité sont $- p > o$, $p_3 > o$, $p_4 > o$.

Toutes les combinaisons de signes des p_i sont

$(+ + + + + +)\ (+ + + + + -)\ (+ + + + - +)\ (+ + + - - -)$
$(+ + - + + +)\ (+ + - - - +)\ (+ + - - - -)\ (+ + - - + -)$

On ne peut plus dire ici que les trois conditions de réalité rentrent les unes dans les autres. Mais il y a une combinaison de signes qui ne peut se présenter, c'est la dernière : car elle donnerait trois couples de racines imaginaires.

Il est très facile de voir directement qu'on ne peut avoir

en même temps $p_2 < 0$, $p_3 > 0$, $p_4 < 0$ ou bien $p > 0$.
$pr - 3q^2 - 9p^3 > 0$, $p_4 < 0$.

Si les deux premières inégalités ont lieu, r est nécessairement positif; alors les trois produits dont la somme constitue p_4 sont séparément positifs et on ne peut avoir $p_4 < 0$.

3° *Équation du cinquième degré.* — La formation de la suite de Sturm conduisant à des calculs d'une excessive longueur, nous ferons seulement les remarques suivantes.

Il y a seize combinaisons de signes pour les quantités p_2, p_3, p_4 et p_5. Mais parmi ces seize combinaisons, il y en a cinq qui ne peuvent se présenter, savoir

$$(+-+-)\ (-+--)\ (-++-)\ (--+-)\ (-+-+).$$

Les quatre premières donnent trois couples de racines imaginaires, la cinquième donne quatre couples.

SUR L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ

Par M. **Kœnigs**, élève à l'École normale supérieure.

Rappelons d'abord ce théorème :

Si $f(x)$ est un polynôme entier en x et que deux valeurs α et β d'x donnent pour $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ des valeurs de signes contraires, il y a sûrement entre α et β une racine de $f(x) = 0$.

En substituant $-\infty$, 0 et $+\infty$ dans une équation de degré impair, par exemple dans $x^3 + px^2 + qx + r = f(x) = 0$, on trouve les signes $-$, $+$, $+$ ou $-$, $-$ $+$ selon que r est positif ou négatif: il y a dans un cas une racine négative et dans l'autre une racine positive. Ce qui montre dans tous les cas que

L'équation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ admet toujours une racine réelle. Appelons a cette racine et posons

$$f_1(x) = x^2 + (p + a)\, x + (a^2 + pa + q).$$

En divisant $f(x)$ par $(x - a)$ on trouve

$$f(x) = (x - a)\, f_1(x) + f(a),$$

et comme $f(a) = 0$,

$$f(x) = (x - a)\, f_1(x).$$



On démontre dès les débuts de l'Algèbre que tout polynôme du degré n qui s'annule pour plus de n valeurs distinctes données à x est identiquement nul : ainsi $f(x) = 0$ n'a pas plus de trois racines. L'une d'elles est a, les deux autres sont celles qui annulent $f_1(x)$. La condition de réalité des racines de $f_1(x) = 0$ s'exprime en posant

$$\varphi(x) = 3x^2 + 2px + 4q - p^2,$$

par l'inégalité $\varphi(a) < 0$.

Si les racines de $\varphi(x) = 0$ sont imaginaires, c'est-à-dire si $p^2 - 3q < 0$, $\varphi(x)$ n'est jamais négatif et $f(x) = 0$ n'a qu'une racine réelle.

Si les racines α et β de $\varphi(x) = 0$ sont réelles, l'inégalité $\varphi(a) < 0$ exprime que a est compris entre α et β. En résumé, posons

$$\alpha = \frac{-p - 2\sqrt{p^2 - 3q}}{3}, \qquad \beta = \frac{-p + 2\sqrt{p^2 - 3q}}{3}.$$

Si les racines de l'équation $f(x) = 0$ *sont toutes réelles, elles sont comprises entre* α *et* β.

Si une seule racine de l'équation $f(x) = 0$ *est réelle, ou bien* α *et* β *sont imaginaires* ($p^2 - 3q < 0$), *ou bien si* α *et* β *sont réelles, l'unique racine de* $f(x) = 0$ *est extérieure à ces quantités.*

Supposons toutes les racines de $f(x) = 0$ réelles, et soient $a < b < c$ ces racines. On obtient en substituant $-\infty$ et $(a - \varepsilon)$ le signe $-$; comme $\alpha < a$ le résultat de la substitution de α est négatif, car s'il était positif il y aurait une racine entre $-\infty$ et α, et les deux autres ne sauraient être réelles : pour la même raison $f(\beta) > 0$.

Ainsi quand les racines sont réelles, on a $f(\alpha) < 0$.

Supposons réciproquement que $f(\alpha) < 0$ et $f(\beta) > 0$; il y y a une racine réelle de $f(x) = 0$ comprise entre α et β et par suite, en vertu d'un théorème précédent, en appelant a cette racine, $\varphi(a) < 0$.

Ce qui exprime que les deux autres racines b et c sont réelles, donc

La condition nécessaire et suffisante pour que $f(x) = 0$ *ait ses trois racines réelles, c'est que* $f(\alpha) < 0$ *et* $f(\beta) > 0$.

En effectuant les substitutions, on trouve

$$2p^3 - 9pq + 27\,r - 2\,(p^2 - 3q)\sqrt{p^2 - 3q} < 0.$$
$$2p^3 - 9pq + 27\,r + 2\,(p^2 - 3q)\sqrt{p^2 - 3q} > 0.$$

c'est-à-dire

$$-\,2(p^2 - 3q)\sqrt{p^2 - 3q} < 2\,p^3 - 9pq + 27\,r < 2\,(p^2 - 3q)\sqrt{p^2 - 3q}$$

Or on sait qu'en désignant par A une quantité positive, la condition

$X^2 - A^2 < 0$ comprend les suivantes $-A < X < A$.

L'inégalité ci-dessus se traduit donc de la sorte :

$$(2p^3 - 9pq + 27r)^2 - 4(p^2 - 3q)^3 < 0$$

ou bien

$$-\,(4q^3 + 27\,r^2) + 18\,pqr + p^2\,q^2 - 4p^3r > 0.$$

Ce qui est la condition bien connue pour que les trois racines soient réelles.

SUR LE THÉORÈME DE PASCAL

On sait comment on déduit ce théorème de cette propriété plus générale des coniques : *Si trois coniques* S_1, S_2, S_3, *ont une sécante commune* Δ, *les cordes* Δ_1 *communes à* S_2 *et* S_3, Δ_2 *à* S_1, S_3 ; Δ_3 *a* S_1, S_2, *concourent au même point.*

Mais il est intéressant de démontrer directement ce théorème, et on peut le faire très simplement comme nous allons l'indiquer.

Représentons par $P_1 = 0$ $P_2 = 0 \ldots.$ $P_6 = 0$ les équations des six côtés de l'hexagone, et par $\alpha = 0$ l'équation d'une diagonale de cet hexagone. La conique proposée étant circonscrite au quadrilatère

$$P_1 = 0,\ P^2 = 0,\ P_3 = 0,\ \alpha = 0$$

a pour équation $\qquad P_2\,\alpha = P_1\,P_3. \qquad$ (1)

Si on considère cette même conique comme circonscrite au quadrilatère

$$P_4 = 0,\quad P_5 = 0,\ P_6 = 0,\quad \alpha = 0$$

son équation sera $\qquad P_4\,P_6 = P_5\,\alpha. \qquad$ (2)

Si avec (1) et (2), on forme la combinaison

$$P_2\, P_4\, P_6 = P_1\, P_3\, P_5, \qquad (3)$$

cette équation représente une courbe du troisième degré, et les coordonnées x' y' d'un point quelconque de la conique considérée satisfaisant à (1) et à (2) vérifieront aussi la combinaison (3). Or, *cette équation* (3) *du troisième degré, étant satisfaite par les coordonnées d'un point quelconque de la conique, représente donc une conique et une droite* : tous les points dont les coordonnées satisfont à l'équation (3) et qui ne seront pas sur la conique, seront donc en ligne droite. Tels sont les points $P_1 = o$ $P_4 = o$; $P_2 = o$, $P_5 = o$; enfin $P_3 = o$, $P_6 - o$; c'est précisément le théorème de Pascal.

QUESTIONS D'EXAMEN

Parmi les questions qui reviennent le plus fréquemment dans les examens, il en est une catégorie qui mérite de fixer spécialement l'attention, en raison de la diversité des méthodes auxquelles elle donne lieu : c'est la formation de l'équation générale d'une conique satisfaisant à un certain nombre de conditions données, et lorsque ces conditions sont au nombre de quatre pour les coniques à centre, ou de trois pour la parabole et l'hyperbole équilatère, la recherche du lieu décrit par un élément remarquable de la conique dont il s'agit. Lorsque ces questions n'ont pas été préparées à l'avance, et que l'on prend comme données des conditions quelconques, elles sont généralement difficiles à résoudre directement, et nous donnerons quelques exemples des procédés analytiques plus ou moins indirects à l'aide desquels on peut tourner les difficultés qu'elles présentent. Quant aux solutions géométriques, sans les proscrire d'une façon absolue, nous ne les présenterons le plus souvent que comme moyens de vérification, parce que c'est à la solution analytique que l'examinateur s'attache de préférence et que bien souvent même, en posant la question, c'est cette solution seulement qu'il a en vue.

Voici d'abord un premier exemple, dans lequel on arrive assez facilement au lieu demandé en en cherchant préalablement un autre.

On considère toutes les paraboles pour chacune desquelles l'axe rencontre la directrice en un même point A *donné, et qui ont en outre une tangente commune; on demande le lieu décrit par leur sommet.*

Prenons pour axe des x la tangente commune, et pour axe des y la perpendiculaire abaissée sur cette tangente du point donné A, lequel est le pied de chaque directrice sur l'axe correspondant. Soit h l'ordonnée de ce point.

L'équation focale des courbes du deuxième degré étant $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (mx + ny + t)^2$, pour que ces courbes soient des paraboles, il faut que leur excentricité soit égale à l'unité, ce qui donne

$$m^2 + n^2 = 1. \qquad (1)$$

Écrivons d'abord que l'axe des x est tangent à la courbe, en exprimant que l'équation aux x des points d'intersection de la courbè avec Ox a ses racines égales; on aura, pour $y = 0$, $\qquad (x - \alpha)^2 + \beta^2 = (mx + t)^2$

c'est-à-dire

$$x^2 (1 - m^2) - 2x(\alpha + mt) + \alpha^2 + \beta^2 - t^2 = 0.$$

La condition de tangence à l'axe des x est donc

$$(\alpha + mt)^2 = (1 - m^2)(\alpha^2 + \beta^2 - t^2)$$

c'est-à-dire $\quad 2\alpha mt = \beta^2 - t^2 - m^2\alpha^2 - m^2\beta^2,$

ou bien $\quad (m\alpha + t)^2 = \beta^2 (1 - m^2). \qquad (2)$

L'axe est la perpendiculaire abaissée du foyer (α, β) sur la directrice $(mx + ny + t = 0)$;

son équation est donc

$$m(y - \beta) - n(x - \alpha) = 0. \qquad (3)$$

Il faut écrire que l'axe et la directrice passent par le point $(x = 0, y = h)$;

on a ainsi : $\qquad m(h - \beta) + n\alpha = 0 \qquad (4)$

et $\qquad nh + t = 0. \qquad (5)$

Pour avoir directement le lieu des sommets, il faudrait éliminer m, n, t, α et β entre l'équation de la courbe et les équations (1), (2), (3), (4) et (5). Mais ce calcul serait labo-

rieux; au lieu de procéder ainsi, cherchons le lieu des foyers, pour lequel il suffit d'éliminer m, n, t entre (1), (2), (3) et (4).

L'équation (2) donne, en vertu de (1),

$$(m\alpha + t)^2 = \beta^2 n^2;$$

prenons $m\alpha + t = \beta n$; l'équation (5) donnant $t = -nh$, on a $m\alpha = n(h + \beta)$ avec l'équation (4).

De ces deux dernières on tire par division

$$\frac{h - \beta}{\alpha} = -\frac{\alpha}{h + \beta}, \qquad \text{d'où } h^2 - \beta^2 + \alpha^2 = 0. \quad (6)$$

L'équation du lieu des foyers est donc $\beta^2 - \alpha^2 = h^2$, qui représente une hyperbole équilatère rapportée à son centre et à ses axes, l'axe transverse étant dirigé suivant Oy, et ayant pour demi-longueur h, c'est-à-dire que le point A donné est un de ses sommets réels.

De ce lieu on peut alors déduire très facilement celui des sommets. En effet, le sommet de chaque parabole est sur l'axe, à égale distance du foyer et de la directrice; ses coordonnées X et Y sont donc données par les formules

$$X = \frac{\alpha}{2} \text{ et } Y = \frac{\beta + h}{2}.$$

Par conséquent $\alpha = 2X$ et $\beta = 2Y - h$, et comme α et β satisfont à la relation (6), on a entre X at Y la relation

$$(2Y - h)^2 - 4X^2 = h^2, \text{ ou } \left(Y - \frac{h}{2}\right)^2 - X^2 = \frac{h^2}{4},$$

équation d'une autre hyperbole équilatère dont le centre est sur l'axe des y au milieu de la distance oA, et dont les axes sont parallèles aux axes des coordonnées, l'axe transverse étant dirigé suivant Oy, et ayant $\frac{h}{2}$ pour demi-longueur, de sorte que les sommets réels sont en O et A.

Il est souvent commode d'opérer comme dans l'exemple précédent, et tel lieu dont la recherche directe peut être très difficile, s'obtiendra aisément par l'intermédiaire du lieu d'un autre élément auquel l'élément considéré est lié par des relations simples.

— La transformation des coordonnées est une méthode générale, toujours applicable; lorsqu'elle ne conduit pas à

des calculs trop laborieux, elle est souvent la plus commode de toutes. En voici un exemple :

On considère toutes les hyperboles équilatères qui ont un sommet réel commun, ainsi qu'un point de l'une des asymptotes. On demande l'équation générale de ces hyperboles et le lieu de leurs foyers.

Soit A le sommet réel donné, et B le point commun aux asymptotes. Prenons pour axe des x la droite AB et pour axe des y la perpendiculaire à AB au point A. Une des hyperboles considérées a pour équation, par rapport à son centre et à ses axes, $x^2 - y^2 = a^2$.

Si φ est l'angle que fait la droite AB avec l'axe transverse, les formules à employer pour rapporter la courbe aux axes Ax et Ay, sont

$$x = a + x' \cos\varphi - y' \sin\varphi,$$
$$y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi,$$

et l'équation de l'hyperbole dont il s'agit est, par rapport aux nouveaux axes,

$$(a + x' \cos\varphi - y' \sin\varphi)^2 - (x' \sin\varphi + y' \cos\varphi)^2 = a^2.$$

Le faisceau des asymptotes a pour équation, dans le nouveau système d'axes,

$$(a + x' \cos\varphi - y' \sin\varphi)^2 - (x' \sin\varphi + y' \cos\varphi)^2 = 0.$$

Si d désigne l'abscisse du point B, il faut exprimer que l'équation précédente est vérifiée pour $y' = 0$, $x' = d$, ce qui donne $(a + d\cos\varphi)^2 - d^2 \sin^2\varphi = 0$.

Si l'on veut l'équation générale des hyperboles considérées en fonction d'un seul paramètre, on tire de cette dernière relation $a + d\cos\varphi = \pm d \sin\varphi$,

d'où $a = d(\pm \sin\varphi - \cos\varphi)$,

ce qui conduit à l'équation générale

$$(x' \cos\varphi - y' \sin\varphi)^2 + 2d(\pm \sin\varphi - \cos\varphi)(x' \cos\varphi - y' \sin\varphi)$$
$$- (x' \sin\varphi + y' \cos\varphi)^2 = 0$$

ou, en posant $\operatorname{tg}\varphi = \lambda$,

$$(x' - \lambda y')^2 + 2d(\pm\lambda - 1)(x' - \lambda y') - (\lambda x' + y')^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(1 - \lambda^2)(x'^2 - y'^2) - 4\lambda x'y' + 2d(x - \lambda y')(\pm\lambda - 1) = 0.$$

Pour avoir le lieu des foyers, il suffit de remarquer que

les coordonnées des foyers, dans le premier système d'axes, sont

$$\alpha = \pm a\sqrt{2} \text{ et } \beta = 0.$$

Dans le système (Ax, Ay), elles seront donc données par les relations

$$a + \alpha' \cos\varphi - \beta' \sin\varphi = \pm a\sqrt{2}$$

et

$$\alpha' \sin\varphi + \beta' \cos\varphi = 0.$$

En les joignant à la condition $a + d\cos\varphi = \pm d\sin\varphi$, on obtient trois équations entre lesquelles on éliminera φ et a, pour avoir l'équation en α' et β' qui représente le lieu.

On a ainsi

$$d(\pm \sin\varphi - \cos\varphi) + \alpha' \cos\varphi - \beta' \sin\varphi = \pm d\sqrt{2}\,(\pm \sin\varphi - \cos\varphi),$$

équation homogène en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$.

On a d'ailleurs $\dfrac{\sin\varphi}{\beta'} = -\dfrac{\cos\varphi}{\alpha'}$.

L'équation du lieu est donc

$$d(\pm\beta' + \alpha') - \alpha'^2 - \beta'^2 = \pm d\sqrt{2}\,(\pm\beta' + \alpha')$$

ou, en remplaçant β' et α' par x et y, et réduisant,

$$d(x \pm y)(1 \pm \sqrt{2}) = x^2 + y^2.$$

Cette équation représente un cercle, dans toutes les hypothèses que l'on peut faire sur les signes qu'elle renferme.

Il y a quatre de ces cercles. Le signe à choisir dans le facteur $(1 \pm \sqrt{2})$ dépend de celui des deux foyers dont on considère le lieu, et le signe à choisir dans le facteur $(x \pm y)$ dépend de celle des asymptotes sur laquelle se trouve le point fixe B.

On a ici un exemple vraiment remarquable de la facilité avec laquelle la méthode par la transformation des coordonnées conduit à l'équation d'un lieu dont la recherche directe exigerait des calculs fort pénibles. On obtiendrait tout aussi aisément le lieu des seconds sommets réels, celui des centres et ceux des sommets imaginaires, c'est-à-dire des sommets des hyperboles qui sont les conjuguées des proposées ; nous engageons nos lecteurs à les chercher à titre d'exercice utile.

ÉTUDE SUR LES COORDONNÉES TANGENTIELLES

ET LEURS APPLICATIONS

Par M. E. J. Boquel.

(*Suite*, voir page 174.)

Classe d'une courbe. — L'équation tangentielle $f(u,v) = 0$ d'une courbe établissant entre les coordonnées u et v d'une droite la relation qui exprime que cette droite est tangente à la courbe considérée, si l'on veut déterminer en particulier celle de ces tangentes qui passe par un point donné (α,β) du plan, il faudra résoudre le système des deux équations

$$\left| \begin{array}{r} u\alpha + \beta + 1 = 0 \\ f(u,v) = 0 \end{array} \right.$$

(en prenant l'équation de la droite sous la forme $ux + vy + 1 = 0$).

La première étant du premier degré, le système admet autant de solutions qu'il y a d'unités dans le degré de l'équation $f(u,v) = 0$. Ce degré est exprimé par celui du terme qui contient les variables u, v au plus haut degré. Il y a donc autant de tangentes passant par un point donné du plan qu'il y a d'unités dans le degré de l'équation $f(u,v) = 0$. Ce nombre est ce que l'on appelle la *classe* de la courbe.

$F(x,y) = 0$ étant l'équation en coordonnées cartésiennes de la même courbe, le degré de $F(x,y)$ indique le nombre des points de cette courbe situés sur une même droite; on sait que ce nombre est ce qu'on appelle l'*ordre* de la courbe.

Ces deux éléments, ordre et classe, ne sont pas les mêmes, sauf dans des cas particuliers; on sait, en effet, que l'on peut généralement mener d'un point du plan $m(m-1)$ tangentes à une courbe de l'ordre m; donc à partir du troisième degré, la classe de la courbe est supérieure à son ordre.

Les courbes du deuxième degré sont, au contraire, de la deuxième classe; nous avons, en effet, trouvé que l'équation tangentielle des coniques est du deuxième degré en u et v.

Les courbes de la première classe ne peuvent être que des

points; et, en effet, nous avons vu que l'équation du premier degré $Au + Bv + C = 0$ représente un point.

La classe d'une courbe n'est pas toujours nécessairement $m(m - 1)$; nous verrons, en effet, que l'existence de points singuliers dans la courbe $F(x, y) = 0$ exerce une influence sur la classe de cette courbe, et que, dans ce cas, cette classe subit un abaissement.

— *Le premier membre de l'équation tangentielle des coniques est la forme adjointe de la forme quadratique ternaire qui constitue le premier membre de leur équation cartésienne homogène.* — Cette propriété, très importante, résulte, en effet, de ce que nous avons trouvé pour l'équation tangentielle de la conique $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0$ (1) l'équation suivante :

$$\begin{vmatrix} A & B & D & u \\ B & C & E & v \\ D & E & F & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

dont le premier membre est, au signe près, la forme adjointe de la forme (1).

Le calcul que l'on a fait pour l'obtenir n'est autre, en effet, que le calcul qui sert à la formation de la forme adjointe, les variables nouvelles étant proportionnelles à u, v, w.

On a donc immédiatement, en vertu de cette remarque, le développement de l'équation (2) qui est

$$\left. \begin{array}{r} u^2(E^2 - CF) + v^2(D^2 - AF) + w^2(B^2 - AC) \\ + 2vw(AE - BD) + 2wu(CD - BE) \\ + 2uv(BF - DE) \end{array} \right| = 0$$

En changeant tous les signes, on a la forme adjointe elle-même égalée à zéro.

Il résulte de cette propriété que l'équation tangentielle des coniques jouit par conséquent de toutes les propriétés de la forme adjointe.

1° D'abord, la forme adjointe ayant pour expression générale (*)

$$\Delta'_{(a_{11})} X_1^2 + \Delta'_{(a_{22})} X_2^2 + \ldots\ldots + \Delta'_{(aik)} X_i X_k + \ldots\ldots$$

(*) Ce théorème et les suivants ont été démontrés dans notre travail de l'an dernier sur les formes quadratiques.

où Δ désigne le discriminant de la forme proposée, et les lettres a ses divers éléments, les coefficients de la forme qui constitue le premier membre de l'équation tangentielle des coniques doivent être les dérivées du discriminant de la forme (1) par rapport à ses divers éléments, c'est-à-dire les mineurs relatifs à ces mêmes éléments pris avec les signes dont ils sont affectés dans le développement du discriminant.

2° En second lieu, on sait que, lorsque l'invariant (qui n'est autre que le discriminant) d'une forme quadratique est nul, sa forme adjointe est un carré parfait. Donc si $\Delta = 0$, le premier membre de (2) est un carré parfait. Or écrire que $\Delta = 0$, c'est écrire que la forme (1) est un produit de deux facteurs linéaires; donc l'équation (1) représente dans ce cas deux lignes droites; les coordonnées de leur point d'intersection [point double de la courbe (1)], sont les coefficients x' y' z' de u, v, w dans la forme (2) mise sous la forme $(x'u + y'v + z'w)^2$. L'équation (2) exprime, en effet, que la droite $ux + vy + wz = 0$ est tangente à la courbe (1); celle-ci étant formée de deux droites, il ne peut y avoir d'autres tangentes que des droites passant par le point double, puisque ces droites sont les seules qui rencontrent la courbe en deux points confondus; elles passent donc toutes par ce point double, et comme l'équation $ux + vy + wz = 0$ exprime précisément que les droites qu'elle représente renferment le point (x, y, z), ce point est le point d'intersection des deux droites. En faisant le calcul, on trouve bien, comme il fallait s'y attendre, les coordonnées du centre de la conique générale représentée par (1). Si l'on représente par $au^2 + 2buv + cv^2 + 2duw + 2evw + fw^2$ la forme (2), et que l'on prenne ses demi-dérivées par rapport aux variables u, v, w

$$1/2\, f'_u = au + bv + dw$$
$$1/2\, f'_v = bu + cv + ew$$
$$1/2\, f'_w = du + ew + fw$$

on reconnaît que quand $\Delta = 0$ tous les mineurs de son discriminant sont nuls; car chacun d'eux contient Δ en facteur. Les dérivées partielles de la forme sont donc proportionnelles (ou, en d'autres termes, multiples d'un même

polynôme linéaire); c'est la condition connue pour que la forme soit un carré parfait.

8° L'invariant de la forme adjointe d'une forme quadratique est le réciproque de l'invariant de cette forme, car il a pour éléments les mineurs de ce dernier.

Dans le cas actuel, il est

$$\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

Or, on sait que n étant le nombre des variables d'une forme, le réciproque de Δ est égal à Δ^{n-1}. On aura donc dans le cas actuel

$$\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}^2$$

D'ailleurs, il est facile d'établir immédiatement ce fait pour la forme qui nous occupe.

En multipliant les deux déterminants ci-dessus l'un par l'autre, on a pour produit

$$\begin{vmatrix} aA + bB + dD & bA + cB + eD & dA + eB + fD \\ aB + bC + dE & bB + cC + eE & dB + eC + fE \\ aD + bE + dF & bD + eE + eF & dD + eE + fF \end{vmatrix}$$

Mais à cause de la signification de a, b, c, d, e; f, on a

$$aA + bB + dD = \Delta, \quad bA + cB + eD = 0, \quad dA + eB + fD = 0,$$
$$aB + bC + dE = 0, \quad bB + cC + eE = \Delta, \quad dB + eC + fE = 0.$$
$$aD + bE + dF = 0, \quad bD + cE + eF = 0, \quad dD + eE + fF = \Delta.$$

Si donc on appelle Δ' le réciproque de Δ, il vient

$$\Delta\Delta' = \begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix} = \Delta^3$$

Donc $\Delta' = \Delta^2$; C. Q. F. D.

Il résulte de là que Δ' et Δ sont toujours nuls en même temps; ce qui montre que si les mineurs de Δ sont tous nuls, auquel cas Δ est *a fortiori* nul lui-même, Δ' devra être nul, ou, en d'autres termes, que la réciproque du théorème 2° est vraie, c'est-à-dire que la forme adjointe étant un carré parfait, la forme qui lui a donné naissance est nécessairement un produit de facteurs linéaires.

4° La forme adjointe F d'une forme f étant trouvée, proposons-nous de déterminer la forme adjointe de F.

Les calculs faits pour obtenir f nous ont donné comme résultat $F = \Sigma\alpha_{ik} X_i X_k$, avec la condition $f = \frac{F}{\Delta}$, α_{ik} étant le mineur relatif à l'élément a_{ik} dans l'invariant Δ de f.

Or si l'on applique les mêmes calculs à la forme F, on devra poser les équations

$$\begin{array}{l}
\alpha_{11}X_1 + \alpha_{12}X_2 + \ldots + \alpha_{1n}X_n = \xi_1 \\
\alpha_{21}X_1 + \alpha_{22}X_2 + \ldots + \alpha_{2n}X_n = \xi_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_{n1} X_1 + \alpha_{n2} X_2 + \ldots + \alpha_{nn} X^n = \xi_n
\end{array}$$

Équations d'où l'on devra tirer $X_1, X_2, \ldots X_n$ en fonction de $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, pour reporter leurs valeurs dans F. Il viendra ainsi

$$F = \frac{\varphi(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n)}{\Delta^{n-1}}$$

$\varphi(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n)$ désignant la forme adjointe de F, et Δ^{n-1} étant, d'après la propriété rappelée dans 3°, l'invariant de F.

Mais $$f = \frac{F}{\Delta}; \quad \text{donc } f = \frac{\varphi(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n)}{\Delta^n}.$$

D'autre part les équations primitives (celles qui ont servi au calcul de la forme adjointe F) avaient donné

$$\begin{array}{l}
\Delta x_1 = \alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2 + \ldots + \alpha_{1n} X_n \\
\Delta x_2 = \alpha_{21} X_1 + \alpha_{22} X_2 + \ldots + \alpha_{2n} X_n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Delta x_n = \alpha_{n1} X_1 + \alpha_{n2} X_2 + \ldots + \alpha_{nn} X_n
\end{array}$$

On voit donc que $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ ne sont autre chose que $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots \Delta x_n$.

Par suite

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi^n) = \frac{\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) \times \Delta^2}{\Delta^n}$$
$$= \frac{\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\Delta^{n-2}}$$

et par suite la forme adjointe φ de F est identiquement égale à $f\Delta^{n-2}$.

Dans le cas des formes ternaires, on aura donc

$$\varphi = \Delta f.$$

— Cela posé, nous avons vu que si l'on cherche l'équation cartésienne de la courbe dont l'équation tangentielle est

$$au^2 + 2buv + cv^2 + 2duw + 2evw + fw^2 = 0$$

on trouve

$$\begin{vmatrix} a & b & d & x \\ b & c & e & y \\ d & e & f & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

qui n'est autre que la forme adjointe de la forme ternaire en u, v, w.

D'après le théorème précédent, on a donc

$$\begin{vmatrix} a & b & d & x \\ b & c & e & y \\ d & e & f & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = \Delta(Ax^2 + 2Bxy = Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2)$$

Cette réciprocité entre l'équation tangentielle d'une courbe et son équation en coordonnées cartésiennes traduit ainsi de la manière la plus nette le principe géométrique de dualité, au moyen des seules ressources de l'analyse. Il en résulte que tout principe relatif aux points d'une conique qui ne dépendra que de la forme de son équation, engendrera un principe corrélatif entre ses tangentes, sans nouvelle démonstration. Comme exemples de cette corrélation, nous citerons les propriétés du pôle et de la polaire, les théorèmes de Pascal et de Brianchon, la détermination d'une conique par un certain nombre de points et de tangentes, etc. *(A suivre.)*

QUESTION 296

Solution par M. Quiquet, élève au Lycée de Lille.

Trouver la relation qui doit exister entre les coefficients p, q, r *de l'équation du troisième degré* $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ *pour que les racines soient les sinus des angles d'un triangle.*

Il faut éliminer a, b, c entre les équations

$$p = \sin a + \sin b + \sin c,$$
$$q = \sin a \sin b + \sin b \sin c + \sin c \sin a,$$

$$r = \sin a \sin b \sin c,$$

sachant que $a + b + c = \pi$.

Des deux premières on tire

$$p^2 - 2q = \sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c = 2\cos a \cos b \cos c + 2$$

d'où

$$(p^2 - 2q - 2)^2 = 4(1 - \sin^2 a)(1 - \sin^2 b)(1 - \sin^2 c); \quad (1)$$

or

$$(1 - \sin^2 a)(1 - \sin^2 b)(1 - \sin^2 c) = 1 - \Sigma \sin^2 a + \Sigma \sin^2 a \sin^2 b - \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c,$$

et comme $\Sigma \sin^2 a = p^2 - 2q$,

$$\Sigma \sin^2 a \sin^2 b = [\Sigma \sin a \sin b]^2 - 2 \sin a \sin b \sin c \, \Sigma \sin a = q^2 - 2pr,$$

l'équation (1) devient

$$(p^2 - 2q - 2)^2 = 4(1 - p^2 + 2q + q^2 - 2pr - r^2)$$

ou, après réductions,

$$p^4 - 4p^2 q + 8pr + 4r^2 = 0.$$

Nota. — La même question a été résolue par M. Montérou, Lycée Louis-le-Grand.

QUESTIONS PROPOSÉES

Mathématiques élémentaires.

336. — Etant donné un triangle rectangle isoscèle ABC, d'un point M pris sur l'hypoténuse BC, on abaisse des perpendiculaires MP, MQ, sur les côtés AC, AB. On joint le point P au point Q, et du point M on abaisse une perpendiculaire sur PQ. Démontrer que cette perpendiculaire passe par un point fixe.

337. — Dans un triangle on appelle p le demi-périmètre, r le rayon du cercle inscrit; démontrer que l'on a

$$p^2 \geqq 27r^2. \quad \textit{(The Educat. Times.)}$$

338. — Soit ABC un triangle, AD, BE, CF les hauteurs abaissées respectivement sur les côtés BC, AC, AB; O est le point d'intersection de ces hauteurs. Sur AB on prend un point G tel que GC = CA; sur AC le point H tel que BH = BA,

on mène HK parallèle à ED, GK parallèle à FD; CG et DF se coupent en m, BH et DE se coupent en n. Cela posé, on demande de démontrer :

1° Que les six points B, G, O, H, C, K sont sur une même circonférence ;

2° Que les cinq points O, m, D, C, E, sont sur une même circonférence, ainsi que les cinq points O, n, D, B, F ;

3° Que Om est perpendiculaire sur CG, et On sur BH ;

4° Que O est le centre du cercle inscrit dans DFE, triangle qui est le quart du triangle semblable KGH, et aussi le centre du cercle circonscrit à AGH ;

5° Que les quatre points E, O, n, H, sont sur une même circonférence, ainsi que les quatre points F, O, n, G.

(The Educat. Times.)

339. — Dans un cercle on mène à partir d'un point B, sur la circonférence, deux cordes fixes et égales, BC et BC′, puis on prend un point A fixe sur la circonférence ; une corde PQ se meut, en restant toujours égale à BC. On joint le point B au point P, et le point A au point Q; ces deux lignes se coupent en O ; de même les lignes AP et BQ se coupent en O′. Trouver le lieu géométrique du point O et le lieu géométrique de O′. *(The Educat. Times.)*

340. — Connaissant les sommets des trois triangles équilatéraux construits sur les côtés d'un triangle, construire géométriquement ce triangle. *(The Educat. Times.)*

341. — Calculer la base et le côté d'un triangle isocèle connaissant la médiane et la hauteur issues d'un des sommets de la base.

Mathématiques spéciales.

342. — Par un des points d'intersection A de deux hyperboles équilatères de même centre O, on mène une sécante qui rencontre les deux courbes aux points B et B′. De ces points on abaisse des perpendiculaires BC, B′C′ sur les tangentes aux deux courbes au même point A. Démontrer que si l'on joint le centre aux pieds C et C′ de ces deux perpendiculaires, l'angle COC′ est quadruple de l'angle des asymptotes. *(E. Fauquembergue.)*

343. — Trouver le lieu des centres des triangles équilatéraux inscrits à une conique donnée. Cas où cette conique est une hyperbole dont les asymptotes font entre elles un angle de 60 degrés. (*E. Fauquembergue.*)

344. — On mène une tangente en un point variable d'une conique, rapportée à son centre et à ses axes, et on considère les cercles tangents à la conique, à l'axe des x et à la tangente. 1° Trouver le lieu des centres de ces cercles; 2° pour chaque position de la tangente, il y a deux cercles correspondants : trouver l'enveloppe de la droite qui joint leurs centres; 3° examiner le cas particulier où la conique se réduit à un cercle. (*E. Fauquembergue.*)

345. — Soit

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation d'une conique, les axes de coordonnées étant rectangulaires. Posons

$$\varphi = (f'_x)^2 + (f'_y)^2 - 4(A + C)f(x, y) = 0.$$

L'équation des quatre directrices de la conique est

$$\varphi^2 + 4(A + C)f\varphi + 16\delta f^2 = 0$$

ou $\delta = AC - B^2$.

L'équation $\varphi = 0$ représente le cercle des sommets des angles droits circonscrits à la conique.

ERRATUM

Dans notre article sur la série de Taylor, nous avons, au paragraphe 5, pris des dérivées en considérant θ *comme un nombre compris entre* 0 *et* 1. On a objecté que ce *nombre* était *variable*, du moins en général; cette objection nous paraît fondée et l'on doit considérer ce paragraphe comme non avenu.

G. L.

Le Rédacteur-Gérant,
J. KŒHLER.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 9284-1.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Delpit**, élève à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

SUR LE QUADRILATÈRE INSCRIT A DIAGONALES ORTHOGONALES

1. — *La somme des carrés de deux côtés opposés est constante et égale au carré du diamètre.*

Nous rappellerons ce théorème : si par un point I de l'intérieur d'un cercle on mène deux cordes rectangulaires, la somme des carrés des segments interceptés sur ces cordes par le point est égale au carré du diamètre.

Cela posé, on a (*fig. 1*)

$$AB^2 + CD^2 = AI^2 + BI^2 + CI^2 + DI^2 = 4R^2.$$

2. — *La perpendiculaire abaissée du centre sur un côté est égale à la moitié du côté opposé.*

Soit OE la perpendiculaire abaissée sur le côté CD. On a

$$OE^2 + EC^2 = R^2.$$

D'ailleurs, en vertu de ce qui précède, on a

$$\frac{AB^2}{4} + \frac{DC^2}{4} = R^2;$$

on en déduit que $$OE = \frac{AB}{2}.$$

3. — *Les perpendiculaires abaissées du centre sur les quatre côtés partagent le quadrilatère en quatre quadrilatères équivalents.*

Soient E, F, H les milieux des trois côtés. Les triangles COF, FOB sont égaux; de même les triangles COE, BOH

sont égaux puisqu'ils sont rectangles, et que, d'après une remarque précédente, on a OE = BH, et que les hypoténuses sont égales comme rayons.

Donc les deux quadrilatères EOFC, FOHB sont équivalents. On prouverait de même que les quatre quadrilatères formés de la même manière sont équivalents.

4. — *Le point d'intersection des lignes qui joignent les milieux des côtés est au milieu de la ligne qui joint le centre au point d'intersection des diagonales.*

Menons en effet la médiane IH; elle est égale à la moitié de AB et par suite à OE, d'après ce que nous avons déjà vu; de même IE est égal à OH. Donc la figure EOHI est un parallélogramme; donc la diagonale HE passe par le milieu de OI (*).

5. — *Les perpendiculaires abaissées des milieux des côtés sur les côtés opposés passent par un même point, qui est le point de concours des diagonales.*

Nous venons de voir que OE était parallèle à IH. Donc, puisque OE est perpendiculaire à CD, il en est de même de la ligne IH, qui est donc confondue avec la perpendiculaire à CD menée par le milieu de AB.

6. — *Lorsque le système des diagonales tourne autour du point I, tous les quadrilatères ainsi formés ont le même centre de gravité.*

Soit P le milieu de la diagonale BD. Menons les médianes AP, CP. Soient γ et γ' les centres de gravité des triangles ABD, BCD; ces points divisent les droites AP, CP dans le rapport de 1 à 2, à partir du point P.

(*) Les deux propositions 3 et 4 ne sont pas particulières au quadrilatère inscrit à diagonales rectangulaires. Si par le milieu de chaque diagonale d'un quadrilatère quelconque, on mène une parallèle à l'autre, et qu'on joigne le point de rencontre de ces deux lignes aux milieux des côtés, on partage le quadrilatère en quatre quadrilatères équivalents, et la ligne qui joint les milieux de deux côtés opposés du quadrilatère passe au milieu de la ligne qui joint le point de concours des diagonales au point que nous venons de déterminer.

(Note de la Rédaction.)

Appelons J le point où la droite $\gamma\gamma'$ coupe la droite OI, et L le point où elle coupe la diagonale BD.

Je dis d'abord que $L\gamma$ est égal à $J\gamma'$.

En effet, on a $$\frac{L\gamma}{AI} = \frac{P\gamma}{PA} = \frac{1}{3}.$$

Donc $$L\gamma = \frac{AI}{3}.$$

On a de même $$L\gamma' = \frac{CI}{3}.$$

Les triangles semblables ILJ, IOP donnent facilement
$$LJ = \frac{2}{3}\,OP.$$

On en déduit
$$J\gamma = L\gamma + LJ = \frac{AI + 2OP}{3}.$$

Mais $$AI = AQ - IQ;\quad OP = IQ.$$

Donc $$J\gamma = \frac{AQ + IQ}{3} = \frac{CI}{3} = L\gamma'.$$

Par suite, on a aussi $L\gamma = J\gamma'$.

On en tire finalement
$$\frac{J\gamma}{J\gamma'} = \frac{L\gamma'}{L\gamma} = \frac{\text{surf BCD}}{\text{surf ABD}}.$$

Donc le point J est le centre de gravité du quadrilatère.

Donc le centre de gravité se trouve sur la droite qui joint le centre au point de concours des diagonales, et divise cette ligne dans le rapport de 1 à 2; ce point est donc fixe avec le point I.

7. — *Chaque diagonale partage le quadrilatère en deux triangles, dont on considère les centres de gravité. Si on joint le centre de la circonférence aux centres de gravité des triangles, les points où ces droites rencontrent les diagonales sont les points de concours des hauteurs des divers triangles; ces points son en outre symétriques des sommets par rapport aux diagonales.*

O étant le centre du cercle circonscrit au triangle BCD, et γ' étant son centre de gravité, le point de rencontre des hauteurs de ce triangle se trouve sur la ligne $O\gamma'$ et sa distance au point γ' est double de $O\gamma'$. Ce point est d'ailleurs

sur CI; il est donc bien au point A′ de rencontre de $O\gamma'$ et de CI.

De plus on a $A'I = 3J\gamma' = 3\gamma L = AI$.

A′ est donc le symétrique de A par rapport à CD.

8. — La figure formée en joignant les milieux des côtés du quadrilatère est un rectangle, et par suite inscriptible dans une circonférence; cette circonférence, d'après ce que nous avons vu précédemment, a pour centre le point G, milieu de OI (*fig.* 2), et si nous joignons le point I au milieu d'un côté, la ligne ainsi menée est perpendiculaire sur le côté opposé. Il est facile d'en déduire que les pieds des perpendiculaires abaissées du point I sur les quatre côtés sont sur la même circonférence qui passe par les milieux des côtés.

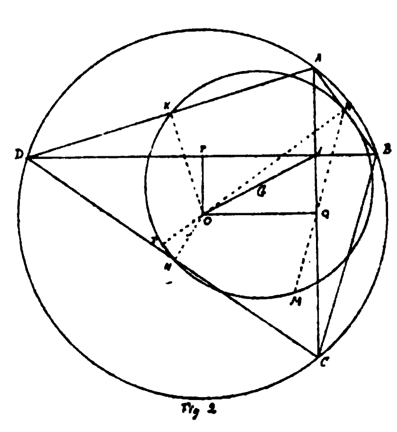


Fig 2

Soit H le milieu de AB, E le pied de la perpendiculaire abaissée du point I sur AB; les lignes OH et IE sont parallèles. Cela posé, prolongeons HO d'une longueur OF = IE. La ligne EF passe par le point G; c'est donc un diamètre de la circonférence, et on en déduit facilement que le point F est sur la même circonférence que précédemment.

Menons la ligne HQ, qui passe par le milieu de AB et par le milieu de la diagonale AC, et prolongeons-la jusqu'au point M où elle rencontre la circonférence que nous avons considérée précédemment; l'angle AQH est égal à l'angle ACB; l'angle POK est égal à ADB, et par suite à ACB; donc les deux lignes HM et KO sont symétriques par rapport au diamètre mené par G parallèlement à la diagonale AC; les points O et Q étant deux points symétriques, on voit que le segment QM est égal à la perpendiculaire abaissée du

point I sur le côté AD. Il en résulte que la circonférence qui passe par les milieux des côtés contient en outre *douze* autres points principaux, savoir :

Les pieds des perpendiculaires abaissées du point I sur les quatre côtés ;

Les points obtenus en abaissant du centre du cercle donné des perpendiculaires sur les quatre côtés, et prolongeant chaque ligne, au delà du centre, d'une longueur égale à la perpendiculaire abaissée du point I sur le côté considéré ;

Les points obtenus en menant par le milieu H d'un côté AB une parallèle à l'un des côtés adjacents BC, et prolongeant cette ligne, à partir de la diagonale qui passe par les points A et C, d'une longueur égale à la perpendiculaire abaissée du point I sur le côté AD, opposé à BC.

Cherchons la longueur du rayon de cette circonférence. Appelons l la distance OI. Le triangle OIH nous donne

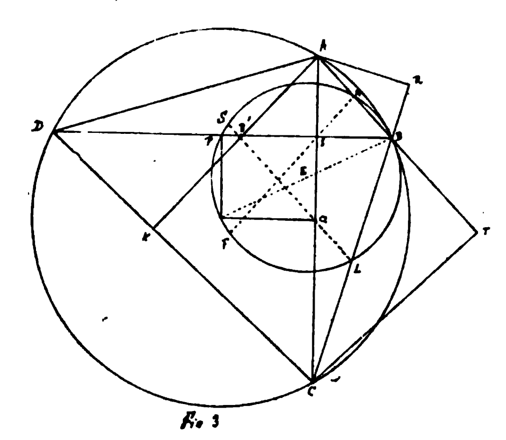
$$OH^2 + HI^2 = 2GH^2 + \frac{l^2}{2}.$$

Donc, en appelant r' le rayon GH, on a :

$$r'^2 = \frac{r^2}{2} - \frac{l^2}{4}.$$

Il en résulte que la position et la grandeur de ce cercle ne dépendent que de la position du point I.

9. — La circonférence décrite sur OB comme diamètre (*fig. 3*) passe évidemment par les milieux H et L des côtés BA et BC, et aussi au milieu P de la diagonale BD. Nous allons déterminer d'autres points de la circonférence. Soit B' le symétrique de B par rapport au point I. Nous avons vu



que B' est le point de concours des hauteurs du triangle ADC. Donc AB'K est la hauteur de ce triangle. Cela posé, menons la ligne IH; soit F le point où elle rencontre la circonférence décrite sur OB. On a

$$IF\ .\ IH = BI\ .\ PI.$$

Or
$$IH = \frac{AB}{2}.$$

Donc on a

$$IF\ .\ AB = 2BI\ .\ PI = BI\ (DI - BI) = BI\ .\ B'D.$$

Mais
$$BI\ .\ DB' = B'I\ .\ DB' = AB'\ .\ B'K,$$

et comme
$$AB' = AB,$$

On en déduit enfin

$$IF\ .\ AB = AB\ .\ KB',$$

d'où
$$IF = KB'.$$

Menons de même la ligne LQ; cette ligne est égale à $\frac{AB}{2}$; de plus, les points I et Q sont équidistants du point E, centre de la circonférence OB, puisque ce sont les projections des extrémités d'un diamètre sur une même droite. Il en résulte que ces points ont même puissance par rapport au cercle; donc, si l'on prolonge la ligne QL jusqu'au point S où elle rencontre la circonférence, on aura

$$QL\ .\ QS = IH\ .\ IF.$$

On en déduit
$$QS = IF = B'K.$$

On a donc ainsi sept points situés sur une même circonférence.

10. — *Des extrémités de deux côtés opposés on abaisse des perpendiculaires sur ces côtés. Les pieds de ces quatre perpendiculaires sont sur une même circonférence, ayant pour centre le point* I.

D'abord le point H étant le milieu de AB, nous savons que la ligne IH est perpendiculaire sur CD, Donc le point I est également distant des pieds des perpendiculaires abaissées de A et de B sur CD. Il est aussi à égale distance des pieds des perpendiculaires menées de C et de D sur AB. En outre, les lignes AK et AB étant symétriques par rapport à AC, si de ce point C j'abaisse des perpendiculaires CK et CT sur AK et AB, les distances IK et IT sont égales.

Les huit pieds des perpendiculaires sont sur deux circonférences concentriques ayant pour centre le point I.

11. — On peut démontrer sur les perpendiculaires ainsi menées des sommets sur les côtés, les théorèmes suivants, que nous ne ferons qu'énoncer.

Les perpendiculaires abaissées de deux sommets opposés sur deux côtés opposés sont proportionnelles aux deux autres côtés; on a

$$\frac{AK}{CT} = \frac{AD}{BC}.$$

Les perpendiculaires abaissées d'un même sommet sur les deux côtés qui n'aboutissent pas à ce sommet sont proportionnelles aux autres côtés. On a

$$\frac{AK}{AR} = \frac{AD}{AB}.$$

La somme des carrés des perpendiculaires abaissées des deux sommets opposés sur deux côtés opposés est égale au carré de la diagonale qui joint les deux sommets. On a

$$AK^2 + CT^2 = AC^2.$$

La somme des carrés des hauteurs est égale à deux fois la somme des carrés des diagonales.

La somme des huit hauteurs, multipliée par le diamètre du cercle circonscrit, est égale au produit du périmètre par la somme des diagonales.

Le produit de la ligne qui joint les pieds des hauteurs issues d'un même sommet par le diamètre du cercle circonscrit est égal au rectangle des diagonales.

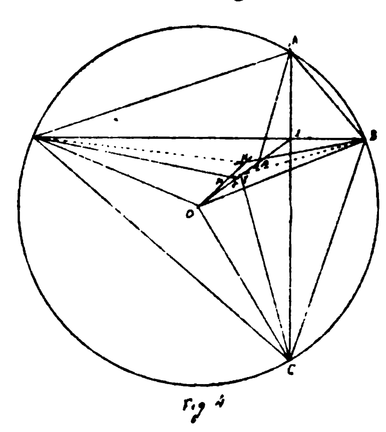
On a $$RK \cdot 2R = AC \cdot BD.$$

12. — *On peut toujours inscrire dans le quadrilatère une ellipse dont les foyers soient l'un le centre du cercle, l'autre le point de rencontre des diagonales.*

Considérons *(fig. 4)* les angles COD, ACB; ces deux angles sont complémentaires. Par suite COD est égal à ACB. Donc les angles OCD, ICB sont égaux; pour la même raison les angles IAB, OAD; IDC, ODA sont égaux.

Décrivons une ellipse ayant pour foyers les points O et I, et tangente à un des côtés, BC par exemple; menons du point

C une seconde tangente à cette ellipse; l'angle qu'elle fera avec le rayon CO sera égal à l'angle ACB; cette tangente sera par suite confondue avec CD. Pour la même raison, l'ellipse est tangente aux quatre côtés du quadrilatère.



Les axes de cette ellipse sont dirigés suivant OI et suivant une perpendiculaire menée à OI par son milieu. Le cercle principal de cette ellipse est le cercle qui passe par les milieux des côtés du quadrilatère. Par suite, le carré du demi-grand axe est $a^2 = \frac{r^2}{2} - \frac{l^2}{4}$, et le carré du petit axe est $b^2 = \frac{r^2 - l^2}{2}$.

13. — *Si par les milieux des côtés on mène des tangentes à l'ellipse précédente, elles sont parallèles aux côtés opposés.*

En effet, si par le point L par exemple je mène une tangente à l'ellipse, elle fera avec OL un angle égal à ILB; par suite cet angle sera le complément de OLI. La tangente sera donc perpendiculaire à LI, et par suite parallèle à AD.

14. — *Si l'on mène les bissectrices de deux angles consécutifs, ces bissectrices rencontrent* OI *aux points* α *et* β. *Le rapport anharmonique des quatre points* O, α, β, I, *est égal au rapport anharmonique des points correspondant aux deux autres bissectrices.*

Soient α et β les points où les bissectrices des angles A et B rencontrent la ligne OI; les angles OAD, CAB étant égaux, la bissectrice de l'angle A est bissectrice de l'angle OAI. Donc

$$\frac{O\alpha}{\alpha I} = \frac{r}{AI};$$

de même on a

$$\frac{O\beta}{\beta I} = \frac{r}{BI};$$

donc

$$\frac{O\alpha}{\alpha I} : \frac{O\beta}{\beta I} = \frac{BI}{AI}.$$

On a de même

$$\frac{O\gamma}{\gamma I} = \frac{r}{CI}; \qquad \frac{O\delta}{\delta I} = \frac{r}{DI};$$

donc

$$\frac{O\delta}{\delta I} : \frac{O\gamma}{\gamma I} = \frac{CI}{DI}.$$

Mais

$$\frac{CI}{DI} = \frac{BI}{AI};$$

donc les deux rapports anharmoniques sont égaux.

On peut déduire de là d'autres théorèmes, en appliquant les propriétés des faisceaux anharmoniques. Par exemple, si on joint le point B aux points γ et β, et le point D aux points α et δ, les deux faisceaux

$$B\,(O, I, \beta, \gamma), \quad D\,(O, I, \alpha, \delta)$$

ont un rapport anharmonique égal et un faisceau homologue commun ; il s'ensuit que si l'on prolonge les droites $B\beta$, $B\gamma$, jusqu'à leur rencontre avec $D\alpha$, $D\delta$, la ligne qui joindra les points d'intersection passera par le centre.

15. — Supposons que le système des diagonales tourne autour du point I. Les quatre côtés du quadrilatère envelopperont l'ellipse déjà considérée. Le cercle principal et les cercles directeurs de cette ellipse resteront fixes. Il s'ensuivra que les milieux des côtés et les projections du point I décriront le cercle principal; les symétriques du centre et du point I par rapport aux côtés décriront aussi des circonférences qui seront les cercles directeurs.

Les points de concours des hauteurs des quatre triangles ayant pour bases les diagonales sont symétriques des sommets par rapport aux diagonales, dont ils décrivent une circonférence ayant même rayon que le cercle donné, et pour centre le symétrique du centre par rapport au point d'intersection des diagonales.

Soit γ le centre de gravité d'un des triangles précédents : γ se trouve sur la ligne OB′, et la partage dans le rapport de 1 à 2; or le point B′ décrit une circonférence: il s'ensuit que le point γ décrit une circonférence dont le centre se trouve sur OI.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE

par M. Junck, élève du Lycée Charlemagne.

Si on considère des fractions irréductibles de même dénominateur $\frac{N}{P}, \frac{N}{P}, \ldots\ldots$ *elles donnent lieu à des quotients décimaux périodiques, simples ou mixtes, qui ont le même nombre de chiffres à la période.*

Ordinairement on démontre ce théorème dans le cas où P est premier avec 10, et on en déduit le théorème général. Mais la démonstration qu'on donne dans la plupart des cours est assez difficile à retenir; nous pensons que la suivante est plus simple.

1° Supposons P premier avec 10. La fraction $\frac{N}{P}$ donne alors naissance à une fraction périodique simple, avec ou sans partie entière.

On a donc
$$\frac{N}{P} = B, \alpha\beta\gamma\ldots\lambda\alpha\beta\gamma\ldots\lambda\ldots$$
B étant la partie entière, et $\alpha\beta\gamma \ldots \lambda$ la période.

La génératrice de cette fraction décimale est, comme on sait,
$$\frac{B\alpha\beta\gamma \ldots \lambda - B}{999 \cdots 9}$$
et par suite
$$\frac{N}{P} = \frac{B\alpha\beta\gamma \ldots \lambda - B}{999 \cdots 9}.$$

Mais, d'après un théorème connu, $\frac{N}{P}$ étant une fraction irréductible, P divise le nombre $999 \ldots 9$. Si donc on effectue la division suivante, en ayant soin d'abaisser à la droite de chaque reste le chiffre 9,

$$\begin{array}{r|l} 9999 \cdots 9 & P \\ \cline{2-2} a9 & mnp \,..\, t \\ b9\ . & \\ & \\ k9 & \\ 0 & \end{array}$$

Le nombre des chiffres 9 qui forment le dividende sera précisément le nombre des chiffres de la période ; ce nombre est indépendant de la valeur des numérateurs N, N′ N″... Le théorème est donc démontré quand N est premier avec 10 ; car pour avoir la période, il suffit de multiplier le quotient obtenu par N, si N est $<$ P, et par N — BP, si N est $>$ P ; d'où il résulte que le nombre des chiffres de la période sera toujours le même, quel que soit N.

2° Si P n'est pas premier avec 10, on a $P = p.2^a.5^b$, p étant premier avec 10.

Si l'on a $\frac{N}{P} = A, B\alpha\beta\gamma \ldots \lambda\alpha\beta\gamma \ldots \lambda \ldots$

B, qui est la partie irrégulière, renferme autant de chiffres qu'il y a d'unités dans le plus grand des deux nombres a et b.

Posons $a = b + c$; nous aurons

$$\frac{N}{p \cdot 2^a 5^b} = A, B\alpha\beta\gamma \ldots \lambda\alpha\beta\gamma \ldots \lambda \ldots$$

Donc $$\frac{N \cdot 5^c}{p} = AB, \alpha\beta\gamma \ldots \lambda\alpha\beta\gamma \ldots \lambda \ldots$$

N . 5^c étant premier avec p.

En raisonnant comme dans le premier cas, on voit que le nombre des chiffres de la période est encore indépendant de N, et qu'il s'obtient par une division.

N. B. — Cette question a été proposée dans la composition d'arithmétique du concours d'admission à l'École navale en 1878.

On demandait d'en faire l'application à l'exemple $\frac{1}{111}, \frac{43}{111}$.

Or, on a $$\begin{array}{r|l} 999 & 111 \\ \hline 0 & 9 \end{array}$$

La période a donc 3 chiffres ; elle est $9 \times 1 = 9$ pour la première fraction, c'est-à-dire de 009, puisqu'on vient de dire qu'elle a 3 chiffres. Elle est 43×9 pour la deuxième fraction, c'est-à-dire 387.

NOTE SUR LA QUESTION 282

Par M. L. Geoffroy, professeur au Collège Chaptal, répétiteur à l'École centrale.

La solution donnée dans le numéro d'avril pour la question 282 est incomplète, les nombres entiers m et n ne sont pas donnés, et par suite la formule (4) de la page 163 ne peut servir au calcul des angles du triangle. La solution suivante va nous montrer que les tangentes des trois angles du triangle sont exprimées par des nombres entiers et positifs.

En effet, d'après l'énoncé on sait que : 1° *le rapport du carré de chacune des hauteurs au rectangle des segments qu'elle détermine sur la base correspondante est exprimé par un nombre entier; 2° le produit des trois hauteurs est un multiple du produit des trois segments non consécutifs déterminés par ces hauteurs sur les côtés opposés.*

Il résulte immédiatement de l'énoncé les égalités suivantes:

$$\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = p,$$
$$\operatorname{tg} C \operatorname{tg} A = q,$$
$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B = r,$$

p, q, r étant des nombres entiers. Enfin, la seconde condition devient $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = s.$

Or, entre les tangentes des angles d'un triangle, on a

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C;$$

d'où l'on tire $\operatorname{tg} C = \dfrac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B - 1}.$

On obtient alors, par la première des égalités ci-dessus,

$$\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \operatorname{tg}^2 B}{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B - 1}.$$

ou

$$p = \frac{r + \operatorname{tg}^2 B}{r - 1}.$$

Le dénominateur de cette égalité est entier. Donc le numérateur doit être entier, c'est-à-dire que $tg^2 B$ doit être un nombre entier, par suite $tg\ B$ est entier ou incommensurable. Cette dernière hypothèse n'est pas admissible; car,

puisque l'on a

$$\text{tg A tg B tg C} = s$$
$$\text{tg A tg C} = q$$

on en déduit
$$\text{tg B} = \frac{s}{q},$$
quantité commensurable, puisque s et q sont entiers.

Donc tg B est entier. On verrait qu'il en est de même pour les autres tangentes. Donc

Les tangentes des angles du triangle répondant à la question sont exprimées par des nombres entiers.

Cela posé, l'égalité
$$\text{tg A} + \text{tg B} + \text{tg C} = \text{tg A tg B tg C}$$
nous permet de ramener la question à la suivante : *Trouver trois nombres entiers dont la somme soit égale au produit.*

Désignons par x le plus petit des trois nombres entiers cherchés, par $x + y$, $x + y_1$, les deux autres. On aura
$$x(x + y)(x + y_1) = 3x + y + y_1$$
ou
$$x^3 + (y + y_1)x^2 + yy_1x = 3x + y + y_1$$
ou enfin
$$x(3 - yy_1) = x^3 + (y + y_1)(x^2 - 1).$$

Le second membre de cette égalité est essentiellement positif ; donc il faut que l'on ait
$$3 - yy_1 > 0.$$

Or, y et y_1 sont deux nombres entiers positifs, différents ; donc il faut faire $y = 1$, $y_1 = 2$.

On obtient, pour déterminer x, l'équation
$$x(x + 1)(x + 2) = 3(x + 1)$$
ou
$$x(x + 2) = 3.$$

En rejetant la solution négative $- 3$, puisque x est entier et positif, on a $x = 1$; donc
$$\text{tg A} = 1\,; \quad \text{tg B} = 2\,; \quad \text{tg C} = 3.$$

On voit donc bien que les tangentes des angles du triangle sont exprimées par des nombres entiers, et même que les angles sont déterminés. Le triangle est donc d'espèce connue, et il est facile de le résoudre puisque l'on en donne un élément linéaire.

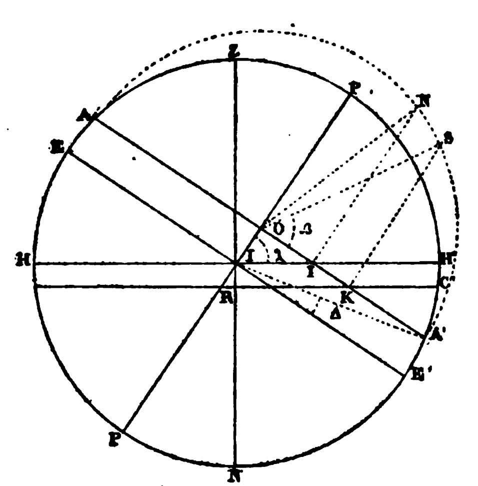
NOTE DE COSMOGRAPHIE

(CRÉPUSCULE)

Par M. Bourget, du Collège d'Aix.

A la page 441 de la 4e année de ce journal, M. Morel a donné la formule qui sert à calculer la durée du jour a diverses époques de l'année; nous nous proposons dans cette note d'indiquer comment on peut calculer cette durée en tenant compte du crépuscule.

Prenons pour plan de la figure le plan du méridien du lieu considéré. Soient HH' l'horizon, CC' le cercle crépusculaire à 18° au-dessous de l'horizon, PP' l'axe du monde, et AA' le parallèle décrit par le soleil le jour considéré.



Cela posé, rabattons sur le plan de la figure le cercle AA' en le faisant tourner autour de son diamètre. Les intersections de ce cercle avec les cercles HH', CC', se rabattent suivant les lignes MI, SK, perpendiculaires à AA'. L'arc MS représente le crépuscule, et l'arc SA' la moitié de la nuit diminuée du crépuscule. Nous allons chercher l'expression de l'angle SOA'. Il est clair que, connaissant cet angle, nous connaîtrons l'angle MOS, car si l'angle SOA' augmente, l'angle MOS diminue et *vice versa*.

Le triangle SOK de la figure ci-contre donne

$$\cos \beta = \frac{OK}{OS};$$

cherchons maintenant les valeurs OK et OS, et nous aurons la formule que nous nous proposons d'établir.

Nous avons $OK = (OT + TR) \operatorname{tg} \lambda,$

et supposant le rayon de la sphère céleste égal à l'unité.

$$OK = \left(\sin \Delta + \frac{\sin 18^\circ}{\sin \lambda}\right) \operatorname{tg} \lambda;$$

d'autre part, $OS = OA = \cos \Delta.$

Nous trouvons donc

$$\cos \beta = \frac{\left(\sin \Delta + \frac{\sin 18^\circ}{\sin \lambda}\right) \operatorname{tg} \lambda}{\cos \Delta};$$

formule qui peut s'écrire

$$\cos \beta = \operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \Delta + \frac{\sin 18^\circ}{\cos \lambda \cos \Delta}. \qquad (1)$$

Donc, la durée du crépuscule du lieu ne dépend que de la latitude du lieu et de la déclinaison du soleil.

Discussion de la formule

$$\cos \beta = \operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \Delta + \frac{\cos 18^\circ}{\cos \lambda \cos \Delta}.$$

Pour que l'angle β existe, il faut que son cosinus soit plus petit que l'unité, c'est-à-dire que $\operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \Delta + \frac{\sin 18^\circ}{\sin \lambda \cos \Delta} < 1.$

Mais λ et Δ étant nécessairement aigus, on en tire

$$\cos (\lambda + \Delta) > \cos 72^\circ,$$

ou enfin $\lambda + \Delta < 72^\circ. \qquad (2)$

Si, dans cette formule, nous prenons λ pour inconnue, et si nous faisons varier Δ de o à 23°30′, nous trouverons les valeurs correspondantes de λ. Ces valeurs de λ indiquent les régions pour lesquelles β existe, c'est-à-dire pour lesquelles il y a nuit. Si l'on se place à des latitudes supérieures à celle qu'indique la formule (2), la nuit est remplacée par le crépuscule.

Si, par exemple, $\Delta = o$, c'est-à-dire si l'on suppose que le soleil soit à l'équinoxe, nous trouvons $\lambda < 72^\circ$, valeu

qui signifie que si l'on se place à 72 degrés de latitude et au delà, le crépuscule durera toute la nuit.

Si, au contraire, $\Delta = 23°30'$, $\lambda = 48°30'$, au-dessus de la latitude de 48°30', au solstice d'été, le crépuscule dure toute la nuit.

Mais si l'on faisait varier λ et qu'on prît pour inconnue Δ, on trouverait les déclinaisons à partir desquelles le crépuscule durerait toute la nuit. En effet, si l'on prend $\lambda = 0$ c'est-à-dire si l'on se place à l'équateur, $\Delta < 72°$, ce qui signifie que le soleil doit avoir une déclinaison de 72° pour qu'il n'y ait pas de nuit à l'équateur, ce qui n'a jamais lieu. Si nous prenons $\lambda = 60°$, $\Delta < 12°$, c'est-à-dire qu'à partir du 12° de déclinaison, il n'y a plus de nuit jusqu'à ce que le soleil ait atteint 23°30'.

D'après tout ce qui précède, nous pouvons formuler la loi suivante : *Le crépuscule suit les variations du jour*. Si le jour grandit, le crépuscule croît ; si le jour diminue, le crépuscule décroît.

Remarque. — On peut facilement rendre la formule (1) calculable par logarithmes. On a en effet

$$\cos\beta = \operatorname{tg}\lambda \operatorname{tg}\Delta + \frac{\sin 18°}{\sin\lambda\cos\Delta} = \frac{\sin\Delta\sin\lambda + \sin 18°}{\cos\Delta\cos\lambda}$$
$$= \frac{\sin(\varphi + 18°)}{\cos\varphi\cos\Delta\cos\lambda}$$

en nommant φ un angle auxiliaire déterminé par la relation

$$\sin\Delta\sin\lambda = \cos 18° \operatorname{tg}\varphi.$$

QUESTIONS D'EXAMEN

Deux triangles sont semblables quand l'une des conditions suivantes est remplie :

1° Les tangentes des angles sont proportionnelles ;

2° Les tangentes des demi-angles sont proportionnelles ;

3° Les cosinus des angles sont proportionnels ;

4° Les sinus des demi-angles sont proportionnels.

1° On a entre les tangentes des angles la relation

$$\text{tg } A + \text{tg } B + \text{tg } C = \text{tg } A \text{ tg } B \text{ tg } C.$$

Par hypothèse, on a aussi, en appelant A', B', C' les angles du second triangle

$$\frac{\text{tg } A}{\text{tg } A'} = \frac{\text{tg } B}{\text{tg } B'} = \frac{\text{tg } C}{\text{tg } C'} = t.$$

Par conséquent cette hypothèse donne

$$t\,(\text{tg } A' + \text{tg } B' + \text{tg } C') = t^3 \text{ tg } A' \text{ tg } B' \text{ tg } C'.$$

Mais la formule que nous avons établie plus haut est vraie pour un triangle quelconque, donc elle est vraie pour les angles A' B' C'; par suite, il vient

$$t^2 = 1.$$

On ne peut supposer $t = -1$, car cela donnerait, puisque les angles A, B, C, A', B', C' sont inférieurs à 180°,

$$A + A' = 2d$$
$$B + B' = 2d$$
$$C + C' = 2d$$

Donc il faut faire $t = 1$, et alors les deux triangles sont équiangles.

2° On a aussi, entre les angles d'un triangle la relation

$$\text{tg } \frac{A}{2} \text{ tg } \frac{B}{2} + \text{tg } \frac{B}{2} \text{ tg } \frac{C}{2} + \text{tg } \frac{C}{2} \text{ tg } \frac{A}{2} = 1;$$

et puisque l'on a

$$\frac{\text{tg } \frac{A}{2}}{\text{tg } \frac{A'}{2}} = \frac{\text{tg } \frac{B}{2}}{\text{tg } \frac{B'}{2}} = \frac{\text{tg } \frac{C}{2}}{\text{tg } \frac{C'}{2}} = m;$$

on en déduit encore $m^2 - 1 = 0$,
puisque la relation est vraie pour les angles d'un triangle quelconque. On aura donc encore $m = 1$, la solution $m = -1$ devant être rejetée, puisque les angles $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$ ... sont nécessairement aigus et ont par suite des tangentes essentiellement positives. On en conclut que les deux triangles sont équiangles.

3° Entre les cosinus des angles d'un triangle, on a la relation $1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C = 2 \cos A \cos B \cos C$.

Cette relation est vraie pour un triangle quelconque, et si j'ai

$$\frac{\cos A}{\cos A'} = \frac{\cos B}{\cos B'} = \frac{\cos C}{\cos C'} = m,$$

cette relation deviendra

$$1 - m^2 \cos^2 A' - m^2 \cos^2 B' - m^2 \cos^2 C' = 2m^3 \cos A' \cos B' \cos C',$$

ce qui peut s'écrire

$$(m^2 - 1)(\cos^2 A' + \cos^2 B' + \cos^2 C') + (m^3 - 1)\, 2 \cos A' \cos B' \cos C' = 0.$$

On en tire d'abord $m = 1$;

puis $(m + 1)(\cos^2 A' + \cos^2 B' + \cos^2 C') + 2(m^2 + m + 1) \cos A' \cos B' \cos C' = 0.$

Cette égalité se réduit, en vertu de la relation que nous avons rappelée, à $2m^2 \cos A' \cos B' \cos C' + m + 1 = 0$.

Cette équation en m a ses racines imaginaires, car la quantité sous le radical est

$$1 - 8 \cos A \cos B \cos C = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 3.$$

Or chacun des carrés $\cos^2 A$, $\cos^2 B$, $\cos^2 C$ étant inférieur à l'unité, leur somme est inférieure à 3, donc la quantité sous le radical est négative.

Il en résulte encore que les triangles ont leurs angles égaux, puisque les angles ont mêmes cosinus et sont positifs, moindres que 180°.

4° Entre les sinus des demi-angles, on a la relation

$$1 - \sin^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{B}{2} - \sin^2 \frac{C}{2} = 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Cette égalité présente la même forme que la précédente, et on verrait facilement que l'hypothèse de la proportionnalité des sinus des demi-angles conduirait à la condition

$$(m - 1)\left(2m^2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + m + 1\right) = 0.$$

Le second facteur a encore ses racines imaginaires; donc on doit prendre $m = 1$ et, par suite, les deux triangles sont encore équiangles.

On donne deux nombres a *et* b *et l'on prend la moyenne arithmétique entre ces deux nombres, et on continue ainsi en prenant toujours la moyenne arithmétique du dernier nombre*

formé et du nombre qui le précède. On demande la valeur du terme général de la suite ainsi formée.

On a
$$a_1 = \frac{a+b}{2} = a + \frac{b-a}{2};$$
$$a_2 = \frac{b}{2} + \frac{a_1}{2} = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2^2} = a + \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2^2}.$$

De même
$$a_3 = a + \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2^3}$$
$$a_4 = a + \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2^3} + \frac{b-a}{2^4}$$
$$a_5 = a + \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2^3} + \frac{b-a}{2^5}$$
$$a_6 = a + \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2^3} + \frac{b-a}{2^5} + \frac{b-a}{2^6}.$$

En général
$$a_{2n-1} = a + \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2^3} + \frac{b-a}{2^5} + \dots + \frac{b-a}{2^{2n-1}}$$
$$a_{2n} = a + \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2^3} + \frac{b-a}{2^5} + \dots$$
$$+ \frac{b-a}{2^{2n-1}} + \frac{b-a}{2^{2n}}.$$

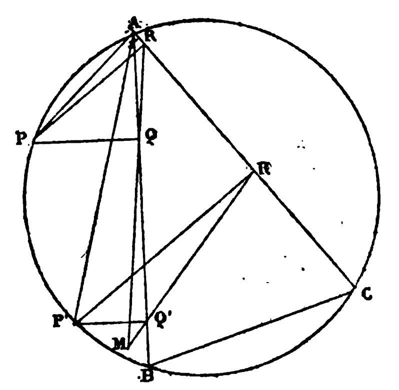
La différence entre les termes de rang pair et les termes de rang impair tend vers zéro; à la limite on a, à partir du second terme, une progression géométrique dont le premier terme est $\frac{b-a}{2}$, et la raison $\frac{1}{4}$; donc on a
$$\lim . a_p = a + \frac{2}{3}(b-a).$$

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE

Un triangle ABC étant inscrit dans un cercle S, on considère sur la circonférence deux points P et P'. Les projections de ces points sur les côtés du triangle sont situés sur deux droites D et D' qui se coupent en M. 1° Démontrer que ce point M décrit une circonférence S' quand le sommet C se meut sur le cercle S, les

points A, B, P *et* P′ *restant fixes ; 2° trouver le lieu des centres des cercles* S′ *lorsque les points* P *et* P′ *se déplacent sur la circonférence* S *de façon que l'arc* PP′ *conserve une longueur constante* (*).

La droite QR correspondant au point P passe toujours par le point fixe Q; la droite Q′ R′ passe par le point Q′. Donc il suffit de démontrer, puisque les points Q et Q′ sont fixes, que l'angle en M est constant. Or, les quatre points A, P′, Q′ et R′ sont sur une circonférence;

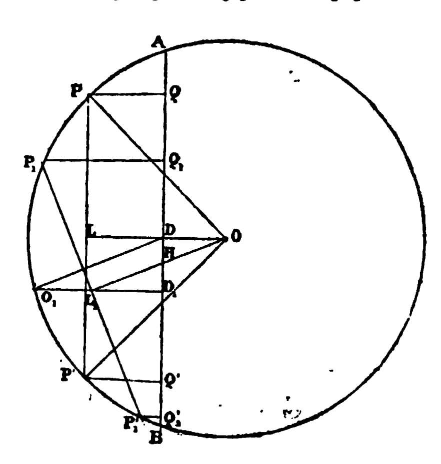


donc AQ′R′ = AP′R′

Mais AP′R′ = ATR, puisque PR et P′ R′ sont parallèles comme perpendiculaires à une même droite AC; d'autre part on a MQQ′ = AQR = APR.

Donc QMQ′ = QQ′R′ — Q′QM = ATR — APR = TAP.

Donc l'angle en M est égal à l'angle ayant pour sommet le point A et passant par les points P et P′; il est donc constant, et par suite le lieu du point M est une circonférence passant par les points Q et Q′



Pour trouver le lieu du centre O de la circonférence S′, je considère la position

(*) Composition de géométrie élémentaire donnée à l'Agrégation des sciences mathématiques en 1879.

particulière de PP' où cette droite est parallèle à AB; soit D le milieu de QQ' pour cette position; je prends une autre position P_1P' quelconque, soit D le milieu de Q_1Q_1' et O_1 le centre du cercle correspondant; le triangle $Q_1O_1Q_1'$ est constant d'espèce, et toujours semblable au triangle POP', ou au triangle $P_1OP'_1$; on a donc

$$\frac{O_1D_1}{OL_1} = \frac{Q_1Q'_1}{P_1P'_1} = \frac{OD}{OH}.$$

D'autre part on a $\frac{L_1D_1}{L_1H} = \frac{OD}{OH}$.

D'où l'on tire $\frac{O_1D_1}{OL_1} = \frac{L_1D_1}{L_1H} = \frac{OD}{OH}$.

Mais on a $OH = L_1O \pm L_1H$;

donc $OD = O_1D_1 \pm L_1D_1 = O_1L_1$.

Par suite la figure DO_1L_1O est un parallélogramme et $DO_1 = OL_1$. Par suite DO_1 est constant; donc le lieu de O_1 est un cercle ayant pour centre le point D et pour rayon la distance du centre O à la corde constante PP'.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

Session d'avril 1881.

ACADÉMIE DE CAEN

Calculer la surface d'un triangle, connaissant un côté a, l'angle opposé A. et la médiane m issue du sommet A. Maximum de la surface en supposant m et A invariables.

— Résoudre le système d'équations

$$x + y + z = a + b + c$$
$$bx + cy + az = cx + ay + bz = a^2 + b^2 + c^2;$$

mettre la valeur des inconnues sous forme entière.

— On peut, à l'aide d'une manivelle dont le bras a 1^m de longueur, faire mouvoir un treuil de 0^m,25 de diamètre sur lequel est enroulée une corde parallèle à la ligne de plus grande pente d'un plan incliné dont la pente est $\frac{5}{12}$. Quel est le poids P que peut faire remonter le long du plan un homme agissant à l'extrémité de la manivelle avec une force de 10 kilogrammes? Démontrer que le travail de l'homme est égal à celui du poids du corps.

— Connaissant le périmètre et la surface d'un triangle rectangle, calculer les trois côtés et le rayon du cercle inscrit. Chercher les conditions pour que le triangle soit isoscèle.

ACADÉMIE DE PARIS

Calculer le volume d'une sphère, sachant que la différence entre ce volume et celui du cube inscrit dans la sphère est égale à un mètre cube.

— La distance des centres de deux cercles égaux est égale au rayon commun R. Exprimer, au moyen de R, la surface de la partie du plan commune aux deux cercles.

— Trouver le rayon d'un cercle sachant que la différence entre la surface de l'hexagone régulier inscrit et celle du carré inscrit dans le même cercle est égale à 3 mètres carrés.

— Deux cercles égaux de rayon R sont extérieurs l'un à l'autre. La distance des centres OO' est égale à d. D'un point A pris sur la ligne OO' entre les cercles, on mène les tangentes AB, AB', puis on fait tourner la figure autour de OO'. Déterminer la distance OA de façon que la somme des surfaces des deux calottes sphériques engendrées par les arcs BD, B'D' soit égale à la moitié de la surface de l'une des sphères.

— Dans un cercle de rayon donné, mener une corde AB telle que, si l'on joint ses deux extrémités au centre O, et si l'on fait tourner la figure autour du diamètre CD parallèle à la corde AB, le volume engendré par le segment de cercle AMB soit équivalent au volume engendré par le triangle AOB.

— Étant donnés une sphère dont le diamètre est AB, et le plan tangent à l'extrémité B de ce diamètre, mener un plan sécant CD perpendiculaire au diamètre AB, de telle sorte que le volume du segment de sphère CAD soit égal au cylindre dont l'une des bases est la section de la sphère par ce plan CD, dont les arêtes latérales sont parallèles au diamètre AB, et dont l'autre base est située dans le plan tangent à la sphère au point B.

— On donne dans un trapèze ABCD les deux bases parallèles $AB = a$, $CD = b$, les deux diagonales $AD = \alpha$, $BC = \beta$, on demande de calculer la hauteur h.

— Dans un triangle BCA, on divise la base BC en un point D tel que $\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n}$. On demande de calculer la ligne AD; on donne $AB = c$, $AC = b$.

— Trouver le rayon, l'apothème et la surface du dodécagone régulier ayant même périmètre que l'hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon R.

— Démontrer que, quelle que soit la valeur de x, la fraction

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 1}$$

est toujours positive.

— Soient : une circonférence O, C un point de son plan situé à une distance du centre égale au diamètre, CA et CB les tangentes menées de ce point à la circonférence. On fait tourner la figure autour de OC; AMB engendre un segment sphérique. On demande de calculer le rapport du volume de ce segment à celui de la sphère engendrée par le cercle O.

ACADÉMIE DE BORDEAUX

On donne deux circonférences tangentes extérieurement dont les rayons sont $r = a$, $R = 3a$; calculer: 1° l'angle S formé par la tangente commune et la ligne des centres; 2° l'aire du triangle formé par la ligne des centres, la tangente commune et la perpendiculaire à la ligne des centres menée par le point de contact avec la petite circonférence.

— Partager un angle A en deux parties telles que le rapport des sinus soit égal à un nombre donné n. Application: $A = 50°$; $n = 3$.

— Etant donné le rayon R de la base d'un cône et sa hauteur h, déterminer la distance x, à partir du sommet, à laquelle il faut mener un plan parallèle à la base, pour que le volume du tronc de cône soit équivalent à m fois celui de la sphère de diamètre x. Application : $R = 7$; $h = 10$; $m = 3$.

— Calculer le premier terme d'une progression arithmétique sachant que la raison est r, et que la somme des n premiers termes est égale à $(n + 4)$ fois le dernier terme. Application : $r = 3$; $n = 25$.

— La distance des centres de deux circonférences est égal à a; leurs rayons sont égaux respectivement à r et r'. Mener parallèlement à la ligne des centres une droite de longueur donnée comprise entre les deux circonférences.

— Quelle est la plus petite valeur de l'expression $3x^2 - 8x + 7$ quand on fait varier x de $-\infty$ à $+\infty$.

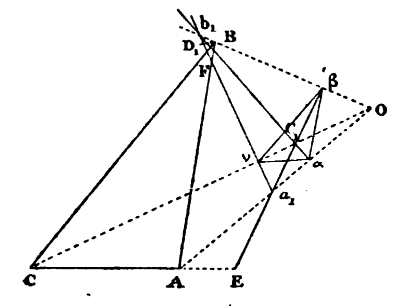
QUESTION 278

Solution par M. A. Prost, à Lons-le-Saulnier.

Soient ABC, $\alpha\beta\gamma$ *deux triangles homothétiques, dont le centre d'homothétie est l'un quelconque des centres des cercles inscrit et exinscrit au triangle* ABC.

Soient αD, βE, γF *des perpendiculaires respectives à* Aα, Bβ, γC.

Démontrer que les points de concours des droites AB *et* γF, CA *et* βE, CB *et* αD *sont en ligne droite.*



Soient les deux triangles homothétiques ABC, $\alpha\beta\gamma$ dont le centre d'homothétie est en O, centre d'un cercle exinscrit au triangle ABC. OC étant bissectrice de l'angle BCA, l'est aussi de $\beta\gamma\alpha$; il

en est de même des bissectrices αA, OB des angles extérieurs A et B, par suite des angles α et β.

Cela posé on voit facilement que les droites OC, βE, αD; puis γF, αD, OB; et βE, γF, OB se coupent respectivement en trois points a_1 b_1 c_1.

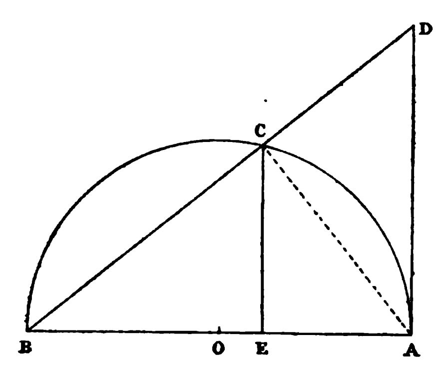
Il en résulte que les sommets C et c_1, B et b_1, A et a_1 des deux triangles ABC, $a_1b_1c_1$, sont sur des droites concourant en O; d'après un théorème connu les points d'intersection D, F, E, des côtés affectés des mêmes lettres sont en ligne droite.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Perrier, à Lons-le-Saulnier; Rivard, au Mans; Van Aubel, à Liège.

QUESTION 279

Solution, par M. LÉON FINAT, élève au Lycée de Moulins.

On donne un demi-cercle ACB *et une tangente* AD *à l'extrémité* A *du diamètre* AB. *On propose de mener par l'extrémité* B *une droite* BCD *qui coupe la circonférence en* C *et la tangente en* D, *de telle sorte que si l'on fait tourner la figure autour de* AB, *la surface de la zone engendrée par* BC *soit égale à la surface du cercle engendré par* AD.



On doit avoir

$$\pi\,\overline{BC}^2 = \pi\,\overline{AD}^2$$

ou

$$\overline{DB}^2 = \overline{CA}^2 = BD.\ CD.$$

Le point C partage BD en moyenne et extrême raison. Dès lors on divisera BA en moyenne et extrême raison et par le point E on mènera EC parallèle à AD, puis on joindra BC.

Pour l'expression de la surface on a

$$S = 2\pi R^2 (\sqrt{5} - 1)$$

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Perrier, Prost, à Lons-le-Saunier; Bourget, à Aix; Simonet à Neufchâteau; Lapareillé, Daguilhon, au lycée Henri IV; Callon, au lycée Louis-le-Grand; Joly, à Tarbes; Chrétien, au Havre; Andrieux, Tinel, à Rouen; de Barrau, à Toulouse; Pierron, à Nantes; Pfender, à Besançon; Desprez, collège Stanislas; Latallerie, à Saint-Dier (Puy-de-Dôme); Gobert, collège Chaptal; Hamon, Rivard, au Mans; Blessel, à Paris; Dulcy, à Châteauroux.

QUESTION 286

Solution par M. LAPAREILLÉ, élève du Lycée Henri IV.
(Classe de M. Colas.)

Établir une relation entre les coefficients de l'équation $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f = 0$, *pour qu'on puisse la mettre sous la forme*

$$(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^2 + p(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) + q = 0.$$

Développant il vient :

$$\alpha^2 x^4 + 2\alpha\beta x^3 + (2\alpha\gamma + \beta^2 + p\alpha)x^2 + (2\beta\gamma + p\beta)x + (\gamma^2 + q + p\gamma) = 0$$

ou

$$x^4 + \frac{2\beta}{\alpha}x^3 + \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{2\gamma + p}{\alpha}\right)x^2 + \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{2\gamma + p}{\alpha}\right)x + \frac{\gamma^2 + q + p\gamma}{\alpha^2} = 0.$$

L'équation donnée peut s'écrire

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{f}{a} = 0.$$

Pour que la transformation soit possible, il faut que l'on ait

$$\frac{2\beta}{\alpha} = \frac{b}{a} \quad (1)$$

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{2\gamma + p}{\alpha} = \frac{c}{a} \quad (2)$$

$$\frac{\beta}{\alpha} \times \frac{2\gamma + p}{\alpha} = \frac{d}{a} \quad (3)$$

$$\frac{\gamma^2 + q + p\gamma}{\alpha^2} = \frac{f}{a} \quad (4)$$

Éliminant α, β, γ et p entre ces équations on aura la relation cherchée.

De (1) on tire
$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{2a};$$
portant cette valeur dans (3), il vient
$$\frac{2\gamma + p}{\alpha} = \frac{2d}{b}$$
et alors (2) donne
$$\frac{b^2}{4a^2} + \frac{2d}{b} = \frac{c}{a};$$
d'où
$$b^3 = 4ad\,(c - 2a) :$$
telle est la relation cherchée.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Blessel, à Paris; Callon, au lycée Louis-le-Grand; Baudouin, à Beauvais; Joly, à Tarbes; Henry, à Bréchaincourt (Vosges).

QUESTION 287

Solution par M. Lapareillé, élève au Lycée Henri IV.
(Classe de M. Colas.)

On donne $x - y = a$, $xy = b$. *Exprimer* $x^n - y^n$ *en fonction de* b *et de* a *pour une valeur entière, positive et quelconque de* n.

Posons
$$x^{n-2} - y^{n-2} = \Delta_{n-2} \quad (1)$$
$$x^{n-1} - y^{n-1} = \Delta_{n-1} \quad (2)$$
$$x + y = S \quad (3)$$
Multiplions membre à membre (2) et (3), on a
$$x^n - y^n + xy\,(x^{n-2} - y^{n-2}) = S\Delta_{n-1},$$
d'où
$$\Delta_n = S\Delta_{n-1} - b\Delta_{n-2}; \quad (4)$$
or $(x - y)^2 = a^2$, $\quad (x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$,
donc
$$x + y = S = \sqrt{a^2 + 4b}$$
et (4) devient $\Delta_n = \Delta_{n-1}\sqrt{a^2 + 4b} - b\Delta_{n-2}$.

Alors en faisant $n = 2, 3, 4, \ldots$, on trouve $x^2 - y^2$, $x^3 - y^3$, $x^4 - y^4$, ..., et par suite $x^n - y^n$.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Fievet, à Lille; Blessel, à Paris; Debray, à Chauvency-Saint-Hubert; Joly, à Tarbes; Hamon, Rivard, au Mans.

NOTE D'ALGÈBRE

Formule de Taylor pour une fonction entière.

1. — L'objet de cette note est d'obtenir le développement de $f(x+h)$, ordonné suivant les puissances croissantes de h, par l'application immédiate de la règle de dérivation d'une fonction de fonction. $f(x)$ est supposé polynôme entier et rationnel en x.

Je remarque d'abord que dans un tel polynôme, dont je désigne un terme par $A_p x^p$, la dérivée d'ordre p se réduit, pour x nul, à son terme tout connu qui est $1 . 2 \ldots p . A_p$. Inversement, le coefficient de x^p s'obtiendra, si l'on sait former la dérivée d'ordre p, en y faisant x nul, puis divisant par $1 . 2 \ldots p$.

Ceci posé, $f(x+h)$ est un polynôme en h; la dérivée d'ordre p, par rapport à h, est $f^p(x+h)$ et se réduit à $f^p(x)$ pour h nul, donc le coefficient de h^p est $\frac{f^p(x)}{1 . 2 \ldots p}$, c. q. f. t.

2. — Le même raisonnement conduit à écrire immédiatement tel terme que l'on veut du développement de $(x+a)^m$ pour m entier, ce qui fournit une démonstration de la formule du binôme, qui n'est pas supposée connue pour ce qui précède.

De même, par l'application de la règle des fonctions composées, on pourra écrire un terme de degré donné en t du développement de $f(x+at, y+bt \ldots z+ct)$, si $f(x, y \ldots z)$ est polynôme entier et rationnel en $x, y \ldots z$.

Par un raisonnement analogue, dans le polynôme $f(x, y \ldots z)$, le coefficient de $x^\alpha y^\beta \ldots z^\gamma$ s'obtient en faisant $x, y \ldots z$ nuls dans le polynôme obtenu après α dérivations par rapport à x, β par rapport à y, etc., puis divisant par $1.2 \ldots \alpha . 1.2 \ldots \beta . 1.2 \ldots \gamma$, d'où les développe-

ments de $f(x + a, y + b \ldots z + c)$, et en particulier celui de $(a + b + \ldots c)^m$ pour m entier.

NOTE SUR L'ÉQUATION EN S

Par M. G. Lemaire, élève au Lycée Charlemagne.

Théorème. — *L'équation en* S *ne peut avoir une racine triple que dans le cas où la surface proposée représente une sphère, cette racine triple étant d'ailleurs différente de zéro.*

On sait comment on démontre que l'équation en S ne peut pas avoir trois racines nulles; nous nous proposons de montrer que l'équation en S n'a jamais trois racines égales excepté dans l'hypothèse

$$A = A' = A'' \quad B = B' = B'' = 0,$$

auquel cas la surface, comme on le sait, représente une sphère.

Remarquons d'abord que si une équation du troisième degré a une racine triple, celle-ci est nécessairement réelle, nous la représenterons par a. On aurait donc, par application de principes connus,

$$A + A' + A'' = 3a \qquad (1)$$

$$AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2 = 3a^2 \qquad (2)$$

Élevant la première au carré et retranchant le double de la seconde, on a d'abord

$$A^2 + A'^2 + A''^2 + 2B^2 + 2B'^2 + 2B''^2 = 3a^2 \qquad (3)$$

qui prouve, ceci est très connu, l'impossibilité de la racine triple nulle. La combinaison de (2) et (3) donne alors

$$A^2 + A'^2 + A''^2 - AA' - AA'' - A'A'' + 3B^2 + 3B'^2 + 3B''^2 = 0,$$

ou encore

$$\frac{1}{2}(A - A')^2 + \frac{1}{2}(A' - A'')^2 + \frac{1}{2}(A'' - A)^2 + 3B^2 + 3B'^2 + 3B''^2 = 0,$$

laquelle, pour des valeurs réelles des coefficients, exige bien

$$A = A' = A'' \quad B = B' = B'' = 0.$$

NOTE SUR LES DÉTERMINANTS

Par M. IBACH, étudiant à la Faculté des sciences de Marseille.

I

Soit un déterminant

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda + \mu + \nu$$

Je pose les notations suivantes que j'emploierai constamment :

$$B = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} \\ \frac{1}{b_1} & \frac{1}{b_2} & \frac{1}{b_3} \\ \frac{1}{c_1} & \frac{1}{c_2} & \frac{1}{c_3} \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} \qquad C = \begin{vmatrix} (a_2b_3) & (b_1a_3) & (a_1b_2) \\ (b_2c_3) & (c_1b_3) & (b_1c_2) \\ (a_3c_2) & (c_3a_1) & (c_2a_1) \end{vmatrix}$$

et

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{(a_2b_3)} & \frac{1}{(b_1a_3)} & \frac{1}{(a_1b_2)} \\ \frac{1}{(b_2c_3)} & \frac{1}{(c_1b_3)} & \frac{1}{(b_1c_2)} \\ \frac{1}{(a_3c_2)} & \frac{1}{(c_3a_1)} & \frac{1}{(c_2a_1)} \end{vmatrix}$$

Les formes de A et B montrent qu'il n'y a pas, en général, entre eux, de relation remarquable ; sauf pour le cas du 2e degré où A étant égal à $\lambda + \mu$, B a pour valeur $\frac{A}{\lambda\mu}$.

On a donc pour le cas du 2e degré :

$$A = B \cdot \lambda\mu. \qquad (1)$$

Le déterminant C est le réciproque de A ; on a, par conséquent, $C = A^{n-1}$ (n étant le degré).

Dans le cas du 3e ordre, il existe entre B et D une relation simple, que je vais établir ; mais je démontrerai auparavant le théorème suivant :

Théorème I. — *Lorsqu'un déterminant est nul, ses mineurs du premier ordre sont proportionnels.*

Ainsi, je suppose $B = o$ (*), je puis alors trouver des valeurs acceptables de λ, μ, ν telles que

$$\frac{\lambda}{a_1} + \frac{\mu}{a_2} + \frac{\nu}{a_3} = o$$
$$\frac{\lambda}{b_1} + \frac{\mu}{b_2} + \frac{\nu}{b_3} = o$$
$$\frac{\lambda}{c_1} + \frac{\mu}{c_2} + \frac{\nu}{c_3} = o.$$

En combinant ces équations deux à deux, je puis obtenir les trois séries de rapports

$$\frac{\lambda}{\left(\frac{1}{a_2 b_3}\right)} = \frac{\mu}{\left(\frac{1}{b_1 a_3}\right)} = \frac{\nu}{\left(\frac{1}{a_1 b_2}\right)};$$
$$\frac{\lambda}{\left(\frac{1}{b_2 c_3}\right)} = \frac{\mu}{\left(\frac{1}{c_1 b_3}\right)} = \frac{\nu}{\left(\frac{1}{b_1 c_2}\right)};$$
$$\frac{\lambda}{\left(\frac{1}{a_3 c_2}\right)} = \frac{\mu}{\left(\frac{1}{c_3 a_1}\right)} = \frac{\nu}{\left(\frac{1}{c_2 a_1}\right)}.$$

Eliminant ensuite λ, μ, ν, j'obtiens

$$\frac{\left(\frac{1}{a_2 b_3}\right)}{\left(\frac{1}{b_2 c_3}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{b_1 a_3}\right)}{\left(\frac{1}{c_1 b_3}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{a_1 b_2}\right)}{\left(\frac{1}{b_1 c_2}\right)}; \qquad (2)$$
$$\frac{\left(\frac{1}{a_2 b_3}\right)}{\left(\frac{1}{a_3 c_2}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{b_1 a_3}\right)}{\left(\frac{1}{c_3 a_1}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{a_1 b_2}\right)}{\left(\frac{1}{c_2 a_1}\right)};$$
$$\frac{\left(\frac{1}{b_2 c_3}\right)}{\left(\frac{1}{a_3 c_2}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{c_1 b_3}\right)}{\left(\frac{1}{c_3 a_1}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{b_1 c_2}\right)}{\left(\frac{1}{c_2 a_1}\right)},$$

et le théorème est démontré.

Théorème II. — *Dans le cas du troisième ordre, les déterminants* B *et* D *sont nuls en même temps.*

(*) J'ai pris B, parce que le calcul me servira au théorème suivant.

Je suppose, par exemple, $B = 0$. Alors, appliquant le théorème précédent, j'obtiens les égalités (2); et comme elles ne contiennent que des mineurs du deuxième degré, puisque A est du troisième, elles peuvent se transformer en les suivantes :

$$\frac{(a_2b_3)\cdot\dfrac{c_2c_3}{a_2a_3}}{(b_2c_3)}=\frac{(b_1a_3)\cdot\dfrac{c_1c_3}{a_1a_3}}{(c_1b_3)}=\frac{(a_1b_2)\cdot\dfrac{c_1c_2}{a_1a_2}}{(b_1c_2)};$$

$$\frac{(a_2b_3)\cdot\dfrac{c_2c_3}{b_2b_3}}{(a_3c_2)}=\frac{(b_1a_3)\cdot\dfrac{c_2c_3}{b_1b_3}}{(c_3a_1)}=\frac{(a_1b_2)\cdot\dfrac{c_1c_2}{b_1b_2}}{(c_2a_1)}.$$

Désignant par u_1, u_2 les valeurs communes de ces rapports, je remplace dans D les éléments des deuxième et troisième lignes par leurs valeurs tirées des équations précédentes.

$$\text{J'obtiens ainsi } D=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{(a_2b_3)} \cdot \dfrac{1}{(b_1a_3)} \cdot \dfrac{1}{(a_1b_2)} \\ \dfrac{1}{u_1}\,\dfrac{1}{(a_2b_3)} \cdot \dfrac{a_2a_3}{c_2c_3} \cdot \dfrac{1}{u_1} \cdot \dfrac{1}{(b_1a_3)} \cdots \\ \dfrac{1}{u_2} \cdot \dfrac{1}{(a_2b_3)} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{vmatrix}$$

ou, en faisant sortir les facteurs communs, multipliant d'abord par $(c_1c_2c_3)^2$, divisant ensuite par le produit des éléments :

$$D — \frac{c_1c_2c_3}{a_1a_2a_3\,.\,b_1b_2b_3}=\frac{1}{u_1u_2}\;\frac{1}{(a_2b_3)\,.\,(b_1a_3)\,.\,(a_1b_2)}\begin{vmatrix} \dfrac{1}{c_1} & \dfrac{1}{c_2} & \dfrac{1}{c_3} \\ \dfrac{1}{b_1} & \dfrac{1}{b_2} & \dfrac{1}{b_3} \\ \dfrac{1}{a_1} & \dfrac{1}{a_2} & \dfrac{1}{a_3} \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire

$$D=\frac{a_1a_2a_3\,.\,b_1b_2b_3}{c_1c_2c_3}\cdot\frac{B}{u_1u_2\,.\,(a_2b_3)\,.\,(b_1a_3)\,.\,(a_1b_2)},$$

et le théorème est démontré.

Remarque. — La forme précédente, étant symétrique par rapport aux éléments du déterminant, peut prendre deux autres formes analogues.

Je vais appliquer les résultats précédents au théorème suivant :

Application I. — *Les six sommets de deux triangles circonscrits à une conique sont sur une conique.*

Soient $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ les équations des côtés d'un des triangles.

$\sqrt{l\alpha} + \sqrt{m\beta} + \sqrt{n\gamma} = 0$, celle d'une conique inscrite, (4)

$\frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\mu}{\beta} + \frac{\nu}{\gamma} = 0$, — — circonscrite. (3)

Je considère de plus trois tangentes à la conique (3)

$$\left.\begin{array}{l} a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma = 0. \\ b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma = 0. \\ c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma = 0. \end{array}\right\} \quad (5) \qquad \left.\begin{array}{l} \frac{l}{a_1} + \frac{m}{a_2} + \frac{n}{a_3} = 0. \\ \frac{l}{b_1} + \frac{m}{b_2} + \frac{n}{b_3} = 0. \\ \frac{l}{c_1} + \frac{m}{c_2} + \frac{n}{c_3} = 0. \end{array}\right\} \quad (6)$$

(les déterminants A et B des systèmes (5), (6) étant les mêmes que précédemment).

Ces tangentes forment un nouveau triangle circonscrit, dont je désignerai les sommets par (a_1b_1), (b_1c_1), (c_1a_1). J'exprime que ces trois sommets sont sur (4) qui est déjà circonscrite au premier triangle. Pour cela, je tire

$$\frac{\alpha}{(a_2b_3)} = \frac{\beta}{(b_1a_3)} = \frac{\gamma}{(a_1b_2)};$$
$$\frac{\alpha}{(b_2c_3)} = \frac{\beta}{(b_3c_1)} = \frac{\gamma}{(b_1c_2)};$$
$$\frac{\alpha}{(a_2c_3)} = \frac{\beta}{(c_1a_3)} = \frac{\gamma}{(a_1c_2)};$$

éliminant ensuite α, β, γ, et successivement entre (2) et les rapports précédents, j'obtiens les conditions

$$\left.\begin{array}{ll} (a_1b_1)\ldots\ldots & \frac{\lambda}{(a_2b_3)} = \frac{\mu}{(b_1a_3)} = \frac{\nu}{(a_1b_2)} = 0, \\ (b_1c_1)\ldots\ldots & \frac{\lambda}{(b_2c_3)} = \frac{\mu}{(b_3c_1)} = \frac{\nu}{(b_1c_2)} = 0, \\ (c_1a_1)\ldots\ldots & \frac{\lambda}{(a_2c_3)} = \frac{\mu}{(a_1c_3)} = \frac{\nu}{(a_1c_2)} = 0. \end{array}\right\} (7)$$

Je cherche l'équation de la conique passant par $(\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha)$ et deux des sommets (a_1b_1, b_1c_1) par exemple, elle sera

$$S = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\gamma} \\ \frac{1}{(a_2b_3)} & \frac{1}{(b_1a_3)} & \frac{1}{(a_1b_2)} \\ \frac{1}{(b_2c_3)} & \frac{1}{(b_3c_1)} & \frac{1}{(b_1c_2)} \end{vmatrix} = 0,$$

et en exprimant que le troisième sommet a_1c_1 se trouve sur cette conique, j'obtiens enfin la condition définitive $D = 0$

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{(a_2b_3)} & \frac{1}{(b_1a_3)} & \frac{1}{(a_1b_2)} \\ \frac{1}{(b_2c_3)} & \dots & \dots \\ \frac{1}{(a_2c_3)} & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Or, le déterminant B est nul, puisque le système (6) homogène et du premier degré doit donner pour l, m, n des solutions autres que 0; donc, d'après le théorème II, D est nul aussi et le théorème est démontré.

Interprétation géométrique de la condition $D = 0$.

Le calcul précédent montre que $D = 0$ exprime que six points sont sur une conique.

Interprétation géométrique de la condition $B = 0$.

Le calcul précédent montre, de même, que $B = 0$ exprime que six droites sont tangentes à une même conique.

Remarque. — Les déterminants B et D jouent d'ailleurs le même rôle, et pour s'en assurer, il suffit de changer les notations. Aussi, si j'avais considéré les coordonnées des sommets du deuxième triangle circonscrit au lieu des équations de ses côtés, les rôles auraient été changés ; $B = 0$ eût été la condition pour que six points soient sur une conique et $D = 0$ la condition pour que six droites soient tangentes. Cette remarque démontre, si l'on veut, que la réciproque du théorème II est vraie.

II

Je considère encore le déterminant

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

avec les mêmes notations que précédemment. Je suppose qu'il satisfasse aux relations suivantes

$$\frac{a_1}{(b_2c_3)} = \frac{a_2}{(c_1b_3)} = \frac{a_3}{(b_1c_2)} = u_1;$$

$$\frac{b_1}{(a_2c_3)} = \frac{b_2}{(a_3c_1)} = \frac{b_3}{(a_1c_2)} = u_2;$$

$$\frac{c_1}{(a_2b_3)} = \frac{c_2}{(a_3b_1)} = \frac{c_3}{(a_1b_2)} = u_3;$$

Je vais alors démontrer le théorème suivant:

Théorème III. — *Le déterminant* A *est égal à la racine* $(n - 2)^{me}$ *de l'inverse du produit* $u_1\ u_2\ u_3$, *valeurs communes des rapports.*

En effet, le déterminant réciproque de A est égal à

$$C = \begin{vmatrix} (b_2c_3). & (c_1(. & (b_3b_1c_2) \\ (a_2c_3). & (a_3c_1). & (a_1c_2) \\ (a_2b_3). & (a_3b_1). & (a_1b_2) \end{vmatrix}$$

et, en éliminant les mineurs entre C et les rapports (7),

$$C = \frac{A}{u_1u_2u_3};$$

mais $C = A^{n-1}$:

donc $A = \dfrac{1}{\sqrt[n-2]{u_1u_2u_3}}$.

Remarque. — Si les quantités $u_1u_2u_3$ étaient toutes égales à 1, le déterminant A serait lui-même égal à 1.

Il résulte aussi des relations (7) que B et D sont liés par

$$B = \frac{D}{u_1u_2u_3}$$

ou $B = A^{n-2}D$,

puisque $A^{n-2} = \dfrac{1}{u_1u_2u_3}$.

Théorème IV. — *Lorsqu'un déterminant du 3e ordre satisfait aux relations* (7) *les déterminants* B *et* D *formés avec lui sont nuls tous deux.*

Je considère toujours le déterminant A écrit précédemment; on aura

$$B = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \frac{}{a_3} \\ \frac{1}{b_1} & \frac{1}{b_2} & \frac{1}{b_3} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Son réciproque E sera

$$E = \begin{vmatrix} \left(\frac{1}{b_2c_3}\right) & \left(\frac{1}{c_1b_3}\right)^{a.} & \cdot\,\cdot \\ \left(\frac{1}{a_2c_3}\right) & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Comme A est du troisième degré, ses mineurs du premier ordre sont du deuxième, et le déterminant E s'écrit

$$E = \begin{vmatrix} \frac{(b_2c_3)}{b_2c_2b_3c_3} & \frac{(c_2b_3)}{c_1c_3b_1b_3 1} & \cdots \\ \frac{(a_2c_3)}{a_1c_1a_3c_3} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

En multipliant par le carré du produit P des éléments, et divisant ensuite par ce même produit, j'obtiens

$$PE = \begin{vmatrix} \frac{(b_2c_3)}{a_1} & \frac{(c_1b_3)}{a_2} & \cdots \\ \frac{(a_2c_3)}{b_1} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Or, le deuxième membre de cette égalité est nul à cause des relations (7). Donc [en supposant que P ne soit pas nul, ce qui est nécessaire, d'ailleurs, à cause de (7)] E est nul aussi, et comme $E = B^2$,

B est égal à O et le théorème est démontré, puisque d'après (II) B et D sont nuls en même temps.

Application II. — *Les six sommets de deux triangles autopolaires par rapport à une conique sont sur une conique.*

Soient $\alpha = o, \ \beta = o, \ \gamma = o$
l'un des triangles, et

$$\left.\begin{array}{l} a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma = o \\ b_1\alpha + b_2\beta + \dots \\ c_1\alpha + c_2\beta + \dots \end{array}\right\} (8)$$

les équations des côtés du deuxième.

Les deux triangles précédents seront autopolaires par rapport à une même conique, si le dernier l'est par rapport à

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = o.$$

Le sommet $(a_1\, b_1)$ est déterminé par

$$\frac{\alpha'}{(a_2b_3)} = \frac{\beta'}{(a_3b_1)} = \frac{\gamma'}{(a_1b_2)}$$

et sa polaire, qui est $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = o$,
doit aussi être $c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma = o$.

On a donc les conditions

$$\frac{c_1}{(a_2b_3)} = \frac{c_2}{(a_3b_1)} = \frac{c_3}{(a_1b_2)};$$

$$\frac{b_1}{(a_2c_3)} = \frac{b_2}{(a_3c_1)} = \frac{b_3}{(a_1c_2)};$$

$$\frac{a_1}{(b_2c_3)} = \frac{a_2}{(c_3b_1)} = \frac{a_3}{(b_1c_2)};$$

mais elles expriment que le déterminant A du système (8) rentre dans la catégorie des déterminants étudiés précédemment, et nous avons vu que pour ceux-ci

$$D = o.$$

Or, telle est la condition pour que les six sommets soient sur une même conique : le théorème est donc démontré.

Application III. — *Les six côtés sont tangents à une même conique.*

Ce théorème est encore évident, puisque B est nul aussi et que B exprime que les six côtés sont tangents à une même conique.

Interprétation géométrique des relations (7).

Le calcul précédent montre qu'assujettir un déterminant aux conditions (7), c'est exprimer que deux triangles sont autopolaires par rapport à une même conique.

Cette dernière remarque est applicable aux surfaces deuxième degré.

ÉTUDE SUR LES COORDONNÉES TANGENTIELLES

ET LEURS APPLICATIONS.

Par M. E. J. Boquel.

(*Suite*; voir page 232.)

Transformation des coordonnées tangentielles déduites de la propriété fondamentale de la forme adjointe. — Nous avons démontré, dans notre travail sur les formes quadratiques, que si une forme f est transformée par une certaine substitution linéaire en une autre forme f', la forme F, adjointe de f, est transformée en la forme F′, adjointe de f', par la substitution adjointe de la substitution donnée.

Il résulte immédiatement de ce principe que la forme f étant transformée en f' par une substitution linéaire, il suffira de prendre la substitution adjointe de celle-ci pour avoir les formules qui transforment l'équation tangentielle de la courbe relative au premier cas, en l'équation tangentielle de la courbe pour le second cas.

Or, soit

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \alpha_{11}x'_1 + \alpha_{12}x'_2 + \ldots + \alpha_{1n}\,x'_n \\ x_1 = \alpha_{21}x'_1 + \alpha_{22}x'_2 + \ldots + \alpha_{2n}\,x'_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \alpha_{n1}x'_1 + \alpha_{n2}x'_2 + \ldots + \alpha_{nn}\,x'_n \end{array}\right. \qquad (1)$$

la première substitution, dont le déterminant est R, la substitution adjointe est, comme on sait, la suivante

$$\begin{array}{l} x_1 = R'_{(\alpha_{11})}x'_1 + R'_{(\alpha_{12})}x'_2 + \ldots + R'_{(\alpha_{1n})}x'_n \\ x^2 = R'_{(\alpha_{21})}x'_1 + R'_{(\alpha_{22})}x'_2 + \ldots + R'_{(\alpha_{2n})}x'_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = R'_{(\alpha_{n1})}x'_1 + R'_{(\alpha_{n2})}x'_2 + \ldots + R'_{(\alpha_{nn})}x'_n. \end{array}$$

L'équation tangentielle d'une conique $f(x, y, z) = 0$ étant la forme adjointe $F(u, v, w)$ de f égalée à o, quand f sera changée en f', F se changera en F' par la substitution adjointe. F' égalée à o étant d'ailleurs l'équation tangentielle de la courbe après substitution, la substitution adjointe donne donc les formules de transformation de F en F', c'est-à-dire les formules de transformation des coordonnées tangentielles.

Or on a, pour la première substitution,

$$x = x'\frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin\theta} + y'\frac{\sin(\theta - \alpha')}{\sin\theta} + az',$$

$$y = x'\frac{\sin\alpha}{\sin\theta} + y'\frac{\sin\alpha'}{\sin\theta} + bz',$$

$$z = z'.$$

$$\text{Donc } R = \begin{vmatrix} \dfrac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin\theta} & \dfrac{\sin(\theta - \alpha')}{\sin\theta} & a \\ \dfrac{\sin\alpha}{\sin\theta} & \dfrac{\sin\alpha'}{\sin\theta} & b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

et par suite la substitution adjointe donnera

$$u = u'\frac{\sin\alpha'}{\sin\theta} - v'\frac{\sin\alpha}{\sin\theta},$$

$$v = -u'\frac{\sin(\theta - \alpha')}{\sin\theta} + v'\frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin\theta},$$

$$w = \frac{\sin(\theta - \alpha)\sin\alpha'}{\sin^2\theta} - \frac{\sin(\theta - \alpha')\sin\alpha}{\sin^2\theta} = \frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{\sin\theta}.$$

Application de l'équation tangentielle des coniques à la recherche des foyers. — On démontre, dans tous les cours de spéciales, que les foyers d'une conique sont des points tels que si l'on mène de ces points des tangentes à la courbe, ces tangentes ont les directions isotropes, c'est-à-dire les directions asymptotiques du cercle.

Cela posé, si $\varphi(u, v) = 0$ est l'équation tangentielle d'une conique, c'est-à-dire la condition pour qu'une droite $ux + vy + 1 = 0$ soit tangente à cette conique, on exprimera que la tangente passe par un point (α, β) en écrivant la relation $u\alpha + v\beta + 1 = 0$, et cette relation jointe

à l'équation tangentielle $\varphi(u, v) = 0$ détermine les coordonnées u et v des tangentes qu'on peut mener à la courbe par le point (α, β). L'équation $\varphi(u, v) = 0$ étant du second degré, il y aura deux solutions, c'est-à-dire deux tangentes issues du point $(\alpha\beta)$. Pour que ces tangentes aient les directions isotropes, il faut que u et v satisfassent à l'équation $u^2 + v^2 = 0$ en coordonnées rectangulaires, ou à l'équation $u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta = 0$ en coordonnées obliques d'angle θ. L'expression de cette condition conduira à la détermination du point $(\alpha\beta)$, qui dès lors sera un foyer.

Prenons pour exemple l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; son équation tangentielle, déterminée comme il a été dit précédemment, sera $$a^2u^2 + v^2b^2 = 1.$$

On a d'ailleurs $$u\alpha + v\beta + 1 = 0.$$

Ces deux équations déterminent les coordonnées des deux tangentes qu'on peut mener à l'ellipse du point $(\alpha\beta)$; pour que ces droites aient les directions isotropes, c'est-à-dire pour que le point $(\alpha\beta)$ soit un foyer, il faut qu'on ait (les coordonnées étant rectangulaires)

$$u^2 + v^2 = 0.$$

Or on tire de ces équations $u^2 = \frac{1}{a^2 - b^2}$ et $v^2 = \frac{1}{b^2 - a^2}$.

Supposons $a > b$, c'est-à-dire que l'axe des x ait été choisi de telle façon qu'il soit le plus grand des deux axes en longueur, on aura, en posant $a^2 - b^2 = c^2$,

$$u = \pm \frac{1}{c} \text{ et } v = \pm \frac{1}{c}\sqrt{-1},$$

d'où la condition $\pm \frac{\alpha}{c} \pm \sqrt{-1} \, . \, \frac{\beta}{c} + 1 = 0.$

Cette condition exige que l'on ait séparément $\beta = 0$ et $\alpha = \pm c$, formules qui donnent les coordonnées des deux seuls foyers réels de la courbe.

Les directrices correspondantes s'obtiendront en prenant les polaires respectives des foyers; ce qui donne les deux droites $x = \frac{a^2}{c}$ et $x = -\frac{a^2}{c}$.

Dans la pratique, on cherche généralement la condition

pour qu'une droite $y = mx + n$ soit tangente à la conique donnée, et on écrit que m satisfait à l'une des relations $1 + m^2 = 0$, ou bien $1 + m^2 + 2m \cos\theta = 0$, relation qui fournit deux équations pour déterminer α et β, en égalant séparément à zéro le coefficient de la partie réelle et celui de la partie imaginaire.

Si l'équation des coniques considérées contient un paramètre variable, l'élimination de ce paramètre entre les deux équations ainsi obtenues fournira le lieu décrit par les foyers.

Cette méthode nous semble la plus simple de toutes celles que l'on donne ordinairement pour la détermination des foyers, ou des lieux de foyers, et surtout quand des motifs particuliers, tirés de la nature de la question, engagent à adopter des coordonnées obliques. Il ne sera pas inutile d'en donner un exemple :

On considère toutes les coniques tangentes à deux droites données en des points donnés A *et* B; *trouver le lieu de leurs foyers.*

Si l'on prend pour axes les deux droites données, en appelant a et b les coordonnées respectives des points A et B, l'équation générale des coniques considérées sera

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)^2 + 2\lambda xy = 0.$$

Écrivons qu'une droite $y = mx + n$ est tangente à cette courbe, nous aurons

$$n^2(2 + \lambda ab) + 2n(am - b) - 2amb = 0.$$

La condition pour que la tangente passe par le point $(\alpha\beta)$ est $\alpha\beta = m + n$, de sorte que l'équation qui donne les coefficients angulaires des tangentes issues du point $(\alpha\beta)$ est

$$(\beta - m\alpha)^2(2 + \lambda ab) + 2(\beta - m\alpha)(am - b) - 2amb = 0,$$

c'est-à-dire

$$m^2[\alpha^2(2 + \lambda ab) - 2a\alpha] + 2m[a\beta + b\alpha - ab - \alpha\beta(2 + \lambda ab)] \\ + \beta^2(2 + \lambda ab) - 2b\beta = 0,$$

L'équation qui donne les directions isotropes en coordonnées obliques est

$$m^2 + 2m\cos\theta + 1 = 0.$$

On aura donc

$$\alpha^2(2+\lambda ab) - 2a\alpha = \frac{a\beta + b\alpha - ab - \alpha\beta(2+\lambda ab)}{\cos\theta} = \beta^2(2+\lambda ab) - 2b\beta.$$

Entre ces deux équations éliminant λ, on aura l'équation du lieu des foyers.

Or, on a

$$2 + \lambda ab = \frac{2(a\alpha - b\beta)}{\alpha^2 - \beta^2} = \frac{a\beta + b\alpha - ab + 2b\beta\cos\theta}{\beta(\beta\cos\theta + \alpha)}.$$

L'équation du lieu est donc

$$2y(x + y\cos\theta)(ax - by) = (x^2 - y^2)(ay + bx - ab + 2by\cos\theta),$$

qui représente une courbe du troisième degré ayant un point double à l'origine des axes, et qui, par conséquent, est facile à construire par le procédé $y = tx$ (c'est une courbe unicursale). Son équation, dont la forme est $A_1A_2A_3 = B_1B_2B_3$, dans laquelle $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ sont des fonctions linéaires des coordonnées x et y, met immédiatement en évidence plusieurs propriétés de la courbe, que le lecteur trouvera facilement.

(A suivre.)

QUESTION 257.

Solution par M. BARON, élève au Lycée Henri IV.

A partir du point A *où la normale en* M *rencontre l'un des axes, nous menons une perpendiculaire à cette normale; cette droite rencontre le diamètre* OM *en un point* D. *Nous abaissons de ce point* D *une perpendiculaire sur l'axe dont nous avons considéré le point de rencontre avec la normale. Cette perpendiculaire rencontre la normale au centre du cercle osculateur à la courbe en* M.

Je prends pour axes de coordonnées Mx et My, parallèles aux axes de l'ellipse. L'équation de l'ellipse est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{2x\cos\varphi}{a} + \frac{2y\sin\varphi}{b} = 0. \quad (1)$$

Nous avons vu (n° 256) que le centre du cercle osculateur était déterminé par l'intersection de la perpendiculaire au milieu de la seconde corde commune au cercle et à la courbe, avec la normale en M.

Les équations de la normale et de la corde commune sont

$$y = \frac{a \sin \varphi}{b \cos \varphi} x \qquad (2)$$

$$y + 2b \sin \varphi \cos^2 \varphi = -\frac{a \sin \varphi}{b \cos \varphi}(x + 2a \sin^2\varphi \cos \varphi) \qquad (3)$$

Leur point d'intersection aura pour abscisse

$$x = -\frac{(a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi) \cos \varphi}{a}. \qquad (4)$$

Cela posé, je remarque que si la parallèle menée par D à l'axe OB passe par le centre du cercle osculateur, l'abscisse du point D sera la même que celle de I.

Or, la ligne OM a pour équation

$$y = \frac{b \sin \varphi}{a \cos \varphi} x. \qquad (5)$$

Le point A, intersection de la normale en M avec OA, a pour coordonnées $y = -b \sin \varphi$

$$x = -\frac{b^2 \cos \varphi}{a}.$$

La perpendiculaire à MA par le point A est

$$y + b \sin \varphi = -\frac{b \cos \varphi}{a \sin \varphi}\left(x + \frac{b^2 \cos \varphi}{a}\right) \qquad (6)$$

Cherchons l'abscisse du point commun à cette droite et à OM; on trouve après réduction

$$x = -\frac{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) \cos \varphi}{a}$$

Donc la parallèle à OB menée par le point D passe par le centre du cercle osculateur, et le détermine par son intersection avec la normale.

QUESTION 273

Solution par M. Dupuy, élève du Lycée de Grenoble.

Si m *désigne un nombre entier et positif, à quelle condition doit-il satisfaire pour que*

$$(x + y)^m - (x^m + y^m)$$

soit divisible par $x^2 + xy + y^2$?

Il s'agit de chercher pour quelle valeur de m l'expression

$$(x+y)^m-(x^m+y^m)$$

s'annule quand on y remplace x par sa valeur en fonction de y tirée de l'équation

$$x^2+xy+y^2=0.$$

On trouve $x=y\left(\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)$;

en appelant j et j^2 les racines cubiques imaginaires de l'unité, on voit que l'on a

$$x=jy,\ \text{et}\ x=j^2y.$$

Portant ces valeurs dans l'expression proposée, il viendra

$$(jy+y)^m-(j^m y^m+y^m)=0,\ \text{ou}\ (j+1)^m=j^m+1$$

et $(j^2y+y)^m-(j^{2m} y^m+y^m)=0$, ou $(j^2+1)^m=j^{2m}+1$.

Remplaçant j par sa valeur, il vient

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^m=(-1)^m\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^m+1.$$

Or $\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$;

donc on a

$$\cos\frac{m\pi}{3}+i\sin\frac{m\pi}{3}=(-1)^m\left(\cos\frac{m\pi}{3}-i\sin\frac{m\pi}{3}\right)+1.$$

Si donc m est pair, on aura, tous calculs faits,

$$\sin\frac{m\pi}{3}=\frac{1}{2i},$$

équation impossible.

Au contraire, pour m impair, on aura

$$\cos\frac{m\pi}{3}=\frac{1}{2},$$

équation qui sera satisfaite pour $m=6p\pm1$.

En considérant la seconde équation, on retrouvera la même condition. Donc, pour que l'expression

$$(x+y)^m-(x^m+y^m)$$

soit divisible par x^2+xy+y^2, il faut que m soit de la forme $6p\pm1$.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Andrieu, au lycée de Rouen; Le Pont, au lycée Saint-Louis; Boulogne, au lycée de Lille.

QUESTION 297

Solution par M. Baron, élève au Lycée Henri IV.

Si α, β, γ, δ *sont racines de l'équation du quatrième degré* $f(x) = 0$, *on peut exprimer la somme*

$$\Sigma = f'(\alpha) + f'(\beta) + f'(\gamma) + f'(\delta)$$

sous forme d'un produit de trois facteurs.

En effet, en supposant le premier coefficient égal à l'unité. on a

$$f'(\alpha) = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta),$$
$$f'(\beta) = (\beta - \alpha)(\beta - \gamma)(\beta - \delta),$$
$$f'(\gamma) = (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)(\gamma - \delta),$$
$$f'(\delta) = (\delta - \alpha)(\delta - \beta)(\delta - \gamma).$$

En faisant la somme, il vient

$$\Sigma = (\alpha - \beta)[\alpha^2 - \beta^2 - (\alpha - \beta)(\gamma + \delta)] + (\gamma - \delta)[\gamma^2 - \delta^2 - (\gamma - \delta)(\alpha + \beta)]$$
$$\Sigma = (\alpha - \beta)^2[(\alpha + \beta) - (\gamma + \delta)] + (\gamma - \delta)^2[(\gamma + \delta) - (\alpha + \beta)]$$
$$\Sigma = (\alpha - \beta + \gamma - \delta)(\alpha - \beta - \gamma + \delta)(\alpha + \beta - \gamma - \delta).$$

Remarque. — On peut facilement trouver l'expression de Σ en fonction des coefficients sans connaître les racines de $f(x) = 0$.

En désignant par S_1, S_2, S_3 les sommes des puissances 1, 2, 3 des racines, si

$$f(x) = A_0x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4 = 0,$$
$$f'(x) = 4A_0x^3 + 3A_1x^2 + 2A_2x + A_3,$$

on aura donc les relations suivantes :

$$4A_0S_3 + 3A_1S_2 + 2A_2S_1 + 4A_3 - \Sigma = 0,$$
$$A_0S_3 + A_1S_2 + A_2S_1 + 3A_3 = 0,$$
$$A_0S_2 + A_1S_1 + 2A_2 = 0,$$
$$A_0S_1 + A_1 = 0.$$

Éliminant S_1, S_2, S_3; il vient

$$\begin{vmatrix} 4A_0 & 3A_1 & 2A_2 & 4A_3 \\ A_0 & A_1 & A_2 & 3A_3 \\ 0 & A_0 & A_1 & 4A_2 \\ 0 & 0 & A_0 & A_1 \end{vmatrix} + A_0^3\Sigma = 0$$

ou $$A_0^2\Sigma + \begin{vmatrix} A_1 & 2A_2 & 8A_3 \\ A_0 & A_1 & 2A_2 \\ o & A_0 & A_1 \end{vmatrix} = o.$$

c'est-à-dire $$A_0^2\Sigma + A_1^3 + 8A_0A_3 - 4A_0A_1A_2 = o$$

et $$\Sigma = \frac{4A_0A_1A_2 - 8A_0^2A_3 - A_1^3}{A_0^2}.$$

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Boulogne, Quiquet, de Lille, Petit, de Grenoble; Séry, lycée Saint-Louis; Leffuber, à Rennes; Gino Loria, à Mantoue.

CHOIX DE QUESTIONS

PROPOSÉES AUX EXAMENS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1880

Géométrie analytique à deux dimensions.

Etant donnés une parabole et un point A dans son plan, trouver sur la courbe un point M tel que la droite AM soit normale à la parabole au second point N où elle la rencontre. Discussion des résultats.

— Etant donnée l'équation $x^2 + y^2 - 1 - (2x + y - 1)^2 = o$, calculer les coordonnées : 1° des foyers; 2° des sommets réels; 3° des sommets imaginaires, de la courbe qu'elle représente.

Equation du second degré qui représente le faisceau des asymptotes.

— Points remarquables de la courbe $x^3 + xy^2 + y^3 - x^2 = o$.

— Etant donnée la courbe dont l'équation est $y^2 = \frac{x^3}{1-x}$, calculer les coordonnées du centre de gravité du triangle formé par les trois tangentes issues d'un point donné $(\alpha\beta)$.

— Sachant que pour qu'une forme homogène du second degré à trois variables soit un carré parfait, il faut et il suffit que les trois dérivées partielles de cette forme soient des multiples d'un même polynôme homogène du premier degré. appliquer cette propriété à la recherche des foyers de la courbe

$$y^2 - 3xy + x^2 - 1 = o.$$

— Lieu des contacts des tangentes menées d'un point $(\alpha\beta)$ du plan à toutes les hyperboles ayant mêmes asymptotes.

— Trouver les tangentes horizontales de la courbe

$$y = x^2 \pm \frac{1}{2} x^2\sqrt{1 + x}.$$

— Soit l'équation $Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dx^3 + 3Ex^2 + 6Fxy + 3Gy^2 + 3Hx + 3Ky = o$, on demande le lieu des milieux des cordes menées de l'origine des coordonnées dans la courbe représentée par cette équation.

— Chercher la relation qui doit exister entre les coefficients des équations

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 1 = o,$$

$$\text{et } A'(x-\lambda)^2 + 2B'(x-\lambda)y + C'y^2 + 1 = o,$$

pour que l'axe des x soit une sécante commune aux deux coniques qu'elles représentent. — Quelles applications immédiates peut-on faire du résultat trouvé?

— Soient $f(x,y) = 0$ et $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$ les équations d'une courbe quelconque et d'une droite ; trouver l'équation de la courbe symétrique de la courbe donnée par rapport à la droite donnée.

— On demande de former l'équation générale des courbes du quatrième degré ayant deux branches passant à l'origine des axes. — Cela posé, trouver les contacts des tangentes menées de l'origine à la courbe complète, et former l'équation du faisceau de ces tangentes.

— Recherche des sécantes communes aux deux coniques

$$x^2 + xy - x - 1 = 0 \quad \text{et} \quad 2x^2 + y^2 - 2x + y - 1 = 0.$$

— Rechercher, par le calcul et par le raisonnement direct, si deux coniques peuvent être bitangentes en des points imaginaires.

— Construire la courbe ayant pour équation $y = x \frac{e^x}{e^x - 1}$.

— On mène à la courbe $y = x^3$ une tangente qui rencontre la courbe en un second point B autre que le contact A. On demande le lieu des milieux des segments AB compris sur chaque tangente entre ces deux points.

QUESTIONS PROPOSÉES

Mathématiques élémentaires.

346. — Sur une droite, à partir d'un point A, on porte des longueurs égales AB, BC, CD... à la suite les unes des autres ; au point A on élève une perpendiculaire AX, et l'on joint X aux divers points de division. Trouver une relation entre les angles sous lesquels on voit du point X les divers segments AB, BC, CD, etc.

347. — Dans un parallélogramme, on donne la somme des côtés et des diagonales $2a$, un angle β, et l'angle des diagonales ω. Trouver les côtés et les diagonales.

348. — Trois circonférences passent en un point H, et se coupent en trois autres points situés sur une droite xy. Si par un point quelconque de xy, on mène des tangentes aux trois circonférences, les trois points de contact ainsi obtenus et le point H sont sur une même circonférence.

349. — Dans tout quadrilatère, les diagonales coupent les côtés du parallélogramme maximum inscrit aux sommets d'un deuxième quadrilatère, inscrit dans le parallé-

logramme semblable au quadrilatère donné, et égal au quart de ce premier quadrilatère.

350. — Les centres de gravité des quatre triangles dans lesquels tout quadrilatère est divisé par ses deux diagonales sont les sommets d'un second quadrilatère semblable au parallélogramme maximum inscrit dans le quadrilatère proposé, et équivalent aux $\frac{2}{9}$ de ce quadrilatère.

351. — On donne un cercle O, deux diamètres rectangulaires AA', BB'; trouver sur OB un point C tel qu'en joignant AC et en menant DCD' parallèle à AA' le prolongement de AC partage l'arc BD' en deux parties égales.

352. — Construire géométriquement un triangle, connaissant un côté, l'angle opposé et la bissectrice de cet angle ou de son supplément.

353. — Sur la circonférence d'un demi-cercle de diamètre AB, on donne un point P. On demande de mener par ce point une droite PX rencontrant le diamètre en X de telle manière que, si l'on élève par le point X l'ordonnée XY du cercle perpendiculaire au diamètre AB, on ait

$$PX^2 - XY^2 = d^2. \qquad \textit{(Lieber.)}$$

354. — Mener par un point P, pris dans l'intérieur d'un cercle, une corde qui soit divisée en moyenne et extrême raison par le point P. *(Lieber.)*

Mathématiques spéciales.

355. — Trouver la relation qui doit exister entre les coefficients de l'équation

$$x^6 + Px^5 + Qx^4 + Rx^3 + Sx^2 + Tx + U = 0$$

pour que la somme de trois des racines soit égale à la somme des trois autres.

356. — Étant donnée une conique, on considère les cercles qui sont tangents à cette conique et tels que les tangentes communes à la conique et au cercle soient parallèles. Trouver le lieu des centres de tous ces cercles.

357. — Étant donnée une conique tangente en deux points fixes A et B aux deux côtés d'un angle fixe, on mène à cette conique une troisième tangente variable terminée en C et D aux côtés de l'angle donné; par les points C et D, on mène des parallèles aux deux côtés de l'angle : on demande le lieu des points d'intersection de ces parallèles quand la troisième tangente prend toutes les positions possibles. *(On pourra employer les coordonnées trilinéaires pour résoudre ce problème.)*

358. — On demande si la série

$$1 + \frac{2^m}{1} + \frac{3^m}{2^{m+p}} + \frac{4^m}{3^{m+p}} + \ldots + \frac{n^m}{(n-1)^{m+p}} + \ldots$$

est convergente.

On pourra appliquer le théorème qui permet de considérer le rapport $\dfrac{L \cdot \frac{1}{u_n}}{L \cdot n}$ comme caractère de convergence.

359. — Trouver la condition pour que les polynômes

$$ax^7 + bx^3 + c$$
$$cx^7 + bx^4 + a$$

aient un facteur commun du second degré.

360. — Le quotient de $(2m - 1)!$ par $(m)!\,(m - 1)!$ est toujours un nombre pair, excepté quand m est une puissance de 2; l'exposant de la puissance de 2 qui entre en facteur dans le quotient est $(q - p - 1)$, q étant la somme des chiffres de $2m - 1$ écrits dans le système binaire et p l'exposant de la plus haute puissance de 2 qui entre en facteur dans m. (*Wolstenholme.*)

Le Rédacteur-Gérant,

J. KŒHLER.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 11624-1.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE 1881

Composition de Mathématiques (trois heures).

On donne un cône de révolution dont la génératrice SA *fait avec l'axe* SZ *un angle* β, *et une ellipse dont les demi-axes sont* a *et* b.

1° *Démontrer que l'ellipse peut toujours être obtenue en coupant le cône par un plan convenablement déterminé.*

2° *Si* AB *est la trace du plan sécant sur le plan méridien* ASB *qui lui est perpendiculaire, démontrer la relation*

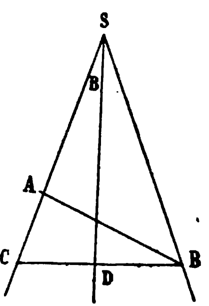
$$\text{SA} \cdot \text{SB} = \frac{b^2}{\sin^2 \beta}.$$

3° *Calculer en fonction des données* a, b, β, *par des formules logarithmiques, l'angle* SAB, *la portion* SA *de la génératrice, ainsi que l'aire du triangle* SAB.

On appliquera ces formules aux nombres suivants :

$$a = 43^m,906,\ b = 25^m,4346,\ \beta = 5^\circ\ 12'8'',48.$$

1° Supposons que le plan sécant soit déterminé d'après les conditions de l'énoncé ; soit AB sa trace sur le plan méridien qui lui est perpendiculaire. Si l'on mène BC perpendiculaire à SZ, on sait que la longueur AC est égale à la distance focale $2c$; dans le triangle ABC on connaît donc $AB = 2a$, $AC = 2c$, l'angle $C = 90° - \beta$. On peut donc construire ce triangle ; la construction est toujours possible d'une seule manière, parce que



$$AB > AC.$$

La perpendiculaire DS élevée sur le côté AB en son milieu détermine la position du point S, et par suite le triangle SAB. Ce triangle détermine la position du plan sécant.

2° Le triangle ABC donne la relation

$$AB^2 = AC^2 + 4BD^2 - 4BD \cdot AC \sin \beta$$

ou bien $\quad a^2 = c^2 + BD^2 - 2BD \,.\, c \sin \beta;$

d'où l'on tire $\quad BD = c \sin \beta + \sqrt{b^2 + c^2 \sin^2 \beta}$

en prenant le radical avec le signe +, car le signe — donnerait pour BD une valeur négative qui ne convient pas à la question.

On a ensuite

$$SB = \frac{BD}{\sin \beta} = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 \sin^2 \beta}}{\sin \beta} + c$$

et $$SA = SB - 2c = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 \sin^2 \beta}}{\sin \beta} - c.$$

Donc $$SA \,.\, SB = \frac{b^2 + c^2 \sin^2 \beta}{\sin^2 \beta} - c^2 = \frac{b^2}{\sin^2 \beta}.$$

3° Le triangle ABC donne

$$\frac{a}{\cos \beta} = \frac{c}{\sin B};$$

d'où $$\sin B = \frac{c \cos \beta}{a}.$$

En posant $$\frac{b}{a} = \cos \varphi,$$

on a $$c = \sqrt{a^2 - b^2} = a \sin \varphi$$

et par suite $$\sin B = \sin \varphi \cos \beta.$$

L'angle SAB est égal à B + C ou à $90° - \beta + B$, expression dans laquelle il faut prendre pour B l'angle aigu correspondant à la valeur de sin B.

La valeur de SA trouvée plus haut peut s'écrire

$$SA = c\left[\sqrt{1 + \frac{b^2}{c^2 \sin^2 \beta}} - 1\right]$$

ou, en posant $\quad \operatorname{tg} \psi = \dfrac{b}{c \sin \beta} = \dfrac{\cot \varphi}{\sin \beta}$

$$SA = c\,[\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi} - 1] = c\,\frac{(1 - \cos \psi)}{\cos \psi}.$$

$$= \frac{2c \sin^2 \frac{\psi}{2}}{\cos \psi} = \frac{2a \sin \varphi \sin^2 \frac{\psi}{2}}{\cos \psi}.$$

Enfin la surface du triangle SAB a pour expression

$$S = \frac{1}{2} SA.\, SB \sin 2\beta = \frac{b^2 \sin 2\beta}{2 \sin^2 \beta} = b^2 \cot \beta.$$

APPLICATION NUMÉRIQUE

Calcul de l'angle φ. $\cos\varphi = \frac{b}{a} = \frac{25{,}4346}{43{,}906}$

$$\log 25{,}4346 = 1{,}425\ 4249$$
$$\text{colog } 43{,}906 = \bar{2}{,}357\ 4761$$
$$\log\cos\varphi = \bar{1}{,}762\ 9010$$
$$\varphi = 54°35'56'',08.$$

Calcul des angles B et SAB.

$\sin B = \sin\varphi.\cos\beta.$

$$\log\sin\varphi = \bar{1}{,}911\ 2198.2$$
$$\log\cos 5°12'8'',48 = \bar{1}.998\ 2072.9$$
$$\log\sin B = \bar{1}{,}909\ 4271.1$$
$$B = 54°16'\ 5'',33$$
$$90° - \beta = 84°47'51'',52$$
$$SAB = B + 90° - \beta = 139°\ 3'56'',85.$$

Calcul de l'angle ψ.

$$\text{tg}\,\psi = \frac{\cot\varphi}{\sin\beta} = \frac{\cot 54°35'56'',08}{\sin\ 5°12'8'',48}$$

$$\log\cot 54°35'56'',08 = \bar{1}{,}851\ 6811.8$$
$$\text{colog}\sin 5°12'8'',48 = 1{,}042\ 5195.6$$
$$\log\text{tg}\,\psi = 0{,}894\ 2007.4$$
$$\psi = 82°43'45'',13$$
$$\frac{1}{2}\psi = 41°21'52'',57.$$

Calcul de SA.

$$SA = \frac{2a\sin\varphi\sin^2\frac{\psi}{2}}{\cos\psi}$$

$$= \frac{2.43{,}906.\ \sin\ 54°35'56'',08\sin^2 41°21'52'',57}{\cos 82°43'45'',13}$$

$$\log 2 = 0.30103$$
$$\log a = 1{,}6425239$$
$$\log\sin\varphi = \bar{1}{,}9112198.2$$
$$2\log\sin\frac{\psi}{2} = \bar{1}{,}6402035.4$$
$$\text{colog}\cos\psi = 0{,}8977068.5$$
$$\log SA = 2{,}3926841.1 \qquad SA = 246{,}9927.$$

Calcul de la surface du triangle SAB.

$$S = b^2 \cot\beta = (25{,}4346)^2 \cot 5°12'8'',48$$

$$2 \log b = 2{,}8108498$$

$$\log \cot\beta = 1{,}0407268.5$$

$$\log S = 3{,}8515766.5$$

$$S = 7105.2057$$

DEUXIÈME QUESTION. — *Résoudre l'équation* $\sqrt{mx + a} + \sqrt{x + b} = c$, *les lettres* a, b, c, m *désignant des nombres donnés dont le dernier est supérieur ou au moins égal à* 1. *Condition de réalité des racines. Limites de* c.

En faisant disparaître successivement les deux radicaux d'après la méthode connue, on obtient l'équation du second degré

$$x^2(m-1)^2 + 2x[(m-1)(a-b-c^2)-2c^2] + (a-b-c^2)^2 - 4bc^2 = 0$$

La condition de réalité des racines est

$$[(m-1)(a-b-c^2)-2c^2]^2 + 4bc^2(m-1)^2 - (m-1)^2(a-b-c^2)^2 > 0$$

ou, après réduction et division par $4c^2$, facteur positif :

$$c^2 - (m-1)(a-b-c^2) + b(m-1)^2 > 0$$

$$mc^2 + (m-1)(mb-a) > 0$$

On voit que si $mb - a$ est positif, les racines seront toujours réelles ; si $mb - a$ est négatif, c devra être plus grand que $+\sqrt{\dfrac{(a-mb)(m-1)}{m}}$ ou plus petit que $-\sqrt{\dfrac{(a-mb)(m-1)}{m}}$.

Il est essentiel d'observer qu'une seule des valeurs de x peut satisfaire à l'équation donnée, si les radicaux n'y sont pas affectés du double signe.

ÉPURE

On donne un plan PαP′, *incliné de 40 degrés sur le plan horizontal et dont la trace horizontale fait avec la ligne de terre un angle de 36 degrés. Un cercle situé sur ce plan, dans le premier dièdre, est tangent aux deux traces* αP *et* αP′ *et a pour diamètre 54 millimètres ; ce cercle est la base d'un cône*

droit, situé au-dessus du plan PαP′ *et dont la hauteur égale 108 millimètres. On demande :*

1° De construire les projections de ce cône ;

2° De trouver les points de rencontre de ce cône avec la parallèle à la ligne de terre menée par le milieu de la hauteur ;

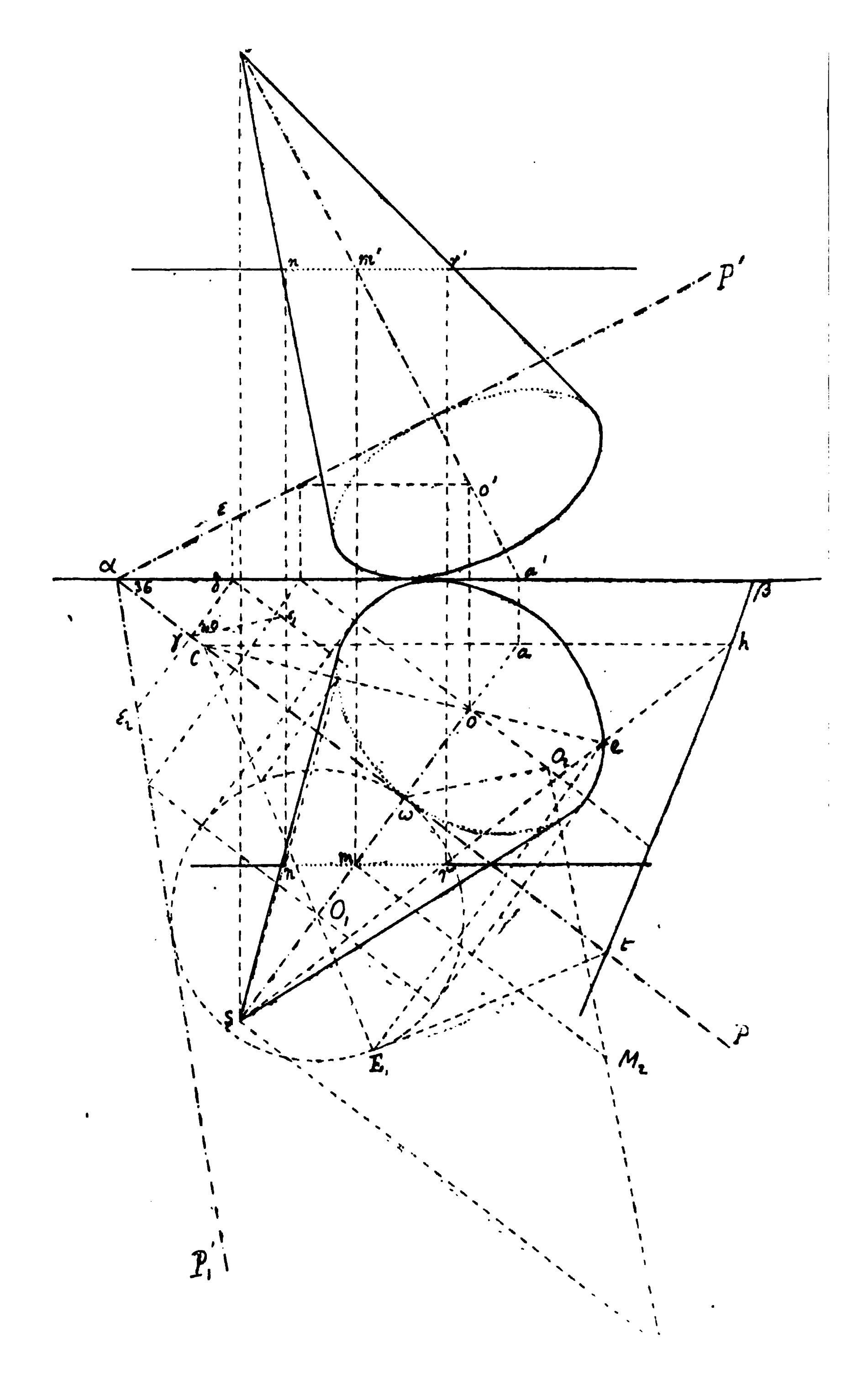
3° De mener le plan tangent au cône par le point de rencontre situé à droite.

Pour construire l'épure, je vais déterminer les diverses parties du problème sans me servir des projections du cône.

D'abord, je déterminerai facilement la trace horizontale et la trace verticale du plan, ainsi que le rabattement de la trace verticale de ce plan. Il suffit pour cela de mener αP faisant avec la ligne de terre l'angle de 36°; ensuite, je mènerai γδ perpendiculaire à αP, $\delta\varepsilon_2$ parallèle à αP, jusqu'à la rencontre avec $\gamma\varepsilon_2$ faisant avec γδ un angle de 40°; $\delta\varepsilon_2$ est égal à la cote d'un point de la trace verticale αP′, et si, sur le prolongement de δγ je prends $\gamma\varepsilon_1$ égal à $\gamma\varepsilon_2$, le point ε_1 sera un point du rabattement de la trace verticale.

D'après cela, j'aurai facilement sur le plan rabattu le cercle de base, puisque je connais son rayon, et que je sais qu'il est tangent aux deux traces αP et $\alpha P_1'$. Le centre de ce cercle se trouve sur la bissectrice de l'angle des deux traces, et aussi sur une parallèle à la ligne αP, distante de cette droite de 27 millimètres. J'aurai donc facilement ce centre rabattu en O_1, et par suite ses deux projections seront en *o* et *o′*.

Pour avoir le sommet, je remarque que le plan projetant horizontalement la hauteur coupe le plan PαP′ suivant une ligne de plus grande pente ; si je rabats ce plan projetant, la ligne de plus grande pente se rabat suivant ωO_2 et la hauteur suivant O_2S_2, perpendiculairement à la droite précédente ; je prends $O_2S_2 = 108$ millimètres, et en menant du point S_2 une perpendiculaire à *oω*, j'ai en *s* la projection horizontale du sommet ; il est donc facile d'obtenir la projection verticale de ce sommet, puisque je connais la projection verticale de la hauteur ; j'aurai aussi facilement le point (*m*, *m′*) milieu de la hauteur, et par suite les projections de la droite parallèle à la ligne de terre.



P'
n
m'
o'
ε
α
β
δ
a'
a
h
C
γ
o
e
ω
m
O₁
t
S
E₁
M₂
P
P₁

L'intersection de cette droite avec le cône s'obtiendra avec la plus grande facilité. En effet le plan déterminé par cette droite et le sommet est un plan méridien de la surface. J'obtiendrai facilement la trace horizontale de ce plan en cherchant la trace horizontale (a, a') de la hauteur et menant par ce point une parallèle à la ligne de terre. Soit C le point où cette droite rencontre la trace horizontale du plan ; je mène CO_1, j'ai le rabattement de l'intersection du plan de base avec le plan méridien considéré ; par suite j'aurai facilement les projections de l'intersection de la base du cône et de ce plan méridien ; en joignant ces points au sommet s, j'aurai les projections des génératrices qui passent par les points de rencontre de la droite et du cône. J'aurai donc en n et r les projections horizontales de ces points.

Pour la troisième partie, je mène au point E_1 la tangente au cercle de base ; elle rencontre en t la trace horizontale du plan ; du reste la trace horizontale de la génératrice passant en r est h ; donc th est la trace horizontale du plan cherché. Il est facile d'avoir la trace verticale que je n'ai pas menée dans la figure.

Il ne reste plus qu'à construire les projections horizontales et verticales de la base du cône, et à mener par les points s et s' des tangentes respectivement à ces courbes pour terminer l'épure.

ÉCOLE NAVALE

CONCOURS DE 1881

Géométrie.

Démontrer que deux pyramides de même hauteur et de bases équivalentes sont équivalentes.

— Dans un triangle ABC, on donne b et a. Une transversale rencontre AB au point D, AC au point E, BC au point F. On donne AE $= \beta$; FB $= m$. Démontrer que si l'on appelle Σ la surface de ADE, S la surface de ABC, on a

$$\frac{\Sigma}{S} = \frac{1 + \frac{a}{m}}{1 + \frac{a}{m}\frac{\beta}{b}} \times \frac{\beta^2}{b^2}$$

Statique.

Un triangle ABC a l'un de ses sommets, A, qui est fixe. Déterminer la force à appliquer au point B pour que le côté BC soit horizontal.

— On donne un triangle quelconque; on demande quel est le cercle qu'il faut enlever autour du centre du cercle circonscrit pour que le centre de gravité de la partie restante soit au point de concours des hauteurs.

Arithmétique.

Extraire la racine carrée de $43 + \frac{5}{11}$ à $\frac{1}{7}$ près. Raisonnement.

Algèbre.

On coupe un cône par un plan parallèle à la base et on considère le cylindre droit ayant même base que le cône, et sa base supérieure sur le plan sécant. Étudier la variation de la somme de la surface latérale du cylindre et de la surface latérale du cône supérieur.

Trigonométrie.

Résoudre un triangle connaissant les trois côtés.

Géométrie descriptive.

On donne un plan formant un angle de 39° avec le plan horizontal et dont la trace horizontale fait un angle de 53° avec la ligne de terre. Trouver les projections d'une pyramide régulière dont la base est un hexagone régulier ayant son centre et le milieu d'un des côtés sur la trace du plan. Cet hexagone est situé dans le plan; la hauteur de la pyramide est 15 centimètres, le côté de l'hexagone a 3 centimètres, et le sommet de la pyramide est dans le second dièdre. On cherchera la projection de la section par le plan bissecteur du premier dièdre.

SUR DEUX PROBLÈMES D'ARITHMÉTIQUE;

Par **E. Catalan** (*).

I. Premier problème. — *De* 1 *à* n (inclusivement), *combien y a-t-il de nombres non divisibles par des nombres premiers donnés*, a, b, c, ... k, l?

Ce problème est loin d'être nouveau. On en trouve une

(*) Cette Note a pour origine un travail de M. Minine (*Journal de Mathématiques*, t. V, p. 58). Touchant ce travail, je ferai une seule remarque : les énoncés adoptés par l'auteur peuvent être remplacés par ceux-ci :

De 1 *à* p (inclusivement), *combien y a-t-il de nombres non divisibles par des nombres premiers, donnés ?*

Quelle est la somme des nombres compris entre 1 *et* p (inclusivement), *et non divisibles par des nombres premiers, donnés ?*

solution dans mes *Mélanges mathématiques* (p. 133), calquée sur celle d'un problème plus simple (N. A. 1842, p. 466).

En appelant $f(n)$ le nombre cherché, et en désignant par $\left(\frac{A}{B}\right)$ (*) le plus grand entier contenu dans $\frac{A}{B}$, on a

$$f(n) = n - \sum\left(\frac{n}{a}\right) + \sum\left(\frac{n}{ab}\right) - \sum\left(\frac{n}{abc}\right) + \ldots \quad (A)$$

II. *Exemple.* — Soient : $n = 60$, $a = 5$, $b = 7$, $c = 13$. La formule donne

$$f(60) = 60 - (12 + 8 + 4) + 1 = 37.$$

En effet, de 1 à 60, il y a 37 nombres premiers avec 5, 7 et 13 ; savoir :

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 22, 23, 24, 27, 29, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 41, 43, 44, 46, 47, 48, 51, 53, 54, 56, 58, 59.

III. *Remarque.* — L'inspection de la formule (A) suggère une autre solution, basée sur un raisonnement bien connu (**).

Le nombre cherché serait

$$n - \left(\frac{n}{a}\right) - \left(\frac{n}{b}\right) - \left(\frac{n}{c}\right) - \ldots = n - \sum\left(\frac{n}{a}\right),$$

si chaque multiple de a n'avait été *supprimé qu'une fois* ; si chaque multiple de b n'avait été supprimé qu'une fois ; etc. Mais, parmi les multiples de a, il en est qui sont multiples de b, c'est-à-dire multiples de ab. Ces derniers multiples (aussi bien que les multiples de ac, de bc,...) ont donc été *supprimés à tort* : en les rétablissant, on trouve, au lieu de l'expression précédente,

$$n - \sum\left(\frac{n}{a}\right) + \sum\left(\frac{n}{ab}\right).$$

Cette application singulière de la *méthode des approximations successives* donne, finalement, la formule (A) (***).

(*) Ainsi que je l'ai déjà fait observer, le symbole $\left(\frac{A}{B}\right)$ équivaut à celui-ci : $E\left(\frac{A}{B}\right)$, adopté par Legendre.

(**) Laplace en a fait usage, dans la *Théorie des probabilités.*

(***) Afin d'abréger, je ne fais qu'indiquer la marche à suivre.

IV. *Cas particulier.* — Si $a, b, c, \ldots$ sont les *facteurs premiers de* n (inégaux), $f(n)$ devient la fonction numérique $\varphi(n)$ (*);

$$\varphi(n) = n - \sum \frac{n}{a} + \sum \frac{n}{ab} - \sum \frac{n}{abc} + \ldots;$$

ou $$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)\ldots; \quad \text{(B)}$$

ce qui est la formule connue (**).

V. Second problème. — *Quel est la somme,* S(n), *des nombres considérés dans le premier problème?*

1° La somme des nombres $1, 2, 3, \ldots, n$ est $\frac{1}{2}n(n+1)$.

2° La somme des multiples de a égale

$$\frac{1}{2}\left(\frac{n}{a}\right)\left[\left(\frac{n}{a}\right) + 1\right]a.$$

3° La somme des multiples de ab est

$$\frac{1}{2}\left(\frac{n}{ab}\right)\left[\left(\frac{n}{ab}\right) + 1\right]ab, \text{ etc.}$$

En répétant, mot à mot, le raisonnement indiqué ci-dessus (III), on trouve

$$2S(n) = n(n+1) - \sum a\left(\frac{n}{a}\right)\left[\left(\frac{n}{a}\right) + 1\right] + \sum ab\left(\frac{n}{ab}\right)\left[\left(\frac{n}{ab}\right) + 1\right] - \ldots \quad \text{(C)}$$

VI. *Exemple.* — Soient encore : $n = 60$, $a = 3$, $b = 7$, $c = 13$. Nous aurons

$$2S(60) = 60 . 61 - 5 . 12 . 13 - 7 . 8 . 9 - 13 . 4 . 5 + 35 . 1 . 2 = 3660 - 780 - 504 - 260 + 70,$$

ou $$S(60) = 1093;$$

comme on peut le vérifier sur les nombres donnés plus haut.

VII. *Cas particulier.* — Lorsque $a, b, c, \ldots$ sont les facteurs premiers de n, le second membre de (C) se réduit à

(*) De Gauss, si mes souvenirs sont fidèles.

donc

(**) N. A. (1842, p. 46).

$$u\left\{n+1-\sum\left[\frac{n}{a}+1\right]+\sum\left[\frac{n}{ab}+1\right]\right.$$
$$\left.-\sum\left[\frac{n}{abc}+1\right]+\ldots\right\}$$

La quantité entre *accolades* peut être écrite ainsi :

$$n\left[1-\sum\frac{1}{a}+\sum\frac{1}{ab}-\sum\frac{1}{abc}+\ldots\right]$$
$$+1-\sum 1+\sum 1-\sum 1+\ldots$$
$$=n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots$$
$$+(1-1)(1-1)(1-1)\ldots$$
$$=\varphi(n).$$

Donc, σ désignant la somme cherchée,

$$\sigma=\frac{1}{2}\,n\varphi(n),$$

ou

$$\sigma=\frac{1}{2}\,\varphi(n^2),$$

conformément à un théorème connu (*).

QUESTIONS D'EXAMENS

Établir par la géométrie la surface du quadrilatère inscrit en fonction des quatre côtés.

Je mène la diagonale BD ; j'ai, en appelant S la surface du quadrilatère $S=\frac{ch}{2}+\frac{ah'}{2}$.

Les triangles semblables BFC, ADE me donnent

$$\frac{h}{h'}=\frac{b}{d};$$

d'où je tire

$$h'=\frac{hd}{b}.$$

(*) Ce théorème, que l'on peut démontrer en *trois lignes*, est dû, je pense, à M. H. Postula. (N. C. M., t. IV, pp. 207 et 208).

Donc $$S = h\left(\frac{cb + da}{2b}\right)$$

D'autre part, en cherchant, par les deux triangles BAD, BCD, la valeur de la diagonale, j'ai

$$x^2 = b^2 + c^2 - 2c \,.\, \text{FC} = a^2 + d^2 + 2a \,.\, \text{DE}.$$

Comme j'ai aussi la projection $\frac{\text{FC}}{\text{DE}} = \frac{b}{d}$, d'où je tire

$$\text{DE} = \frac{\text{FC} \,.\, d}{b},$$

j'obtiens $$\text{FC} = \frac{b(b^2 + c^2 - a^2 - d^2)}{2(cb + ad)}.$$

et par suite

$$h^2 = b^2 - \frac{b^2(b^2 + c^2 - a^2 - d^2)^2}{4(cb + ad)^2}.$$

Donc

$$S^2 = \frac{4(cb + ad)^2 - (b^2 + c^2 - a^2 - d^2)^2}{16}.$$

On a, par une transformation simple,

$$S^2 = \frac{(b+c+d-a)(c+d+a-b)(d+a+b-c)(a+b+c-d)}{16}.$$

En posant, comme à l'ordinaire

$$a + b + c + d = 2p,$$

on trouve

$$S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d).$$

Par un point A *pris dans le plan d'un cercle, on mène une sécante* AMN, *et on joint le centre aux trois points* A,M,N. *Démontrer que l'on a*

$$\text{tg}\,\frac{\text{AOM}}{2} \,.\, \text{tg}\,\frac{\text{AON}}{2} = \text{const.}$$

Je joins le point M et le point N au point B, extrémité du diamètre qui passe par le point A. J'ai

$$\text{MBA} = \frac{\text{MOA}}{2};$$

$$\text{NBA} = \frac{\text{NOA}}{2}.$$

Il faut donc démontrer que j'ai

$$\text{tg MBA} \cdot \text{tg NBA} = \text{const.}$$

Pour cela, je joins les points M et N à l'autre extrémité C du diamètre AOB. J'ai

$$\text{tg MBA} = \frac{\text{MC}}{\text{MB}}; \text{tg NBA} = \frac{\text{NC}}{\text{NB}}.$$

Donc $$\text{tg MBA} \cdot \text{tg NBA} = \frac{\text{MC} \cdot \text{NC}}{\text{MB} \cdot \text{NB}}.$$

D'autre part, les deux triangles MBN, MCN ayant un angle égal, on a $\frac{\text{MCN}}{\text{MBN}} = \frac{\text{MC} \cdot \text{NC}}{\text{MB} \cdot \text{NB}}$

et aussi $$\frac{\text{MCN}}{\text{MBN}} = \frac{\text{CQ}}{\text{BP}} = \frac{\text{AC}}{\text{AB}}.$$

Donc $$\text{tg MBA} \cdot \text{tg NBA} = \frac{\text{AC}}{\text{AB}}.$$

La différence entre un arc du premier quadrant et son sinus est moindre que le double du carré de l'arc divisé par le rapport de la circonférence au diamètre, en supposant le rayon égal à l'unité.

On a $$2a < \pi$$

et aussi $$a < \text{tg } a \qquad \frac{\pi}{2} - a < \text{cotg } a.$$

On en déduit, en multipliant les deux membres de la première inégalité par $\cos^2 a$, et les deux membres de la seconde par $\sin^2 a$,

$$a \cos^2 a < \sin a \cos a$$

$$\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin^2 a > \sin a \cos a;$$

d'où l'on tire $$a \sin^2 a > a - \sin a \cos a$$

$$\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin^2 a < \sin a \cos a;$$

d'où $$\frac{\frac{\pi}{2} - a}{a} < \frac{\sin a \cos a}{a - \sin a \cos a}$$

ou $$\frac{\pi}{2a} < \frac{a}{a - \sin a \cos a}.$$

On en tire $\quad a \sin a \cos a < \frac{2a^2}{\pi}$,

et, *a fortiori*, $\quad a - \sin a < \frac{2a^2}{\pi}$.

A *et* B *sont deux nombres entiers et positifs, ayant plus de la moitié des chiffres de gauche communs, et on a* A > B. *Démontrer que l'on a toujours* $\sqrt[p]{A} - \sqrt[p]{B} < \frac{1}{p}$

p *étant entier et positif.*

On a identiquement

$$\frac{x^p - y^p}{x - y} = x^{p-1} + yx^{p-2} + \dots + y^{p-1}$$

ou, puisque $\quad x > y,$

$$\frac{x^p - y^p}{x - y} > p \cdot y^{p-1}.$$

Posons $\quad x^p = A; \quad y^p = B,$

il vient $\quad \sqrt[p]{A} - \sqrt[p]{B} < \frac{1}{p} \cdot \frac{A - B}{\sqrt[p]{B^{p-1}}}$

ou $\quad \sqrt[p]{A} - \sqrt[p]{B} < \frac{1}{p} \cdot \sqrt[p]{\frac{(A - B)^p}{B^{p-1}}}.$

Soit k le nombre des chiffres de A — B; B a au moins $2k + 1$ chiffres;

donc on a $\quad A - B < 10^k; \; B \geq 10^{2k}.$

Donc $\quad \frac{(A - B)^p}{B^{p-1}} < \frac{10^{kp}}{10^{2kp - 2k}}$

ou $\quad \frac{(A - B)^p}{B^{p-1}} < \frac{1}{10^{(p-2)k}}.$

Comme on a certainement

$$p \geq 2,$$

on voit que cette expression est inférieure à 1; donc

$$\sqrt[p]{A} - \sqrt[p]{B} < \frac{1}{p}.$$

Dans un triangle on appelle p *le demi-périmètre,* S *la surface,* r *le rayon du cercle inscrit,* A, B, C *les angles. Démontrer que les racines de l'équation*

$$x^3 - p\left(tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2}\right)x^2 + p^2x - \frac{S^2}{r} = 0$$

sont les rayons des cercles ex-inscrits au triangle.

On a $$p \operatorname{tg}\frac{A}{2} = r_a;$$

Donc déjà la somme des racines peut être considérée comme la somme des rayons des cercles ex-inscrits.

On a aussi

$$r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)$$

ou, d'après une relation connue entre les demi-angles d'un triangle, $$r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c = p^2.$$

Enfin on a $$r_a r_b r_c = pS = \frac{S^2}{r}.$$

On voit donc bien que r_a, r_b, r_c sont les racines de l'équation proposée.

Étant donnés deux nombres entiers a *et* b, *premiers entre eux, on peut toujours trouver deux autres nombres entiers* x *et* y, *tels que l'on ait l'identité*

$$ax - by = 1.$$

Soient a et b les deux nombres entiers donnés, que nous supposons premiers entre eux; effectuons les opérations de la recherche du plus grand commun diviseur; le dernier reste sera l'unité, et nous aurons

$$a = bq_1 + R_1$$
$$b = R_1q_2 + R_2$$
$$R_1 = R_2q_3 + R_3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$R_{n-3} = R_{n-2}\,q_{n-1} + R_{n-1}$$
$$R_{n-2} = R_{n-1}\,q_n + 1$$

deux restes consécutifs quelconques satisfont à la condition énoncée; car on a d'abord

$$R_{n-2} - R_{n-1}\,q_n = 1.$$

Éliminons R_{n-1} entre cette égalité et la précédente; nous aurons $$R_{n-3}\, q_n - R_{n-2} = R_{n-2}\, q_{n-1}\, q_n - 1\ ;$$
d'où $$R_{n-3}\, q_n - R_{n-2}\,(1 + q_n\, q_{n-1}) = -1$$
et l'on voit que les nombres q_n et $1 + q_{n-1}$ satisfont à la condition demandée par rapport aux deux restes consécutifs R_{n-3} et R_{n-2}.

En général, si la condition est remplie pour deux restes consécutifs quelconques, il est facile de voir qu'elle l'est aussi pour les deux précédents.

Car si l'on a, m et n étant deux nombres entiers,
$$mR_p - nR_{p+1} = \pm 1$$
en éliminant R_{p-1} entre cette relation et l'égalité,
$$R_{p-1} = R_p\, Q_{p+1} + R_{p+1},$$
il vient $$mR_p - nR_{p-1} = - nR_p\, Q_{p+1} \pm 1$$
ou $$nR_{p-1} - R_p\,(m + nQ_{p+1}) = \mp 1,$$
relation qui satisfait encore à la condition énoncée.

Or, la condition étant remplie, pour les restes R_{n-3} et R_{n-2}, ainsi que nous l'avons reconnu directement, elle l'est aussi pour les restes R_{n-4} et R_{n-3}, et ainsi de suite, en remontant, de sorte qu'elle sera également remplie pour les deux nombres d'où l'on part, a et b.

Il existe donc des nombres entiers x et y tels que l'on ait $$ax - by = \pm 1.$$

Soient, par exemple les deux nombres 56 et 15 qui sont premiers entre eux; on a
$$56 = 15 \times 3 + 11$$
$$15 = 11 \times 1 + 4$$
$$11 = 4 \times 2 + 3$$
$$4 = 3 \times 1 + 1$$
La dernière égalité, retranchée de la précédente, donne
$$11 - 4 = 4 \times 2 - 1$$
d'où $$11 - 4 \times 3 = -1.$$

Retranchons celle-ci de la précédente multipliée par 3, nous aurons
$$15 \times 3 - 11 = 11 \times 1 \times 3 + 1$$
ou $$15 \times 3 - 11 \times 4 = 1.$$

Enfin, retranchons cette dernière de la première égalité

multipliée par 4, et nous aurons

$$56 \times 4 - 15 \times 3 = 15 \times 3 \times 4 - 1,$$

c'est-à-dire $\quad 56 \times 4 - 15 \times 15 = -1,$

Les deux nombres 4 et 15 satisfont donc à l'égalité

$$56x - 15y = -1.$$

— Supposons qu'il faille satisfaire à l'égalité $ax - by = c$ par des valeurs entières de x et de y, a et b étant deux nombres premiers entre eux. Soient α et β deux nombres entiers, tels que l'on ait

$$a\alpha - b\beta = \pm 1$$

il en résulte $a \,.\, \alpha c - b \,.\, \beta c = \pm c$

de sorte que, si l'on a

$$a\alpha - b\beta = + 1,$$

on aura $\quad x = c\alpha$

et $\quad y = c\beta,$

et si l'on a $\quad a\alpha - b\beta = - 1,$

on aura $\quad x = - c\alpha$

et $\quad y = -c\beta.$

On déduit facilement de là toutes les solutions en nombres entiers de l'équation $ax + by = c$; mais ce n'est pas là ce qui nous occupe.

— Proposons-nous maintenant la question suivante, tout à fait analogue à celle que nous venons de traiter :

Étant donnés deux polynômes entiers en x, f(x) *et* φ(x), *premiers entre eux, on peut toujours trouver deux autres polynômes entiers en* x, u *et* v, *tels que l'on ait identiquement*

$$\mathrm{u}\,\mathrm{f}(\mathrm{x}) - \mathrm{v}\varphi(\mathrm{x}) = \pm 1.$$

Supposons que $\varphi(x)$ soit le polynôme du moindre degré, et effectuons la recherche du plus grand commun diviseur entre $f(x)$ et $\varphi(x)$; les opérations se traduisent par les identités suivantes :

$$f(x) = \varphi(x)Q_1 + R_1$$
$$\varphi(x) = R_1Q_2 + R_2$$
$$R_1 = R_2Q_3 + R_3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$R_{n-3} = R_{n-2}Q_{n-1} + R_{n-1}$$
$$R_{n-2} = R_{n-1}Q_n + R_n$$

Les deux polynômes $f(x)$ et $\varphi(x)$ étant par hypothèse premiers entre eux, le dernier reste R_n est indépendant de x.

Deux restes consécutifs quelconques satisfont à la condition énoncée ; car on a d'abord

$$R_{n-2} - R_{n-1}Q_n = R_n .$$

Éliminons R_{n-1} entre cette égalité et la précédente ; il vient $R_{n-1}\,Q_n - R_{n-2}(1 + Q_n\,Q_{n-1}) \quad - R_n$

et l'on voit que les polynômes $\frac{Q_n}{R_n}$ et $\frac{1 + Q_n\,Q_{n-1}}{R_n}$, qui sont entiers en x (puisque R_n est indépendant de x), satisfont à la condition demandée, par rapport aux restes R_{n-1} et R_{n-2}.

En général, si la condition est satisfaite pour deux restes consécutifs quelconques, nous allons montrer qu'elle l'est encore pour les deux précédents.

Car si l'on a, M et N étant deux polynômes entiers en x,

$$MR_p - NR_{p+1} = \pm 1$$

en éliminant R_{p+1} entre cette relation et l'égalité précédente $R_{p-1} = R_p\,Q_{p+1} + R_{p+1}$, il vient

$$NR_{p-1} - R_p\,(M + NQ_{p+1}) = \mp 1$$

relation qui satisfait encore à la condition demandée.

Or la condition étant remplie pour les deux restes R_{n-1} et R_{n-2}, elle l'est successivement pour ceux qui précèdent, de sorte qu'en remontant on voit qu'elle est encore remplie pour les deux polynômes donnés $f(x)$ et $\varphi(x)$.

Il existe donc des polynômes entiers en x, u et v, tels que l'on ait identiquement

$$uf(x) - v\varphi(x) = \pm 1, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

La méthode que nous venons d'exposer montre en outre comment on peut déterminer ces polynômes sans résoudre d'équation.

Soient, par exemple, les deux polynômes $(x^2+1)^2$ et $(x-1)^3$, qui sont premiers entre eux ; on a

$$(x^2 + 1)^2 = (x - 1)^3(x + 3) + 4(2x^2 - 2x + 1)$$
$$2(x - 1)^3 = (2x^2 - 2x + 1)(x - 2) + x$$
$$2x^2 - 2x + 1 = x \,.\, 2(x - 1) + 1$$

Éliminons l'avant-dernier reste, x, entre les deux dernières égalités ; il vient

$$4(x - 1)^3(x - 1) - (2x^2 - 2x + 1) = 2(2x^2 - 2x + 1) \times (x - 2)(x - 1) - 1$$

c'est-à-dire

$$4(x - 1).(x - 1)^3 - (2x^2 - 2x + 1)(1 + 2[x - 2)(x - 1)] = -1$$

ou $$4(x - 1).(x - 1)^3 - (2x^2 - 2x + 1)(2x^2 - 6x + 5) = -1$$

Éliminons de même le reste intermédiaire $(2x^2 - 2x + 1)$ entre cette égalité et la première ; nous aurons

$$(x^2 + 1)^2(2x^2 - 6x + 5) - 16(x - 1).(x - 1)^3 = (x - 1)^3 (x + 3)(2x^2 - 6x + 5) + 4$$

c'est-à-dire

$$(x^2 + 1)^2(2x^2 - 6x + 5) - (x - 1)^3[16(x - 1) + (x + 3)\ 2x^2 - 6x + 5)] = 4.$$

Les deux polynômes entiers en x, $\dfrac{2x^2 - 6x + 5}{4}$ e $\dfrac{16(x - 1) + (x + 3)(2x^2 - 6x + 5)}{4}$, satisfont donc à l'égalité $$vu(x^2 + 1)^2 - (x - 1)^3 = 1$$
et l'on a

$$u = \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{5}{4}, \text{ et } v = \frac{x^3}{2} + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}.$$

— Supposons maintenant qu'il faille satisfaire à l'égalité

$$uf(x) - v\varphi(x) = F(x)$$

au moyen de polynômes entiers u et v.

Soient m et n deux polynômes entiers, tels que l'on ait

$$mf(x) - n\varphi(x) = \pm 1 ;$$

il en résulte $mF(x) . f(x) - nF(x) . \varphi(x) = \pm F(x)$, de sorte que si l'on a $mf(x) - n\varphi(x) = +1$, on aura

$$u = mF(x), \text{ et } v = nF(x).$$

et si au contraire $mf(x) - n\varphi(x) = -1$, on aura

$$u = -mF(x), \text{ et } v = -nF(x),$$

— Les théorèmes précédents sont susceptibles d'une application très importante dans la décomposition d'une fraction rationnelle en d'autres plus simples.

Soit, en effet, la fraction $\dfrac{F(x)}{f(x)\varphi(x)}$, où $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont deux polynômes premiers entre eux.

Nous venons de voir que l'on peut toujours satisfaire à l'identité $$uf(x) - v\varphi(x) = F(x)$$
au moyen de polynômes entiers en x, u et v. Or on déduit de cette identité :
$$\frac{u}{\varphi(x)} - \frac{v}{f(x)} = \frac{F(x)}{f(x)\varphi(x)}$$
et l'on voit que la fraction donnée est ainsi décomposée en deux autres plus simples.

Comme exemple de cette application, considérons la fraction $$\frac{x^3 - 5x + 7}{(x^2 + 1)^2 (x - 1)^3}.$$

Nous avons trouvé plus haut que l'on a
$$(x^2 + 1)^2 (2x^2 - 6x + 5) - (x - 1)^3 (2x^3 + 3x - 1) = 4$$
Il en résulte
$$\frac{4}{(x^2 + 1)(x - 1)^3} = \frac{2x^2 - 6x + 5}{(x^2 - 1)^3} - \frac{2x^3 + 3x - 1}{(x^2 + 4)^2}$$
et, par suite,
$$\frac{x^3 - 5x + 7}{(x^2 + 1)^2 (x - 1)^3} = \frac{1}{4}\left[\frac{(2x^2 - 6x + 5)(x^3 - 5x + 7)}{(x - 1)^3} - \frac{(2x^3 + 3x - 1)(x^3 - 5x + 7)}{(x^2 + 1)^2}\right]$$

Or, si l'on effectue les deux quotients entre parenthèses, on trouve pour les parties entières deux quantités égales, $2x^2 - 11$, qui, par conséquent, se détruisent, et il ne reste plus qu'à décomposer par les procédés connus deux fractions rationnelles ne renfermant chacune qu'un seul facteur distinct au dénominateur.

QUESTION 288.

Solution par M. Daguillon, élève du Lycée Henri IV.

Soient un triangle ABC, O *le centre du cercle circonscrit. On joint* OA, OB, OC *qui rencontrent la circonférence en* M, M′; M″; *on mène* MD *perpendiculaire sur* BC, M′D′ *perpendiculaire sur* AC, *et* M″D″ *perpendiculaire sur* AB. *Démontrer que les droites* AD, BD′, CD″ *concourent en un même point.*

Joignons MM′, M′M″, MM″. On voit facilement que les côtés du nouveau triangle ainsi formé sont respectivement parallèles et égaux aux côtés AB, BC, CA du triangle donné.

Si donc on prolonge MD jusqu'en E, intersection avec M′M″, nous aurons

$$\frac{BD}{DC} = \frac{M''E}{EM'};$$

de même

$$\frac{CD'}{D'A} = \frac{ME'}{E'M''},$$

et

$$\frac{AD''}{D''B} = \frac{M'E''}{E''M};$$

d'où

$$\frac{BD.CD.AD''}{DC.AD'.BD''} = \frac{M''E.ME'.M'E''}{EM'.E'M''.E''M}.$$

Mais les droites ME, M′E′, M″E″ étant les hauteurs du triangle MM′M″ se coupent en un même point, et, d'après le théorème de Céva,

$$\frac{M''E.ME'.M'E''}{EM'.E'M''.E''M} = 1; \quad \text{donc} \quad \frac{BD.CD.AD''}{DC.AD'.BD''} = 1.$$

Ce qui établit, en vertu de la réciproque que les droites AD, BD′, CD″ sont concourantes.

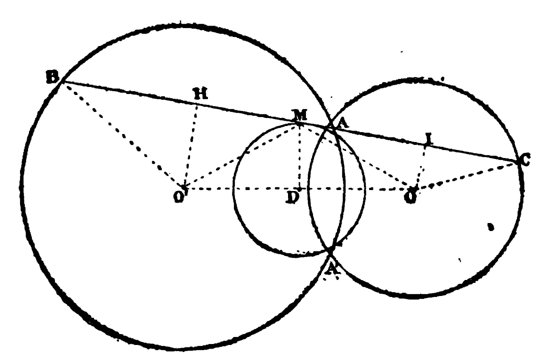
NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Boudignier, à Lille; Baudoin, à Beauvais; Bourget, à Aix; Ch. Jullien, au lycée Henri IV; Tinel, à Rouen; Duley, à Châteauroux: Van Aubel, à Liège; Rivard, au Mans; Gino Loria, à Mantoue.

QUESTION 289.

Solution par M. PERRIER, (Henri), élève au Lycée de Lons-le-Saulnier.

On donne deux cercles qui se coupent; par l'un des points d'intersection on fait passer une corde commune aux deux cercles: trouver le lieu du milieu de ces cordes.

Abaissons des centres O et O' les perpendiculaires OH, O'I sur la corde commune. On a $HI = \frac{BC}{2}$. Prenons BM $= HI$, M est un point du lieu; joignons ce point aux points



O et O'. On a
$$\overline{OM}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{HM}^2$$
$$\overline{O'M}^2 = \overline{O'I}^2 + \overline{MI}^2$$
d'où
$$\overline{OM}^2 + \overline{O'M}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{HM}^2 + \overline{O'I}^2 + \overline{MI}^2. \qquad (1)$$
Or $BM = HI$, ou $BH + HM = HM + MI$, donc $MI = BH$;
$MC = HI$, ou $MI + IC = HM + MI$, donc $HM = IC$;
dès lors la relation (1) devient
$$\overline{MO}^2 + \overline{MO'}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{IC}^2 + \overline{O'I}^2 + \overline{BH}^2 = R^2 + R'^2.$$
Le lieu des points M est donc une circonférence ayant pour centre le milieu D de OO' et pour rayons
$$\sqrt{\frac{R^2 + R'^2 - 2\,OD^2}{2}}.$$
Cette circonférence passera évidemment aux points A et A'.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Prost, à Lons-le-Saulnier; ·avre, à Passy; Dupuy, à Grenoble; Callon, au lycée Louis-le-Grand; Daguillon, Vitte, au lycée Henri IV; Lerouge, à Paris; Henry, à Bréchaincourt; Andrieu, à Rouen.

QUESTION 290

Solution par M Paul Boudignier, élève du Lycée de Lille.

Étant donnés deux points A *et* B *sur une droite infinie, on sait qu'il y a deux points* C *et* D *qui divisent* AB *dans un rapport donné* $\frac{m}{n}$. *Dans quel rapport le point* O *milieu de* CD *divise-t-il* AB ? *Le point* O *est-il entre* A *et* B*; ou en dehors de ce segment?*

On démontre facilement que $CB = \frac{n.AB}{m+n}$,

$DB = \frac{nAB}{m \,.\, n}$ et par suite que $CD = \frac{2mnAB}{m^2 - n^2}$

$$OC = \frac{CD}{2} = OD = \frac{mnAB}{m^2 - n^2}.$$

Le point O est en dehors de AB, car

$$\frac{mnAB}{m^2 - n^2} > \frac{nAB}{m+n}$$

ou

$$m > m - n.$$

Calcul du rapport $\frac{OA}{OB}$.

$$OB = OC - BC = \frac{mnAB}{m^2 - u^2} - \frac{nAB}{m+n}, OB = \frac{n^2AB}{m^2 - n^2},$$

$$OA = OB + AB = \frac{n^2AB}{m^2 - n^2} + AB = \frac{m^2AB}{m^2 - n^2}$$

Dès lors
$$\frac{OA}{OB} = \frac{m^2}{n^2}.$$

Le point O divise donc AB dans un rapport égal au carré de celui dans lequel les points C et D divisent cette même droite.

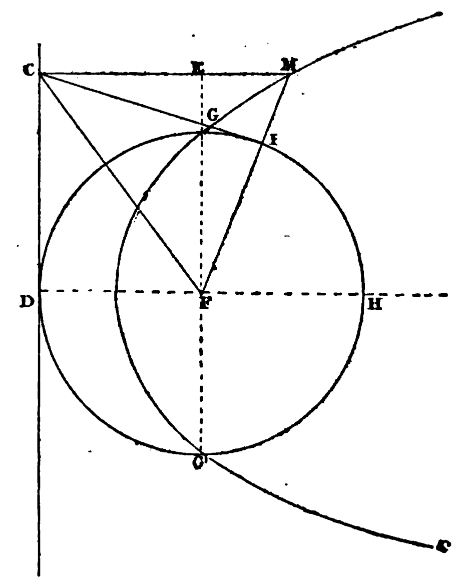
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Henry, à Bréchaincourt; Vigny, Barchat, à Vitry-le-François; Daguillon, Jullien, Lapareillé, au lycée Henri IV; Baudoin, à Beauvais; Fievet, à Lille; Tinel, à Rouen; Prost et Perrier, à Lons-le-Saulnier; Gobert, au collège Chaptal; Lerouge, à Paris; Rivard, au Mans.

QUESTION 291

Solution par M. DAGUILLON, élève du Lycée Henri IV
(Classe de M. Macé de Lépinay).

On donne une parabole; soit M *un point de cette courbe; on projette ce point sur la directrice. et de ce point* C *projection de* M *on abaisse une perpendiculaire sur le rayon vecteur* FM. *Trouver le lieu du pied* I *de cette perpendiculaire.*

Joignons CF. Puisque CM = FM, le triangle CMF est isoscèle. Si donc de F on abaisse une perpendiculaire FE sur MC, cette droite qui est parallèle à DC donne EC = FI = DF. Le lieu du point I est donc une circonférence ayant son centre au foyer F de la parabole et pour rayon le paramètre DF de la courbe. Les points G et G' intersections de la parabole avec la perpendiculaire menée à l'axe par le foyer, et le point D, appartiennent au lieu.



NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Lapareillé, au Lycée Henri IV; Favre, à Passy; Baudouin, à Beauvais; Boudignier, à Lille; Simonet, à Neufchâteau; Tinel, à Rouen; Calon, au Lycée Louis-le-Grand; Fiévet, à Lille; Torre Vittorio, à Alexandrie (Italie); Prost et Perrier, à Lons-le-Saulnier; Talbourdeau, à Moulins; Henry, à Bréchincourt; Hamon, au Mans; Gobert, au collège Chaptal; Bonnieux, à Rouen.

QUESTION 292

Solution par M. Malcor, élève du Lycée du Havre.

On donne une parabole; par le pied O *de la directrice on mène une sécante à la parabole; soient* A *et* B *les points d'intersection et* C *le milieu de* AB. *On projette le point* C *sur la directrice et de cette projection on abaisse une perpendiculaire* DI *sur la sécante* OAB. *Trouver le lieu du point* I.

On sait que dans toute parabole les milieux des cordes parallèles sont sur une parallèle à l'axe. Ceci posé, la tangente à la courbe au point R, intersection de CD avec la parabole, est parallèle à la sécante OAB.

Le symétrique du foyer par rapport à cette tangente étant le point D, l'angle OIF est droit et le lieu est alors une circonférence décrite sur OF comme diamètre.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Daguillon, au lycée Henri IV; Dupuy, à Grenoble; Tinel, à Rouen; Torre Vittorio, à Alexandrie; Perrier, Prost, à Lons-le-Saulnier; Baudoin, à Beauvais.

QUESTION 300

Solution par M. Dupuy, au Lycée de Grenoble.

On donne dans une circonférence O *une corde* CD *et un diamètre* AB.

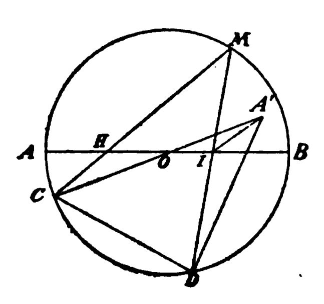
Déterminer un point M *sur la circonférence, de telle manière que les lignes* MC, MD *déterminent sur le diamètre* AB *des segments* OH, OI *dont le rapport soit égal à un rapport donné.*

(Delpit.)

Soient n le rapport donné et $2x$ l'arc sous-tendu par CD. Par I menons IA′ parallèle à CM et rencontrant en A′ le rayon CO.

Les triangles semblables CHO, OA'I donnent

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OI}{OH} = n$$



dont le point A' est fixe.

L'angle MIA' = DMC = α; l'angle DIA' = 180 — α.

Donc le point I se trouve à l'intersection du diamètre AOB avec la circonférence dans laquelle A'D sous-tend un arc capable de 180 — α.

On mènera DIM, puis MHC. On aura ainsi les deux segments cherchés OH et OI.

On en obtient deux autres en remarquant que le diamètre AOB coupe la circonférence DIA' en un second point.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Santal, institution Saint-Louis, à Perpignan; Joly, à Tarbes; Gino Loria, à Mantoue.

QUESTION 302

Solution par M. Delpit, élève à l'École préparatoire Sainte-Barbe.

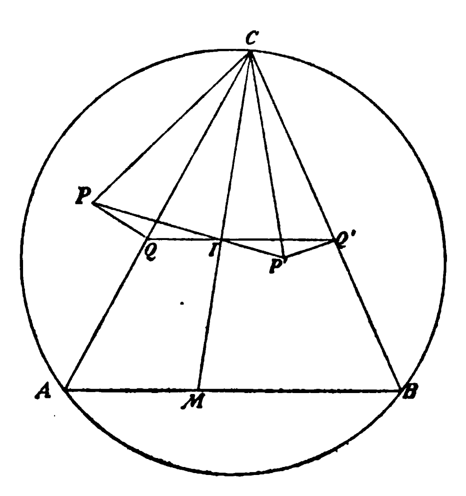
Étant donné un segment de cercle ACB, C *étant le milieu de l'arc du segment, on décrit sur les droites* AC *et* BC *des circonférences qui se coupent sous un angle égal à l'angle dont le segment est capable.*

Quel est le lieu du point de rencontre M *de ces circonférences?*

Soit P et P' les centres des deux circonférences. Par hypothèse l'angle PCP' est égal à l'angle ACB. Les angles PCQ et P'CQ' sont donc égaux. Q et Q' sont d'ailleurs les milieux de CA et de CB. Il en résulte que les triangles rectangles PCQ, P'CQ' sont égaux. Donc PC = P'C.

Le triangle PCP' étant isoscèle et son angle au sommet étant égal à l'angle ACB, l'angle à la base CPP' de ce triangle

est égal à l'angle CQQ'. Soit I le point de rencontre de PP' avec QQ'. Puisque $\overline{CPI} = \overline{CQI}$, ce quadrilatère CPQI est inscriptible et l'angle PIC est droit, puisqu'il est égal à PQC. Donc si du point C on abaisse une perpendiculaire sur PP', elle passe précisément par le point I. Dès lors le symétrique de C par rapport à PP' se trouve sur la droite AB.



Le lieu cherché est donc la droite AB.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Baudouin, à Beauvais; Dupuy, à Grenoble.

NOTE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Nous nous proposons de vérifier dans cette note *que si* $f(x, y, z) = 0$ *représente l'équation générale des surfaces du second degré, et si les trois plans du centre passent par une droite, la fonction proposée peut se mettre sous la forme* $\varphi(P, Q) = 0$ ($P = 0$ $Q = 0$ étant les équations de deux plans).

1. — Nous distinguerons deux cas et nous supposerons d'abord que les coefficients A, A', A″ ne sont pas nuls à la fois ; par exemple, et pour fixer les idées, faisons l'hypothèse $A' \lessgtr 0$. Les plans du centre

$$Ax + B''y + B'z + C = 0,$$
$$B''x + A'y + Bz + C' = 0,$$
$$B'x + By + A''z + C'' = 0,$$

passant par une même droite, on sait qu'il existe des coefficients λ, μ, ν, qui ne sont pas tous nuls, et qui satisfont aux équations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda A + \mu B'' + \nu B' &= 0, \\ \lambda B'' + \mu A' + \nu B &= 0, \\ \lambda B' + \mu B + \nu A'' &= 0, \\ \lambda C + \mu C' + \nu C'' &= 0. \end{aligned}\right.$$

Ceci rappelé, on remarquera que l'on a

$$A''f(x, y, z) = (A''z + B'x + By + C'')^2 + (AA'' - B'^2)x^2 + (A'A'' - B^2)y^2 + (A''B'' - BB')2xy + (A''C - B'C'')2x + (A''C' - BC'')2y + A''F - C''^2 = 0.$$

2. — Le premier cas qui nous occupe se divise ici, lui-même, en deux cas particuliers. Il peut arriver, en effet, *que les coefficients des termes en* x^2 *et en* y^2, *soient nuls l'un et l'autre*, et il est facile de reconnaître que, dans cette hypothèse, *la surface proposée représente un cylindre parabolique.*

En effet, λ, μ, ν, étant des paramètres qui ne sont pas tous nuls, nous l'avons dit, les équations (1) donnent, pour être compatibles, la condition

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = 0$$

qu'on peut écrire,

$$A'(AA'' - B'^2) + 2BB'B'' - AB^2 - A''B''^2 = 0$$

mais on suppose $\qquad AA'' = B'^2$;

la relation simplifiée est donc

$$2BB'B'' - AB^2 - A''B''^2 = 0$$

ou, en multiplant par A'' qui n'est pas nul,

$$2A''BB'B'' - AA''B^2 - A''^2B''^2 = 0$$

ou encore $\qquad (BB' - A''B'')^2 = 0$

en tenant compte de l'hypothèse

$$AA'' = B'^2.$$

De ceci il résulte donc que les coefficients des termes en x^2 et en y^2, dans la partie qui suit $(A''z + B'x + By + C'')^2$, et vu les conditions particulières où nous sommes placés, ne peuvent être nuls simultanément, sans que, nécessairement, le coefficient du terme en xy soit nul, lui aussi. On peut donc dire $\qquad A''f(x,y,z) = P^2 + Q$

sans que $Q = 0$ puisse être parallèle à $P = 0$, puisque Q renferme la variable z, et P, seulement les variables x, y. En résumé $f = 0$ est un cylindre parabolique.

3. — Supposons maintenant que les coefficients

$$AA' - B'^2, \qquad A'A' - B^2,$$

ne soient pas nuls à la fois et supposons, par exemple,

$$AA' - B'^2 \gtrless 0;$$

en posant

$$f(x, y) = (AA' - B'^2)x^2 + (A'A'' - B^2)y^2 + 2(A''B'' - BB')xy$$
$$+ 2(A'C - B'C'')x + 2(A''C' - BC'')y + A''F - C''^2)$$

on aura $(AA' - B'^2)F(x, y) =$

$$[(AA' - B'^2)x + (A'B' - BB')y + (A'C' - B'C'')]^2$$
$$+ [(A'A' - B^2)(AA' - B'^2) - (A''B' - BB')^2]y^2$$
$$+ [(A''C' - BC'')(AA' - B'^2) - (A''B' - BB')(A'C - B'C'')]\, 2y$$
$$+ (AA' - B'^2)(A''F - C'^2) - (A''C' - B'C'')^2.$$

On remarque alors que le coefficient du terme en y^2 est

$$A'' \begin{vmatrix} A & B'' & B \\ B' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}$$

et celui du terme en y,

$$A'' \begin{vmatrix} A & B' & B' \\ B' & B & A'' \\ C & C' & C'' \end{vmatrix}$$

Ces deux coefficients sont nuls, si l'on tient compte, comme on doit le faire, des équations (1).

On a donc enfin

$$A''f(x, y, z) = (A''z + B'x + By + C'')^2$$
$$+ \frac{1}{AA'' - B'^2}\left\{(AA' - B'^2)x + (A'B' - BB')y + (A'C' - B'C'')\right\}$$
$$+ H$$
$$H = \frac{A''}{AA' - B'^2}\left\{F(AA' - B'^2) - AC'^2 - A'C^2 + 2B'CC'\right\}$$

La surface f représente donc un cylindre elliptique, si $AA'' - B'^2 > 0$ et $H \gtrless 0$; un cylindre hyperbolique, si $AA' - B'^2 < 0$ et $H \gtrless 0$; une droite, si $AA' - B'^2 > 0$ et $H = 0$ deux plans sécants, si $AA' - B'^2 < 0$ et $H = 0$.

4. — Il nous reste à examiner le cas où l'on a simultanément $A = 0 \quad A' = 0 \quad A'' = 0$.

Comme l'on suppose toujours,

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = 0$$

On a donc, $2BB'B'' = 0$.

Nous supposerons $B'' = 0$.

Les équations (1) donnent,

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B' & B & A'' \\ C & C' & C'' \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & B' \\ B' & B & 0 \\ C & C' & C'' \end{vmatrix} = 0$$

c'est-à-dire $B'C' = BC$

B' et B ne peuvent pas être nuls à la fois, pour des raisons évidentes; supposons $B' \gtrless 0$; alors, $C' = \frac{BC}{B'}$ et l'équation devient

$$2z(By + B'x) + \frac{2C}{B'}, (By + B'x) + 2C''z + F = 0.$$

C'est bien une fonction de z et de $(By + B'x)$, et la surface représente un cylindre hyperbolique.

Résumé. — Il résulte du calcul précédent, qu'étant donnée une fonction $f(x, y, z)$, avec cette particularité que les trois équations $f'_x = 0 \quad f'_y = 0 \quad f'_z = 0$ représentent trois plans passant par une droite, *on pourra toujours en suivant la méthode dite par décomposition en carrés lui donner la forme* $\varphi(P, Q) = 0$ qui caractérise les surfaces cylindriques, du moins dans le cas général, celui où les coefficients A, A', A'' ne sont pas nuls simultanément. Quant au cas particulier où $A = A' = A'' = 0$, nous avons montré que la forme $\varphi(P, Q) = 0$ se révèle alors immédiatement.

La méthode précédente paraît offrir, exposée sur l'équation générale comme nous venons de le faire, une certaine longueur; mais elle est d'une grande simplicité dans la

pratique, parce qu'elle conduit au but par une marche sûre, rapide, et qui n'exige d'autre effort de mémoire que celui qui consiste à se rappeler qu'il faut employer la méthode de la décomposition en carrés, méthode familière aux élèves et d'une pratique commode.

On pourra essayer cette manière de faire sur les exemples suivants :

Démontrer, en les ramenant à la forme $\varphi(P,Q) = 0$, *que les équations suivantes*

$$(b^2 + c^2)x^2 + (a^2 + c^2)y^2 + (b^2 + a^2)z^2 - 2bcyz - 2aczx - 2abxy - d^2(a^2 + b^2 + c^2) = 0,$$

$$(ax - by)^2 + (by - cz)^2 + (cz - ax)^2 = d^2(a^2 + b^2 + c^2),$$

$$(b + c)x^2 + (a + c)y^2 + (a + b)z^2 - 2ayz - 2bzx - 2cxy = 1,$$

$$a^2(y^2 + z^2) + b^2(x^2 + z^2) + 2abxy = d^2(a^2 + b^2),$$

enfin $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ayz + 2bzx + 2cxy = 1$

(*si, pour cette dernière,* $a + b + c = 0$), *représentent des surfaces cylindriques.*

ÉTUDE SUR LES COORDONNÉES TANGENTIELLES

ET LEURS APPLICATIONS

Par M. E. J. Boquel.

(*Suite*, voir page 277.)

Point de contact d'une tangente donnée. — Application aux coniques. — Équation du pôle d'une droite donnée par rapport à une conique. — Soit $f(u,v) = 0$ l'équation d'une courbe en coordonnées tangentielles; proposons-nous de trouver l'équation du point de contact d'une tangente dont les coordonnées sont u_1 et v_1. Considérons une tangente voisine de la proposée, et soient $u_1 + \Delta u_1$ $v_1 + \Delta v_1$ les coordonnées. L'équation du point d'intersection de ces deux droites est

$$v - v_1 = \frac{\Delta v_1}{\Delta u_1}(u - u_1)$$

Si l'on suppose que la seconde tangente se rapproche indéfiniment de la première, le point d'intersection des deux tangentes se rapproche indéfiniment du point de contact de la droite (u_1,v_1) de manière à avoir ce point pour limite. Δu_1 tendant alors vers zéro, Δv_1 tend aussi vers zéro et la limite du rapport $\frac{\Delta v_1}{\Delta u_1}$ est précisément la dérivée (calculée pour les valeurs particulières u_1, v_1) de la variable v par rapport à la variable u, v étant une fonction implicite de u déterminée par l'équation $f(u,v) = 0$. Or on a

$$v'_u = -\frac{f'_u}{f'_v}.$$

L'équation du point de contact de la tangente (u_1, v_1) est donc

$$v - v_1 = -\frac{f'_{u_1}}{f'_{v_1}}(u - u_1)$$

ou bien

$$uf'_{u_1} + vf'_{v_1} = u_1 f'_{u_1} + v_1 f'_{v_1}.$$

Si l'on remplace u et v par $\frac{u}{w}$ et $\frac{v}{w}$, pour transformer l'équation de la courbe donnée en une équation homogène $f(u,v,w) = 0$, l'équation du point de contact deviendra, tout à fait comme en coordonnées cartésiennes,

$$uf'_{u_1} + vf'_{v_1} + wf'_{w_1} = 0$$

sous la condition de remplacer w et w_1 par l'unité à la fin des calculs.

Plus généralement, soient p, q, r, s,.... des fonctions linéaires en u et v de la forme

$$p = \alpha u + \alpha' v + \alpha''$$
$$q = \beta u + \beta' v + \beta''$$
$$r = \gamma u + \gamma' v = \gamma''$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

et supposons que l'équation de la courbe soit exprimée au moyen de ces fonctions linéaires, par une relation de la forme

$$f(p, q, r, s, \dots) = 0.$$

Le théorème des fonctions composées donne

$$f'_u = f'_p \cdot p'_u + f'_q \cdot q'_u + f'_r \cdot r'_u + \dots$$

c'est-à-dire $f'_u = \alpha f'_p + \beta f'_q + \gamma f'_r + \dots$

De même $f'_v = \alpha' f'_p + \beta' f'_q + \gamma' f'_r + \dots$

L'équation $uf'_{u_1} + vf'_{v_1} = u_1 f'_{u_1} + v_1 f'_{v_1}$ devient alors

$$f'_p(\alpha u + \alpha' v - \alpha u_1 - \alpha' v_1) + f'_q(\beta u + \beta' v - \beta u_1 - \beta' v_1) + \ldots = 0$$

c'est-à-dire

$$f'_{p_1}(p - p_1) + f'_q(q - q_1) + f'_{r_1}(r - r_1) + \ldots = 0.$$

Si la fonction $f(p, q, r, \ldots)$ est homogène et du degré m en $p, q, r, \ldots$ le théorème d'Euler donne

$$p_1 f'_{p_p} + q_1 f'_{q_1} + r_1 f'_{r_1} + \ldots = mf(p_1, q_1, r_1, \ldots)$$

Mais par hypothèse la droite (u_1, v_1) est une des tangentes de la courbe considérée ; on a donc $f(p_1, q_1, r_1, \ldots) = 0$, et alors l'équation de son point de contact se réduit à

$$pf'_{p_1} + qf'_{q_1} + rf'_{r_1} + \ldots = 0.$$

La forme ordinaire, que nous avons donnée tout d'abord, n'est qu'un cas particulier de celle-ci ; il suffit, en effet, de réduire les fonctions linéaires à trois, et de supposer

$$p = u, \ q = v, \ r = w.$$

— *Coordonnées des tangentes menées aux points de rencontre d'une courbe avec une droite donnée.* — L'équation du point de contact d'une tangente $(u_1 v_1 w_1)$ à la courbe $f(u, v, w) = 0$ étant $uf'_{u_1} + vf'_{v_1} + wf'_{w_1} = 0$, si l'on considère une droite $(u_0, v_0\, w_0)$ donnée dans le plan, et que l'on exprime que l'équation précédente est vérifiée par les coordonnées u_0 et v_0 de cette droite, la condition obtenue

$$u_0 f'_{u_1} + v_0 f'_{v_1} + w_0 f'_{w_1} = 0$$

signifie que la droite donnée $(u_0\, v_0\, w_0)$ passe par le point de contact de la tangente $(u_1 v_1 w_1)$.

Les coordonnées des tangentes à la courbe $f(u, v, w) = 0$ aux points où elle est rencontrée par la droite $(u_0 v_0 w_0)$ sont donc les solutions communes aux deux équations

$$u_0 f'_{u_1} + v_0 f'_{v_1} + w_0 f'_{w_1} = 0$$

et

$$f(u_1, v_1, w_1) = 0.$$

Si n est le degré en u et v de la courbe donnée (c'est-à-dire sa classe), la première équation est de degré $n - 1$ en u_1 et v_1, la deuxième du degré n ; le nombre des solutions du système est donc en général $n(n - 1)$; de sorte qu'on peut dire qu'une courbe de la n^{me} classe est en général rencontrée par une droite en $n(n - 1)$ points, c'est-à-dire qu'elle est de l'ordre $n - 1$. Il faut excepter le cas des tangentes multiples, où l'ordre est abaissé.

Si l'on interprète ce calcul en remarquant que les valeurs u_1 et v_1 sont celles qui satisfont à la fois aux deux équations tangentielles $f(u,v,w) = 0$ et $u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w = 0$, on voit que les tangentes dont il s'agit sont les tangentes communes aux deux courbes $f(u,v,w) = 0$ et $u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w = 0$.

Dans le cas des courbes de la deuxième classe, l'équation $u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w = 0$ est du premier degré, et de plus permutable, c'est-à-dire qu'on peut l'écrire $u f'_{u_0} + v f'_{v_0} + w f'_{w_0} = 0$. Cette équation représente alors un point; toutes les droites passant par ce point peuvent être considérées comme des tangentes, et alors les tangentes communes $(u_1 v_1 w_1)$ ne sont autre chose que les deux tangentes qu'on peut mener du point considéré à la courbe $f(u,v,w) = 0$. Ce point n'est donc lui-même autre chose que le pôle de la droite $(u_0 v_0 w_0)$.

Exprimer qu'un point $mU + nV + pW = 0$ *est sur une courbe* $f(U, V, W) = 0$. — D'après ce qui précède, il suffira d'écrire que le point considéré est le contact d'une certaine tangente. On identifiera donc l'équation $u f'_{u_1} + v f'_{v_1} + w f'_{w_1} = 0$ avec l'équation du point donné, d'où il résultera les équations

$$\frac{f'_{u_1}}{m} = \frac{f'_{v_1}}{n} = \frac{f'_{w_1}}{p} \text{ avec } m_{u_1} + n_{v_1} + p_{w_1} = 0.$$

L'élimination de $u_1 v_1 w_1$ entre ces relations donnera la condition cherchée. Dans le cas des courbes de la deuxième classe, on trouve, comme en coordonnées cartésiennes et par le même procédé, la condition

$$\begin{vmatrix} A & B & D & m \\ B & C & E & n \\ D & E & F & p \\ m & n & p & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Tangentes communes à deux courbes du deuxième degré. — Applications diverses du principe de dualité considéré dans son expression analytique. — Soient $F(u, v) = 0$ et $f(u, v) = 0$ les équations tangentielles de deux coniques ; l'équation $F(u, v) + \lambda f(u, v) = 0$, où λ désigne un paramètre arbitraire, repré-

sente toutes les coniques qui sont tangentes aux tangentes communes des deux coniques proposées.

Il faut d'abord observer que *cinq droites quelconques étant données, il existe une conique, et une seule, tangente à ces cinq droites.* — Cette proposition, qui peut être démontrée de bien des manières, résulte immédiatement de ce que l'équation tangentielle d'une conique est de la forme

$$au^2 + 2buv + cv^2 + 2du + 2ev + f = 0. \quad (1)$$

Pour exprimer que la conique considérée est tangente aux cinq droites données, il faut écrire les cinq conditions

$$au_1^2 + 2bu_1v_1 + cv_1^2 + 2du_1 + 2ev_1 + f = 0$$
$$au_2^2 + \dots\dots\dots\dots = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$au_5^2 + 2bu_5v_5 + cv_5^2 + 2du_5 + 2ev_5 + f = 0.$$

Ces cinq conditions forment un système de cinq équations linéaires à cinq inconnues, et elles admettent généralement un système de valeurs uniques et bien déterminées pour les cinq inconnues $\frac{a}{f}, \frac{b}{f}, \frac{c}{f}, \frac{d}{f}, \frac{e}{f}$; car, pour qu'il en fût autrement, il faudrait que le déterminant formé par les coefficients de ces inconnues fût nul, ce qui ne peut arriver que pour des valeurs particulières des coordonnées u_1v_1, u_2v_2, etc., et non pour des valeurs quelconques de ces quantités. En reportant ces valeurs dans l'équation générale des coniques (1), on aura l'équation tangentielle d'une conique unique et bien déterminée.

Ce théorème est d'ailleurs la conséquence immédiate, par la méthode des polaires réciproques, du théorème qui dit que par cinq points donnés dont il n'y a pas plus de trois en ligne droite, passe une conique et une seule.

Cela posé, l'équation $F(u, v) + \lambda f(u, v) = 0$ représente des courbes de la deuxième classe, puisqu'elle est du second degré en u et v; ces courbes sont tangentes aux droites qui touchent à la fois les deux courbes F et f, puisque les valeurs de u et v qui annulent à la fois $F(u, v)$ et $f(u, v)$ annulent évidemment $F(u, v) + \lambda f(u, v)$; enfin, elle représente toutes les coniques jouissant de cette propriété, puisque, en considérant l'une d'elles et

choisissant une tangente autre que les tangentes communes aux deux courbes F et f, on pourra toujours déterminer λ par la condition que la courbe $F + \lambda f = 0$ touche cette dernière droite; la conique $F + \lambda f = 0$ ainsi déterminée aura alors cinq tangentes communes avec la courbe considérée, et par conséquent coïncidera avec elle.

Si l'on choisit λ de manière que la forme $F + \lambda f$ se décompose en un produit de facteurs linéaires, en annulant le discriminant de cette forme supposée rendue homogène, les deux facteurs séparément égalés à zéro représentent chacun un point, qui est l'intersection de deux tangentes communes aux deux courbes considérées. Ces points sont en nombre égal au nombre des valeurs de λ fournies par l'équation

$$\begin{vmatrix} a + a'\lambda & b + b'\lambda & d + d'\lambda \\ b + b'\lambda & c + c'\lambda & e + e'\lambda \\ d + d'\lambda & e + e'\lambda & f + f'\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

c.-à-d. au nombre de trois; on leur donne quelquefois le nom de points ombilicaux.

L'équation en λ (2), qui détermine ces valeurs, donne lieu à une discussion tout à fait semblable à celle que l'on fait pour l'équation en λ analogue en coordonnées cartésiennes.

Les théorèmes ainsi établis directement vérifient complètement le principe de dualité; ainsi :

Il y a toujours un système de points ombilicaux réels, de même qu'il y a toujours un système de sécantes communes réelles.

Si les coniques ont quatre tangentes communes réelles, les trois systèmes de points ombilicaux sont réels. Ce théorème est le corrélatif de celui-ci : Deux coniques se coupant en quatre points, tous simultanément réels, les trois systèmes de cordes communes sont réels.

Tous les théorèmes relatifs aux tangentes communes et aux points ombilicaux sont de la même manière corrélatifs de ceux qui concernent les points de rencontre et les sécantes communes.

On peut d'ailleurs dire d'une manière générale que l'équation cartésienne et l'équation tangentielle des coniques étant absolument de la même forme, toutes les propriétés

dont la démonstration est une conséquence de la forme de l'équation ont leurs corrélatives établies par ce fait même. Nous laisserons donc à nos lecteurs le soin de faire eux-mêmes l'étude complète des tangentes communes à deux coniques, et des propriétés des points ombilicaux.

(A suivre.)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Examens oraux de 1881.

Segment sphérique à deux bases.

— On donne deux nombres A et B, et leur plus grand commun diviseur; trouver le plus petit commun multiple.

— Théorème des fonctions homogènes.

— Quand les trois plans du centre sont parallèles, la surface du second degré est un cylindre parabolique.

— Si l'équation en S a une racine double, que peut-on dire des directions principales?

— Un point (o, o') est lié à un plan $P\alpha P'$. On fait tourner le plan autour de αP, jusqu'à ce qu'il soit rabattu sur le plan horizontal. Trouver les nouvelles projections du point.

— Résoudre $x^5 - 1 = 0$.

— Construire la courbe $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{\cos^3\omega + \sin^3\omega}{3\sin\omega\cos\omega}$.

— Comment l'hyperboloïde est-il coupé par un plan parallèle à un plan tangent au cône asymptote?

— Dérivée de xx^2.

— On a une courbe asymptote à une droite donnée dans le plan horizontal; elle sert de base à un cylindre dont les génératrices ont une direction donnée. Ce cylindre étant coupé par un plan, on demande s'il y aura des branches infinies.

— Théorème de Pascal.

— Volume du prisme oblique.

— Construire un trièdre connaissant une face et les deux dièdres adjacents.

— Si une fraction est irréductible, et si son dénominateur ne contient ni le facteur 2, ni le facteur 5, elle donne naissance à une fraction périodique.

— L'expression

$$z = \frac{(x-y)a^m + (a-x)y^m - (a-y)x^m}{(x-y)(a-y)(a-x)}$$

devient $\dfrac{0}{0}$ quand on y fait $x = y = a$; trouver sa véritable valeur.

— Définir a^x.

— Discuter $xy = z^2$.

— Condition pour que
$$f = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$$
soit un carré parfait.

— Résolution algébrique de l'équation du troisième degré. Après avoir posé $x = y + z$, on est conduit à résoudre les équations simultanées $3yz + p = 0$, $y^3 + z^3 + q = 0$; montrer que les six valeurs de x que l'on trouve se réduisent à trois.

— Étudier la série
$$1 + \frac{x}{x^2+1} + \frac{x^2}{x^4+1} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{x^{2n}+1} + \ldots$$
et montrer qu'elle est convergente pour toutes les valeurs positives et négatives de x, excepté pour $x = 1$.

— On pose
$$X = ax + by + cz;\ Y = a'x + b'y + c'z;\ Z = a''x + b''y + c''z;$$
prouver que, si le déterminant des neuf coefficients est nul, l'un au moins des mineurs étant différent de zéro, il existe une relation linéaire et homogène entre X, Y, Z. Examiner le cas où tous les mineurs sont nuls, et où l'un au moins des coefficients $a, b, c, \ldots$ est différent de zéro.

— Minimum de la fonction
$$z = (ax + by + c)^2 + (a'x + b'y + c')^2.$$
Examiner le cas où le déterminant $ab' - ba'$ est nul.

— Équation d'un cône circonscrit à l'ellipsoïde
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

— Un plan étant donné par ses traces, amener ce plan à être de front par une rotation. Comment l'axe doit-il être choisi? Trouver ce que devient, après la rotation, un point du plan dont on donne la projection verticale.

— Définition précise d'une fonction croissante. A quel caractère reconnaît-on qu'une fonction est croissante, la variable étant comprise entre a et b? Si la dernière est positive ou nulle pour toute valeur de x comprise entre a et b, on a $f(\beta) - f(\alpha) > 0$, α et β étant deux nombres compris entre a et b, et $\beta > \alpha$.

— On donne dans un plan un cercle C, et deux droites OA, OB, qui se coupent en O. On fait tourner C autour de OA, puis autour de OB. Trouver la projection de l'intersection de ces deux surfaces sur le plan AOB.

— Résoudre $x^2 - 4 = 0$ et prouver qu'il n'y a pas d'autres racines que $+2$ et -2.

— Démontrer qu'un produit ne peut être nul que si l'un des facteurs est nul.

— Que représente $xy = z$?

— Lieu des sommets des angles droits circonscrits à une ellipse.

— Condition de réalité des racines de $x^3 + px + q = 0$.

— Plus courte distance de la ligne de terre à une droite (l, l').

— Discuter la courbe $\quad x = \dfrac{1+t}{1-t},\ y = \dfrac{t}{1-t}.$

— Définir $\sqrt{2}$.

— Limite supérieure des racines d'une équation.

— Plan tangent en un point d'une surface.

— Pour quelles valeurs de x la série

$$1 + \frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{x^2+1} + \dots + \frac{x^n}{x^n+1} \dots$$

est-elle convergente ?

— Démontrer que x^n tend vers zéro quand n tend vers l'infini, si x est plus petit que 1.

— Limite de $\frac{\sin x}{x}$, pour $x = 0$.

— On considère l'expression $ax + by$, a et b étant entiers; soit ω leur plus grand commun diviseur ; on donne à x et à y toutes les valeurs possibles, excepté *zéro*; démontrer que l'on peut toujours satisfaire en nombres entiers à l'équation $ax + by = \omega$.

— On donne $z^2 - 2zy + y^2 + 2z - 1 = 0$.

Trouver la portion du plan des xy recouverte par la projection de cette surface sur le plan.

— Génératrices rectilignes de la surface

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x.$$

— Toute fonction entière de $\sin x$ et de $\cos x$ peut se mettre sous la forme

$$F + \sin x \,.\, f,$$

F et f étant des fonctions entières de $\cos x$; de plus, elle ne peut se mettre sous cette forme que d'une seule façon.

— Résoudre le système

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ a'x + b'y + c'z &= 0 \\ a''x + b''y + c''z &= 0 \end{aligned}$$

— Trouver $\sqrt{1 + 2i}$.

— Etant données deux droites dans le plan horizontal et un point de l'espace, construire l'angle des deux plans déterminés par ce point et l'une ou l'autre de ces deux droites.

— Quotient de deux imaginaires.

— Diamètres conjugués dans une surface du second degré.

— Surface d'un triangle en fonction des trois côtés. La formule trouvée est-elle homogène? — Pourquoi une surface est-elle du second degré?

— On donne une tangente à une parabole, le point où elle coupe l'axe, et un point de la directrice : trouver l'équation générale.

— Que représente $PQ + R = 0$, $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ étant les équations de trois plans?

— Elimination de Cauchy sur l'exemple

$$ax^4 + bx + c = 0 \qquad x^3 + px + q = 0.$$

— Dans une hyperbole, on donne un foyer et un sommet du rectangle construit sur les axes. Equation générale.

— On donne une tangente à une conique, le point de contact et les points de rencontre de cette tangente avec les deux directrices; équation générale.

— Théorie des plans cycliques.

— Étant donnée l'équation d'une courbe, comment reconnaîtra-t-on que la droite $y = ax + b$ est asymptote?

— Conditions pour que le cône

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0$$

soit de révolution. Démontrer que l'équation

$$\lambda(x^2 + y^2 + z^2) + (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = 0$$

représente un cône de révolution, et que, réciproquement, l'équation d'un pareil cône peut être mise sous cette forme.

— Construire la courbe

$$y = \sqrt[3]{x + 1} - \sqrt{1 - x}.$$

Étudier la position de la courbe par rapport à la tangente à l'origine.

— On prend trois axes rectangulaires ox, oy, oz. Une sphère a son centre sur l'axe ox; une droite mobile s'appuie sur l'axe oz, reste parallèle au plan xoy et est toujours tangente à la sphère. Trouver la surface engendrée par cette droite.

QUESTION 298

Solution par M. Quiquet, élève du Lycée de Lille.

Si l'on cherche toutes les équations du quatrième degré telles que les carrés de leurs racines soient en même temps racines de la même équation, on obtient seize *équations satisfaisant à cette condition. 1° Former ces équations. 2° Il y en a* dix *dont les coefficients sont réels; démontrer qu'aucune n'est irréductible, c'est-à-dire qu'on peut les décomposer en d'autres équations de degrés moindres. Trouver leurs racines. 3° Des* six *équations dont les coefficients sont imaginaires et qui satisfont à la question, il y en a trois qui sont les conjuguées des trois autres; démontrer* à priori *qu'il doit en être ainsi.*

Nous pouvons mettre ces équations sous la forme générale

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0 \qquad (\alpha)$$

en supposant le premier coefficient égal à l'unité.

Soient a, b, c, d les racines de (α), il faut que

$$A = \Sigma a = \Sigma a^2$$
$$B = \Sigma ab = \Sigma a^2b^2$$
$$C = \Sigma abc = \Sigma a^2b^2c^2$$
$$D = abcd = a^2b^2c^2d^2$$

en éliminant a, b, c, d entre ces huit relations, nous obtiendrons quatre équations ne contenant plus que les coefficients A, B, C, D, ce qui nous permettra d'obtenir leurs valeurs.

Si l'on remarque que

$$(\Sigma a)^2 = \Sigma a^2 + 2\Sigma ab$$
$$(\Sigma ab)^2 = \Sigma a^2b^2 + 2\Sigma abc\Sigma a - 2abcd$$
$$(\Sigma abc)^2 = \Sigma a^2b^2c^2 + 2abcd\Sigma ab$$
$$(abcd)^2 = a^2b^2c^2d^2,$$

on obtient immédiatement

$$A^2 = A + 2B \qquad (1)$$
$$B^2 = B + 2AC - 2D \qquad (2)$$
$$C^2 = C + 2BD \qquad (3)$$
$$D^2 = D \qquad (4)$$

telles sont les équations simultanées auxquelles doivent satisfaire les coefficients d'une équation du 4e degré mise sous la forme (α) pour qu'elle admette comme racines les carrés de ses racines.

Résolvons ce système et pour cela remarquons que (4) ne fournit pour D que les valeurs $D = 0$ ou $D = 1$.

Soit d'abord $D = 0$.

(3) donne alors $C = 0$ ou $C = 1$. Si $C = 0$, (2) donne $B = 0$ ou $B = 1$. Soit $B = 0$, alors (1) donne $A = 0$ ou $A = 1$; soit $B = 1$, de (1) on tire $A = 2$ ou $A = -1$. Si $C = 1$, on résoudra

$$A^2 = A + 2B \qquad (5)$$
$$B^2 = B + 2A \qquad (6)$$

Ces deux équations retranchées membre à membre donnent $A^2 - B^2 = -(A - B)$;

d'où $A = B$ et $A + B = -1$.

Si $A = B$, (5) donne pour A et B, 3 ou 0. Si $A + B = -1$, (5) peut s'écrire $A^2 + A + 2 = 0$;

d'où $$A = \frac{-1 \pm 7i}{2}$$

et par suite $$B = -1 - A = \frac{-1 \mp 7i}{2}$$

en prenant les signes supérieurs et inférieurs ensemble.

D'ailleurs, on remarque que l'on peut permuter les valeurs de A et B, car (5) et (6) se déduisent l'une de l'autre par le changement de A en B et de B en A.

Supposons maintenant $D = 1$.

Les équations deviennent alors

$$A^2 = A + 2B \quad (7)$$

$$B^2 = B + 2AC - 2 \quad (8)$$

$$C^2 = C + 2B \quad (9)$$

Retranchons (9) de (7) membre à membre, il en résulte

$$A^2 - C^2 = A - C.$$

d'où $A = C$ et $A + C = 1$.

Soit d'abord $A = C$. Si l'on élimine B entre (7) et (8) dans cette hypothèse, il vient

$$\left[\frac{A(A-1)}{2}\right]^2 = \frac{A(-1)}{2} + 2A^2 - 2,$$

équation qui se dédouble en

$$A = 1$$

et $A^2(A-1) = 2A + 8(A+1)$.

Cette dernière équation peut s'écrire

$$A[A(A-1) - 2] = 8(A+1)$$

ou $A[(A^2-1) - (A+1)] = 8(A+1)$,

d'où l'on tire $A = -1$

et $A(A-2) = 8$.

Ainsi lorsque $A = C$, on obtient pour A et C les valeurs $1, -1, 4, -2$. Alors (7) ou (9) donnent pour B les valeurs correspondantes $0, 1, 6, 3$.

Soit maintenant $A + C = 1$. Alors $2AC = -2C(C-1)$. Or (9) donnera $2B = C(C-1)$, donc (8) devient

$$B^2 + 3B + 2 = 0,$$

d'où $B = -1$ et $B = -2$.

Si $B = -1$, de (9) on tire $C = \frac{1 \pm 7i}{2}$,

d'où $A = 1 - C = \frac{1 \mp 7i}{2}$.

Si $B = -2$, on a pour C $\frac{1 \pm 15i}{2}$, et pour A $\frac{1 \mp 15i}{2}$; les signes supérieurs et inférieurs devant encore être pris ensemble, dans les deux cas.

On peut donc former le tableau suivant :

D	C	B	A
0	0	0	0
			1
		1	2
			-1
	1	0	0
		3	3
		$\frac{-1-7i}{2}$	$\frac{-1+7i}{2}$
		$\frac{-1+7i}{2}$	$\frac{-1-7i}{2}$
1	1	0	1
	-1	1	-1
	4	6	4
	-2	3	-2
	$\frac{1+7i}{2}$	-1	$\frac{1-7i}{2}$
	$\frac{1+7i}{2}$		$\frac{1+7i}{2}$
	$\frac{1+15i}{2}$	-2	$\frac{1-15i}{2}$
	$\frac{1-15i}{2}$		$\frac{1+15i}{2}$

On voit donc bien qu'il existe toujours seize équations répondant à la question, que *dix* ont leurs coefficients réels, savoir

$$x^4 = 0 \qquad (10)$$

$$x^4 - x^3 = 0 \qquad (11)$$

$$x^4 - 2x^3 = 0 \qquad (12)$$

$$x^4 + x^3 + x^2 = 0 \qquad (13)$$

$$x^4 - x = 0 \qquad (14)$$

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = 0 \qquad (15)$$

$$x^4 - x^3 - x + 1 = 0 \qquad (16)$$

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \qquad (17)$$

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0 \qquad (18)$$

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0 \qquad (19)$$

que *six* ont des coefficients imaginaires, et que, parmi ces six, *trois* sont les conjuguées des trois autres, savoir

$$x^4 - \frac{-1 \mp 7i}{2} x^3 + \frac{-1 \mp 7i}{2} x^2 - x = 0$$

$$x^4 - \frac{1 \mp 7i}{2} x^3 - x^2 - \frac{1 \pm 7i}{2} x + 1 = 0$$

$$x^4 - \frac{1 \mp 15i}{2} x^3 - 2x^2 - \frac{1 \pm 15i}{2} x + 1 = 0$$

Il faut prendre dans ces équations les signes supérieurs et les signes inférieurs ensemble comme il a déjà été dit.

Les six premières équations à coefficients réels ont 4, 3, 2, ou au moins une racine égale à zéro qui est lui-même son carré; leur premier membre peut se décomposer immédiatement, ce qui donne $x^4 = 0$ (10)

$$x^3(x - 1) = 0 \qquad (11)$$

$$x^2(x - 1)^2 = 0 \qquad (12)$$

$$x^2(x^2 + x + 1) = 0 \qquad (13)$$

$$x(x^3 - 1) = 0 \qquad (14)$$

$$x(x - 1)^3 = 0 \qquad (15)$$

(11), (12) et (15) admettent respectivement 1, 2, 3 fois la racine 1, qui est aussi son propre carré. Quant à (14), elle admet les 3 racines cubiques de l'unité 1, α, β, et l'on sait que α et β sont les carrés l'une de l'autre, (13) a aussi α et β pour racines.

Les équations (16), (17), (18), (19) sont réciproques; leur degré peut donc s'abaisser de moitié. Mais on peut remarquer immédiatement que (16) admet deux fois la racine 1 et que (18) n'est autre que le développement de $(x - 1)^4$. On a donc $(x - 1)^2(x^2 + x + 1) = 0$ (16)

$$(x - 1)^4 = 0 \qquad (18)$$

Ainsi (16) admet deux fois la racine 1 et les racines cubiques α et β de l'unité; (18), quatre fois la racine 1.

D'ailleurs (17) a pour racines les quatre racines cinquièmes imaginaires de l'unité, et l'on sait que les puissances d'une racine imaginaire de l'équation binôme telle que $x^5 - 1 = 0$ sont aussi racines de cette équation. Les carrés des racines sont donc bien racines de l'équation. Ces racines sont

$$\frac{\pm\sqrt{5} - 1 \pm i\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}}{4}$$

en prenant le même signe devant $\sqrt{5}$.

En posant $x + \frac{1}{x} = y$, l'équation (19) peut s'écrire $y^2 + 2y + 1 = 0$ ou $(y + 1)^2 = 0$.

Les racines de (19) sont donc deux à deux égales, les valeurs de x sont données par l'équation $x^2 - xy + 1 = 0$ ou $x^2 + x + 1 = 0$ et elles ne sont autres encore que α et β.

On peut, par conséquent, former le tableau suivant des racines.

0 0	0 0	(10)
0 0	0 1	(11)
0 1	0 1	(12)
0 $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$	0 $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$	(13)
0 $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$	1 $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$	(14)
0 1	1 1	(15)
1 $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$	1 $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$	(16)
$\frac{\sqrt{5} - 1 + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$ $\frac{-\sqrt{5} - 1 + i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5} - 1 + i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$ $\frac{-\sqrt{5} - 1 - i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$	(17)

1	1	
1	1	(18
$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$	
$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$	(19

Il reste à démontrer pourquoi des six équations à coefficients imaginaires, trois sont les conjuguées des trois autres.

Soit $P + Qi = 0$ une équation telle que si elle admet la racine $p + qi$, elle admette aussi $(p + qi)^2$. Alors l'équation $P - Qi = 0$ admettra évidemment la racine $(p - qi)$, et aussi $(p - qi)^2$, puisqu'elle ne diffère de la première que par le changement de signe de i. Donc, à toute équation de la forme

$$P + Qi = 0$$

satisfaisant à la question, correspond une équation de la forme

$$P - Qi = 0$$

satisfaisant également à la question.

NOTA. — La même question a été résolue par M. Boulogne, élève du lycée de Lille.

NOTE

MM. Baron et Daguillon, élèves du Lycée Henri IV, classe de M. de l'Épinay, nous ont adressé des solutions des questions 293 et 294.

Ces questions sont trop simples pour qu'il y ait lieu d'en insérer les solutions. Elles avaient été proposées pour faire connaître à nos lecteurs le genre de questions posées en Angleterre aux élèves qui étudient la géométrie analytique.

(Note de la rédaction.)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE 1881

Composition de Mathématiques.

On considère une parabole P et une droite AB normale au point A à cette courbe (ce point A se projetant d'ailleurs sur l'axe au foyer même de la courbe). Trouver le lieu des sommets des sections faites dans le cylindre droit qui a pour base P, par des plans passant par AB.

Épure.

Un tétraèdre régulier ABCD dont le côté a 190 millimètres, a l'une de ses faces ABC sur le plan horizontal ; le sommet D est au-dessus du plan de projection. On considère un cône ayant son sommet en A et pour base le cercle inscrit dans le triangle BCD, et un cône ayant son sommet en B et pour base le cercle inscrit dans le triangle ACD. On demande de représenter ce qui reste du tétraèdre lorsque l'on a ôté le volume compris dans l'intérieur des deux cônes. On indiquera la construction à faire pour déterminer un point quelconque de l'intersection des deux cônes et la tangente en ce point.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE 1881

On considère la courbe du troisième ordre

$$27y^2 = 4x^3.$$

1° On demande la condition à laquelle doivent satisfaire les paramètres m et n pour que la droite

$$y = mx + n$$

soit tangente à cette courbe ;

2° On demande le lieu des points d'où l'on peut mener à la courbe proposée deux tangentes parallèles à deux diamètres conjugués de la conique représentée par l'équation

$$x^2 + y^2 + 2axy = B;$$

3° Par un point A pris sur la courbe on mène des sécantes coupant cette courbe en deux points variables M, M'. On demande le lieu du milieu du segment MM'. Discuter la forme de ce lieu et indiquer les arcs qui répondent à des sécantes pour lesquelles les points M et M' sont réels.

CORRESPONDANCE

M. Catalan nous fait remarquer que le problème traité p. 10 est bien connu. On en trouve une solution dans son *Manuel de Cosmographie*, 1880, p. 103.

M. Catalan nous signale aussi la question 213, p. 86, qui a été énoncée et démontrée par lui-même en 1858 (Comptes rendus, t. XLII). G. L.

AVIS

Nous prions nos correspondants de vouloir bien, lorsqu'ils nous envoient des solutions de questions proposées, se conformer aux indications suivantes:

1° Mettre en tête leur nom, ainsi que la désignation exacte de l'établissement auquel ils appartiennent;

2° Reproduire le numéro et l'énoncé de la question;

3° Mettre chaque question sur une feuille à part et surtout chaque figure sur une feuille spéciale, qui peut être réunie à la solution ou bien porter le numéro de la question correspondante;

4° Eviter, dans la rédaction, les abréviations qui ne sont pas usitées dans l'impression.

5° Ecrire lisiblement, et surtout soigner les symboles et formules.

Toute solution qui ne remplirait pas les premières conditions pourrait donner lieu à des erreurs ou à des oublis. Si les deux dernières conditions ne sont pas remplies, nous serons obligés de renvoyer les copies à leurs auteurs, pour obtenir une nouvelle rédaction satisfaisant à ces conditions; les élèves qui se préparent aux examens nous sauront gré de les avoir habitués à ces détails tout matériels, qui ont une influence dans la correction des copies.

Nos correspondants nous rendront service en nous envoyant les questions de Baccalauréat ès sciences données dans les diverses Facultés et aussi en nous faisant connaître, pour ceux qui se préparent aux écoles, leur rang d'admission, s'il y a lieu.

Le Rédacteur-Gérant.
J. KŒHLER.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE — 14483-1.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Delpit**, élève de l'École préparatoire Sainte-Barbe.

PROPRIÉTÉS DU TÉTRAÈDRE A ARÊTES ORTHOGONALES

On nomme *tétraèdre à arêtes orthogonales* un tétraèdre dans lequel les arêtes opposées sont perpendiculaires (*).

1. — *On peut toujours construire une infinité de tétraèdres jouissant de cette propriété.*

Donnons-nous par exemple comme base le triangle quelconque BCD ; menons les trois hauteurs de ce triangle ; par ces droites faisons passer des plans perpendiculaires au plan du triangle; ces plans se couperont suivant une droite AM perpendiculaire à la base ; et, si l'on joint un point A quelconque de AM aux trois sommets B, C, D, on obtient un tétraèdre répondant à la question. En effet, l'arête AD, par exemple, est perpendiculaire à BC parce que le plan ADE est perpendiculaire à BC.

2. — *Si parmi les six arêtes, quatre sont perpendiculaires deux à deux, les deux autres le sont aussi.*

Supposons que AB soit perpendiculaire à DC, et AD à BC; menons les hauteurs du triangle de base, et faisons passer des plans par ces hauteurs et les arêtes latérales ; deux de ces plans, les plans ADE, ABF, sont perpendiculaires au plan BCD ; or le troisième ACK passant par leur intersection est aussi perpendiculaire à la base et par suite à la droite BD; donc les droites BD et AC sont orthogonales.

3. — *Les hauteurs du tétraèdre se coupent en un même point.*

Soit I le point de rencontre des deux hauteurs AM et CN. Menons une troisième hauteur DQ.

Les droites DQ, CN appartiennent respectivement aux

(*) Le lecteur est prié de faire les figures.

plans ADE, ACK, qui se coupent suivant la hauteur AM; donc les droites DQ, CN se coupent sur la droite AM.

Les hauteurs concourent donc en un même point qu'on appelle centre des hauteurs.

4. — *Les plus courtes distances des arêtes opposées se coupent en un même point, qui est le centre des hauteurs.*

Considérons les arêtes opposées AB, DC et les pieds F et L des perpendiculaires DL et BF. La droite FL est perpendiculaire à CD comme étant contenue dans le plan ABF perpendiculaire à cette droite; pour une raison analogue, elle est perpendiculaire à AB; donc c'est la plus courte distance des droites AB et DC.

Elle passe par le point I, car c'est une hauteur du triangle DLC qui a pour centre des hauteurs le point I.

On voit que les pieds des plus courtes distances sont les pieds des hauteurs des faces.

5. — *Le produit de deux arêtes opposées par leur plus courte distance est égal à six fois le volume du tétraèdre.*

Nous avons $AM \,.\, BF = FL \,.\, AB$

$$3V = AM \,.\, \text{Surf. } BCD$$

$$2\text{Surf. } BCD = BF \,.\, DC.$$

Multiplions membre à membre il vient

$$FL \,.\, AB \,.\, DC = 6V.$$

6. — *Les milieux des arêtes et les pieds des plus courtes distances sont douze points sur une même sphère.*

Soient M, N, P, Q, les milieux de quatre arêtes opposées deux à deux.

La figure MNPQ est un rectangle dont les diagonales sont égales et se coupent par leurs milieux.

Il en résulte que les trois lignes qui joignent les milieux des arêtes opposées sont égales et concourent en un même point qui est leur milieu commun; donc les points M, N, P, Q, R, S sont sur une même sphère. Cette sphère coupe les faces suivant les cercles passant par les milieux des arêtes, c'est-à-dire suivant leurs cercles des neuf points.

La sphère passe donc par les pieds des plus courtes distances.

La même sphère passe encore par les milieux des lignes qui joignent les sommets aux centres des hauteurs des faces.

Cette sphère se nomme la première sphère des douze points ; nous déterminerons plus loin son centre.

7. — *Le centre de gravité du tétraèdre se trouve au milieu de la ligne qui joint le centre des hauteurs au centre de la sphère circonscrite.*

D'abord ces points sont en ligne droite. Soit O le centre de la sphère circonscrite ; soit α le centre du cercle circonscrit au triangle BCD ; soit γ le centre de gravité du même triangle ; les points α, γ, H sont en ligne droite.

Le centre de gravité du tétraèdre se trouve sur la ligne $A\gamma$; il se trouve donc dans les plans tels que $O\alpha H$ perpendiculaires aux différentes faces du tétraèdre ; or les points O et I sont des points communs à tous ces plans ; la droite OI est donc leur intersection et le centre de gravité doit s'y trouver.

Calculons le rapport $\frac{OC}{CI}$;

pour cela abaissons Cq perpendiculaire sur αH :

$$\frac{\gamma q}{\gamma H} = \frac{\gamma C}{\gamma A} = \frac{1}{4}$$

or $$\alpha\gamma = \frac{1}{2}\gamma H.$$

Donc $$\frac{\gamma q}{\alpha\gamma} = \frac{1}{2},$$

et par suite $$\frac{\gamma q}{\alpha g} = \frac{1}{3}.$$

Il s'ensuit que g est le milieu de αH et par suite C est le milieu de OI.

8. — *Les centres de gravité des faces sont les sommets d'un tétraèdre homothétique inverse au tétraèdre donné.*

Il suffit de remarquer que la ligne qui joint les centres

de gravité de deux faces, est parallèle à l'arête qui joint leurs sommets non communs et égale au tiers de cette arête; de plus on voit qu'elles sont dirigées en sens inverse.

Le rapport d'homothétie est 1/3. Le centre d'homothétie est le centre de gravité du tétraèdre.

9. — *La sphère qui passe par les centres de gravité des faces passe par leur centre des hauteurs et divise dans le rapport de 1 à 2 les lignes qui joignent les sommets au centre des hauteurs du tétraèdre.*

Les centres de gravité étant les sommets d'un tétraèdre homothétique au tétraèdre donné, la sphère passant par ces points a son centre sur la ligne qui joint le centre de la sphère circonscrite au centre d'homothétie, c'est-à-dire sur la ligne OC. Il divise cette ligne dans le rapport de 1 à 3, soit L ce point. Abaissons Ll perpendiculaire sur la ligne αH.

$$\frac{CL}{DC} = \frac{1}{3}$$

et par suite $\frac{CL}{LI} = \frac{1}{2}, \ \frac{LI}{CI} = \frac{2}{3}.$

Il s'ensuit que $\frac{lH}{gH} = \frac{2}{3}, \ \frac{\gamma q}{gH} = \frac{1}{3}, \ \frac{gl}{gH} = \frac{1}{3},$

donc $\frac{\gamma l}{gH} = \frac{2}{3}, \quad \gamma l = lH.$

Le point L est équidistant de γ et de H. Donc la sphère passe par les centres des hauteurs des faces.

Tirons γL et soit K le point où cette droite coupe la hauteur AH. Appliquons le théorème de Ménélaüs au triangle ACI coupé par la transversale γK :

$$\frac{AK}{KI} \cdot \frac{\gamma C}{\gamma A} \cdot \frac{LI}{CL} = 1$$

ou $\frac{AK}{KI} \cdot \frac{1}{4} \, 2 = 1 \quad AK = 2KI.$

La sphère passe donc par les points qui divisent les lignes telle que AI dans le rapport de 2 à 1.

Cette sphère porte le nom de seconde sphère des douze points.

Son rayon est le tiers du rayon de la sphère circonscrite.

Cette sphère coupe les faces suivant des cercles ayant pour diamètres les distances de leurs centres de gravité à leurs centres des hauteurs.

Le rapport $\frac{LI}{LO}$ est égal à $\frac{1}{2}$.

10. — *On peut inscrire dans le tétraèdre un ellipsoïde de révolution ayant pour foyers le centre des hauteurs et son symétrique par rapport au centre de la seconde sphère des douze points.*

Prenons le symétrique F du point I par rapport au point L et son symétrique I′ par rapport au plan BCD, joignons FI′.

La distance FI′ est égale à $2LH = \frac{2R}{3}$.

La droite FI′ coupe la droite αH en un point dont la somme des distances aux points F et I est constante et égale à $\frac{2R}{3}$. Ce point appartient donc à l'ellipsoïde ayant pour foyers les points F et I. De plus c'est un point de tangence, car l'ellipse déterminée par le plan FIαH est tangente au plan BCD.

L'ellipsoïde est de révolution autour de son grand axe. La longueur de ce grand axe est égale au diamètre de la seconde sphère des douze points. Cette sphère est la sphère directrice de l'ellipsoïde.

Le rapport des distances du point de tangence aux points g et l est égal à $\frac{F\gamma}{Ll}$ ou $\frac{KI}{Ll}$.

Le point de tangence s'obtiendra donc en menant par le point I une parallèle à la ligne γL.

La considération de cet ellipsoïde fournit quelques corollaires dont les plus simples sont :

Les lieux des symétriques des points I et I′ par rapport aux plans des faces sont des sphères égales ayant pour centre les points F et I ;

Le produit des distances des points F et I aux faces est constant.

11. — *Lorsqu'un des angles solides du tétraèdre a ses angles plans obtus, il existe une sphère telle que chaque sommet est le pôle de la face opposée.*

Supposons que les angles en A soient obtus. Les centres des hauteurs des faces ayant pour sommet le point A seront en dehors du tétraèdre. Il s'ensuit que les lignes qui les joignent aux sommets B, C, D ne rencontrent chacune le tétraèdre qu'en un point : donc leur point d'intersection, c'est-à-dire le point I, centre des hauteurs, est en dehors du tétraèdre; et un sommet et le pied de la hauteur issue de ce sommet seront du même côté par rapport au centre des hauteurs.

Dans le cas où l'angle solide en A n'a pas ses angles plans obtus le produit IA . IH est constant; lorsque l'angle solide a ses angles plans obtus, le point I est transporté sur la ligne AH au delà du point A.

On voit dès lors que si du point I on décrit une sphère dont le carré du rayon soit égal au produit IA . IH, le tétraèdre sera autopolaire.

Cette sphère se nomme la sphère polaire. Elle a pour centre le centre des hauteurs.

Lorsque la sphère polaire existe, l'ellipsoïde inscrit n'existe plus. En effet, un de ses foyers (le centre des hauteurs) va en dehors du tétraèdre; comme le point C est toujours à l'intérieur du tétraèdre, le point F et le point I sont forcément des côtés différents par rapport aux trois faces ayant leurs sommets en A; par suite l'ellipsoïde est impossible.

Analogue au cercle polaire dans le triangle, la sphère polaire fournit comme lui plusieurs corollaires importants résultant de l'application de la théorie des polaires.

Cherchons les plans polaires des pieds des hauteurs des faces. Ce seront des plans parallèles aux faces opposées. Ces plans forment par leur intersection un tétraèdre homothétique au premier, et tel que les sommets du premier tétraèdre se confondent avec les centres de gravité du nouveau.

Les plans polaires des pieds des plus courtes distances sont des plans passant par les arêtes. En effet, on a vu que le produit des segments interceptés sur ces droites est égal au produit des segments interceptés sur les hauteurs.

12. — *Les arêtes opposées sont conjuguées par rapport à la sphère polaire.*

En effet, une arête est dans le plan mené par le centre des hauteurs perpendiculairement à l'arête opposée; de plus, si l'on joint le centre au point où ce plan coupe la seconde arête, la droite menée est perpendiculaire à la première arête; de plus, comme le produit des segments interceptés sur les plus courtes distances est égal au carré du rayon, il s'ensuit que si par les arêtes opposées à l'angle obtus on mène des plans tangents à la sphère polaire, les arêtes opposées passeront par les points de contact.

13. — *Relations entre les rayons des sphères.*

Nous appellerons ρ le rayon de la sphère polaire, R celui de la sphère circonscrite, ρ' celui de la première sphère des douze points.

Si on prend le point I pour origine d'inversion, la sphère circonscrite a pour inverse la seconde sphère des douze points.

Donc en appelant P et P' les puissances du point I par rapport à ces deux cercles $\rho^4 = PP'$.

Or $$P = R^2 - \delta^2$$

$$P' = \frac{R^2 - \delta^2}{9}.$$

Donc $3\rho^2 = R^2 - \delta^2$ $\quad \rho^2 = \dfrac{R^2 - \delta^2}{3}$ $\quad \delta^2 = R^2 + 3\rho^2.$

La première sphère des douze points passant par les pieds des plus courtes distances est à elle-même son inverse; donc la puissance du point I par rapport à ce cercle est égale à ρ^2 :

$$\rho^2 = \frac{\delta^2}{4} - \rho'^2,$$

$$4\rho^2 = \delta^2 - 4\rho^2$$

et $$\delta^2 = R^2 + 3\rho^2;$$

donc $$\rho' = \frac{1}{2}(R^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}.$$

ÉCOLE FORESTIÈRE 1881

Mathématiques.

1° Trouver la condition pour que deux équations du second degré

$$ax^2 + bx + c = o, \qquad a'x^2 + b'x + c' = o$$

aient au moins une racine commune.

2° Résoudre l'équation

$$\frac{x}{a} + \frac{b}{x} + \frac{b^2}{x^2} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}.$$

3° Trouver le lieu des centres des cercles qui coupent orthogonalement deux cercles donnés.

Trigonométrie et calcul logarithmique.

1° Calculer le côté AB d'un quadrilatère plan ABCD, connaissant le côté opposé

CD = 41375^m,43

et les angles

ADC = 110° 35′ 35″,35
BDC = 49 49 49 ,49
ACD = 36 36 36 ,36
BCD = 86 52 52 ,52

2° Après avoir trouvé 4 degrés pour la hauteur angulaire d'une tour, un observateur s'avance de 1 kilom. vers la tour; il trouve alors 5 degrés pour la hauteur angulaire. Quelle est la longueur du chemin qui lui reste à parcourir pour arriver au pied de la tour?

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1881

Mathématiques élémentaires.

Etant donné un triangle ABC inscrit dans un cercle de rayon R, on mène les bissectrices intérieures des angles A, B, C. Soient A_1, B_1, C_1, les points où ces bissectrices rencontrent la circonférence.

1° En désignant par S et S_1, les surfaces des triangles ABC et $A_1B_1C_1$, par D le diamètre du cercle inscrit au triangle ABC, démontrer qu'on a la relation

$$\frac{S_1}{S} = \frac{R}{D}.$$

2° On considère une suite de triangles ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ... $A_nB_nC_n$, tels que chacun d'eux se déduit du précédent comme, dans l'énoncé ci-dessus, le triangle $A_1B_1C_1$ se déduit du triangle ABC. Démontrer que, lorsque le nombre entier n augmente indéfiniment, le triangle $A_{2n}B_{2n}C_{2n}$ tend vers une position limite $\alpha\beta\gamma$; dans les mêmes conditions, le triangle $A_{2n+1}B_{2n+1}C_{2n+1}$ tend aussi vers une position limite $\alpha'\beta'\gamma'$; les deux triangles limites sont équilatéraux et symétriquement placés par rapport au centre du cercle.

3° Démontrer que, si l'on prend pour unité le rayon R du cercle, le produit des nombres qui mesurent les diamètres des cercles inscrits dans les triangles ABC, $A_1B_1C_1$... $A_nB_nC_n$ tend vers une limite lorsque n croît indéfiniment.

Mathématiques spéciales.

Trouver le lieu des points tels que les pieds des six norma les qu'on peut mener de l'un quelconque d'entre eux à un ellipsoïde donné, à trois axes inégaux, se séparent en deux groupes de trois points dont les plans respectifs sont parallèles entre eux.

Montrer que si l'on se donne un point P du lieu, la solution de ce problème « *mener du point* P *les normales à l'ellipsoïde* » dépend de la résolution de deux équations du troisième degré.

Discuter ces équations.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

ALGER

Résoudre $4 \cos 2x + 3 \cos x - 1 = 0$.

— Dans une sphère de rayon donné, déterminer la hauteur DE d'un segment sphérique à une base, de manière que le cône droit ABC ait un volume égal à m fois le volume du segment BEC. Le problème est-il toujours possible?

— On donne deux droites rectangulaires OX, OY et deux points sur OY. Déterminer sur OX un point M tel que l'angle formé en joignant le point M aux deux points pris sur OY soit égal à 45 degrés.

— Déterminer le rapport des deux bases d'un trapèze isoscèle sachant que le volume engendré par ce trapèze tournant autour de la grande base est les $\frac{4}{5}$ du volume engendré par le trapèze tournant autour de la petite base.

— Dans une circonférence de diamètre AB, déterminer une corde AC telle que si on fait tourner la figure autour de AB, le volume engendré par le segment circulaire AMC, soit égal à m fois le volume engendré par le triangle rectangle ACD, D étant la projection de C sur le diamètre.

— Partager un trapèze ABCD en deux trapèzes semblables par une parallèle aux bases. Comparer les aires de ces trapèzes aux aires des triangles ADC et ABC.

LILLE

Quelle erreur commet-on sur le volume d'un tronc de cône lorsqu'on substitue à ce volume celui du cylindre de même hauteur que le tronc, et ayant pour rayon la moyenne arithmétique entre les rayons des bases du tronc? Limite supérieure de cette erreur quand la différence entre ces deux rayons ne dépasse pas le quart du plus grand.

— Calculer les côtés d'un triangle connaissant les angles et la hauteur issue du sommet A. Trouver le périmètre, le rayon du cercle inscrit, et le rayon du cercle circonscrit (formules logarithmiques).

— Connaissant les côtés et les angles d'un triangle, évaluer par des formules logarithmiques le rayon du cercle circonscrit, les distances du centre du cercle aux trois côtés, et l'excès de la somme de ces distances sur le rayon du cercle circonscrit.

LYON

Une corde MN fait avec le diamètre AB un angle α. Trouver la surface du tronc de cône engendré par la droite MN tournant autour de AB. Application MN = 1; AB = 2; $\alpha = 40° 25' 30''$.

— Trouver le maximum ou le minimum de $y - 2x$ lorsqu'on a la relation $16y^2 + 36x^2 = 9$.

CLERMONT

Dans le plan d'un triangle équilatéral ABC, de côté a, on trace, à une distance d du côté BC, une droite XY parallèle à ce côté. Calculer en fonction de a et de d le volume et la surface totale du solide décrit par le triangle en tournant autour de xy d'un angle égal à $\frac{\pi}{2}$.

— Construire un carré quintuple d'un carré donné.

— On donne les quatre côtés d'un quadrilatère inscrit dans un cercle. On sait que, dans ce quadrilatère, les angles opposés sont supplémentaires; on demande de calculer par la trigonométrie, et sous forme logarithmique, le carré de l'une des diagonales du quadrilatère en fonction des données.

— Résoudre $\cos x = m \operatorname{tg} x$. Discussion; cas où $m = 1$.

GRENOBLE

Dans un triangle rectangle ABC, on donne l'hypoténuse BC = a, et l'angle B. Par un point D pris sur le prolongement de BC, on mène à cette ligne une perpendiculaire DX autour de laquelle le triangle est supposé tourner. On demande de déterminer le point D pour que le volume engendré soit double de celui qu'engendrerait le même triangle en tournant autour de CK, menée par C perpendiculairement à BC.

PARIS, JUILLET 1881

On considère trois nombres en progression géométrique dont la somme est constante. Trouver le maximum de leur produit.

— Le rayon de base d'un cône est a; son apothème est b. Exprimer à l'aide de a et de b le volume de la sphère inscrite au cône.

— Démontrer que, dans une ellipse, le produit des deux rayons vecteurs d'un point quelconque par le carré du cosinus de l'angle que fait la normale avec l'un ou l'autre de ces rayons est égal au carré du demi petit axe.

— Un tétraèdre OABC est tel que les trois faces OBC, OAB, OAC sont des triangles rectangles en O; on donne les arêtes BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$; on demande de calculer : 1° les arêtes OA $= x$, OB $= y$, OC $= z$; 2° le volume du tétraèdre; 3° les tangentes des angles dièdres ayant pour arêtes BC, CA, AD.

QUESTION 299

Solution par M. F. Baudouin, au Collège de Beauvais.

Tout triangle dans lequel les rapports des périmètres aux diamètres des trois cercles ex-inscrits sont exprimés par des nombres entiers est rectangle. Dire la forme de ce triangle.

(Geoffroy.)

Donnons à p, a, b, c, r, r', r'' et r''' les significations connues et considérons les égalités
$pr = (p - a) r' = (p - b) r'' = (p = c) r'''$; elles donnent

$$\frac{p}{r'} = \frac{p-a}{r} = \frac{p}{r} - \frac{a}{r} \qquad (1)$$

$$\frac{p}{r''} = \frac{p-b}{r} = \frac{p}{r} - \frac{b}{r} \qquad (2)$$

$$\frac{p}{r'''} = \frac{p-c}{r} = \frac{p}{r} - \frac{c}{r} \qquad (3)$$

Les premiers membres de ces nouvelles égalités étant entiers, les seconds le seront aussi, de même que leur somme $\frac{p}{r}$; par suite, si l'on considère à part les égalités (1), (2), (3), on voit que les quantités $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$ sont la différence de deux nombres entiers ; elles sont entières aussi et les côtés des triangles sont des multiples du rayon du cercle inscrit. Prenant r pour unité on a

$$\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = 1$$

ou
$$(p-a)(p-b)(p-c) = p. \qquad (4)$$

Considérons les points α, β, γ où le cercle inscrit touche les côtés du triangle ABC et posons

$$A\beta = x,\ B\alpha = y\ C\gamma = z.$$

Nous aurons
$$p = x + y + z$$
$$a = y + z$$
$$b = x + z$$
$$c = x + y.$$

L'égalité (4) devient alors

$$xyz = x + y + z.$$

Si x, y, z sont entiers, a, b, c le sont également et par conséquent multiples de r. Mais l'égalité est satisfaite pour

$$x = 1,\ y = 2,\ z = 3.$$

Donc $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$, ou $a = 5r$, $b = 4r$, $c = 3r$.

Le triangle est dès lors rectangle, puisque $a^2 = b^2 + c^2$.

La forme du triangle est déterminée par les valeurs mêmes de ses côtés.

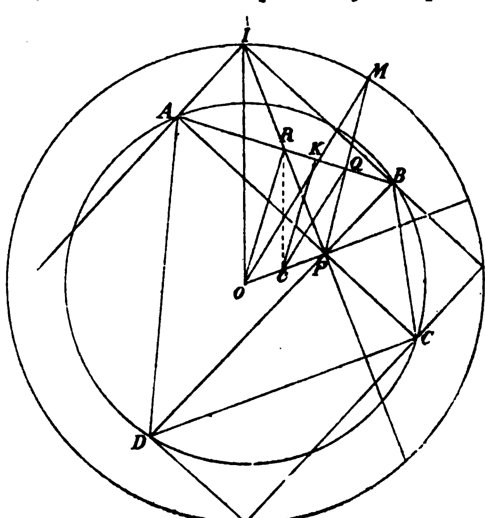
NOTA. — La même question a été résolue par MM. Gobert, au collège Chaptal; Bonnieux, à Riom; Henry, à Bréchaincourt.

QUESTION 303.

Solution par M. DELPIT, élève à l'École préparatoire Saint-Barbe.

On donne un cercle et un point fixe P *intérieur. On demande :*
1° Quel est le lieu des points symétriques du point P *par rapport aux quadrilatères inscrits* ABCD *dont les diagonales sont rectangulaires et passent par le point* P.

2° Quel est le lieu des sommets des quadrilatères obtenus en menant par les sommets des quadrilatères ABCD *des parallèles aux diagonales.*



1° Soit AB un des côtés du quadrilatère ABCD, et M le symétrique de P par rapport à ce côté. Soit R le

milieu de AB, K le pied de la perpendiculaire abaissée au milieu C de OP sur AB. .

Le triangle rectangle ORB donne $OR^2 + RB^2 = R^2$. R étant le rayon du cercle, remplaçons RB par RP, on a $OR^2 + RP^2 = R^2$. Il résulte de là que la médiane RC du triangle ORP est constante. Menons CQ. K étant le milieu de RQ, les obliques CR, CQ sont égales. Donc CQ est constante.

Or OM est le double de CQ; donc le lieu du point M est une circonférence concentrique à la circonférence donnée.

2° Par les points A et B menons des parallèles aux diagonales. Soit I leur point de rencontre.

Le quadrilatère AIRP est un rectangle. Donc la diagonale PI passe par le milieu R de AB et y est divisée en deux parties égales.

Si nous tirons OI, cette droite est le double de CR; or CR est constante et égale à CQ, donc OI est constante et égale à OM.

Donc l'ensemble des deux lieux se réduit à une circonférence ayant pour centre le centre du cercle donné et pour rayon $2\sqrt{R^2 - \frac{OP^2}{2}}$.

NOTA. — La même question a été résolue par M. Fiévet, de Lille.

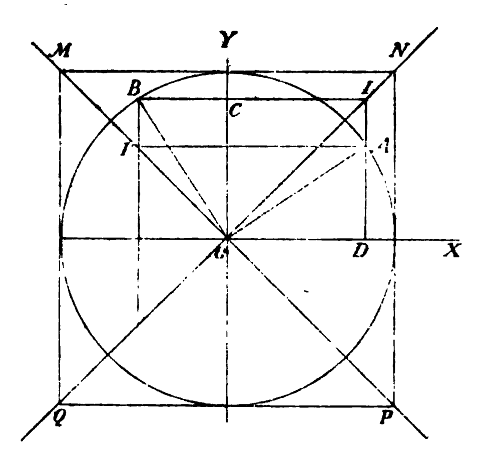
QUESTION 305

Solution par M. Aug. DAGUILLON, élève du Lycée Henri IV (classe de M. Macé de l'Épinay).

On donne un cercle O *et par le centre de ce cercle on mène deux rayons rectangulaires* OA *et* OB ; *par les extrémités de ces rayons on mène deux droites parallèles à deux directions fixes et rectangulaires. Ces deux droites se coupent en un point* I *dont on demande le lieu lorsque le système* AOB *tourne autour du point* O.

On peut toujours supposer que les deux directions rectangulaires données passent par le centre du cercle; soient

ox, *oy*, ces deux directions et AOB une position quelconque du système mobile. Soient C et D les intersections respectives des droites BI, AI avec l'axe auquel chacune d'elles n'est pas parallèle. Les angles BOC, AOD sont égaux comme ayant même complément COA; les triangles BOC, AOD qui ont en outre l'hypoténuse égale sont donc égaux et OC = OD.



Mais OC = DI et OD = CI ; donc ID = IC. Donc le lieu du point I est la bissectrice du premier angle des axes *xoy*.

Comme d'ailleurs rien n'indique celui des points A et B par lequel doit être menée la parallèle à chaque direction, une démonstration analogue ferait voir que le lieu du second point I′ correspondant à la position AOB du système mobile, est la bissectrice du second angle des axes.

On voit d'ailleurs facilement en faisant varier cette position, que le lieu se réduit à la partie de ces bissectrices contenue à l'intérieur du carré MNPQ circonscrit au cercle parallèlement aux directions données.

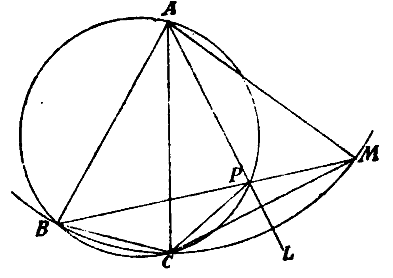
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Delaporte, Fiévet, de Lille ; Rivard, au Mans ; Joly, à Tarbes ; Callon, lycée Louis-le-Grand ; Dupuy, à Grenoble ; Bertin, école normale primaire à Vesoul ; Delpit, à Sainte-Barbe ; Prost, Perrier, à Lons-le-Saulnier ; Baudouin, à Beauvais ; La Chesnais, à Versailles.

QUESTION 306

Solution par M. Delpit, École préparatoire de Sainte-Barbe.

Par le sommet A *d'un triangle isoscèle on mène une sécante* AL *on prend le symétrique* M *du point* C *par rapport à la droite* AL *et on mène la droite* BM *qui coupe* AL *en* P. *Lieu du point* P.

Joignons AM, DC. M étant le symétrique de C par rapport à AL, AB = AC = AM. Le lieu de M est dès lors une circonférence décrite de A comme centre avec AB pour rayon.



Il suit de là que l'angle BMC est constant et a pour mesure $\frac{BC}{2}$; il est donc égal à la moitié de l'angle au centre ABC. Ce même angle est aussi égal à la moitié de $\overline{B}$PC; Donc $\overline{B}$PC = $\overline{B}$AC.

Par suite le quadrilatère BADC est inscriptible et le lieu du point P est la circonférence circonscrite au triangle BAC.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Baudoin à Beauvais; Callon, au lycée Louis-le-Grand; Delaporte, Fiévet à Lille; Bertin, école normale de Vesoul; Dupuy, à Grenoble; Perrier, Prost, à Lons-le-Saulnier; Lachesnais, à Versailles; Daguillon, Lapareillé, lycée Henri IV; van Aubel, à l Athénée de Liège; Gino Loria, à Mantoue; Joly, à Tarbes.

QUESTION 313.

Solution par M. Louis Rivard, élève au Lycée du Mans.

Si dans un triangle ABC, *les côtés* a *et* b *sont tels que l'on ait* $a = b\sqrt{2}$, *démontrer que : 1° la médiane du triangle qui part du sommet* A *coupe le côté* BC *sous un angle égal à l'angle* A *du triangle; 2° que* $\cos^2 A = \cos 2B$.

1° Par hypothèse on a $a = b\sqrt{2}$; d'où

$$\frac{a}{2} = \frac{b\sqrt{2}}{2} = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{b}{\frac{a}{2}} = \sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Ce qui montre que les deux triangles CDA et CBD qui ont l'angle commun C compris entre deux côtés proportionnels sont semblables. Par suite CDA = CAB.

2° De l'égalité $a = b\sqrt{2}$ on tire

$$\sin A = \sqrt{2} \sin B$$
$$\sin^2 A = 2 \sin^2 B$$
$$1 - \sin^2 A = 1 - 2 \sin^2 B$$
$$\cos^2 A = \cos 2B$$

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Bompard, collège Stanislas; Baudoin, à Beauvais; Delcambre, collège Chaptal; de Lagenardière, à Besançon; Witte, Lapareillé, lycée Henri IV; Bonniaud, Dulcy, Moreau, à Châteauroux; Boissière, Tinel, Hellot, lycée Corneille, à Rouen; Debray, à Chauvency-Saint-Hubert; Joly, Barthe, à Tarbes; Perrier, a Lons-le-Saulnier; Ménigault, Lerouge, à Paris; Hamon, au Mans; Fiévet, à Lille; Fournier, à Moulins; Gino Loria, à Mantoue; Henry, à Bréchaincourt.

QUESTION 314

Solution par M. VITTE, élève du Lycée Henri IV.

On considère un cercle de centre O *et deux diamètres rectangulaires* AB, CD. *Du point* A *comme centre avec* AC = AD *pour rayon, on décrit un cercle, et l'on prend un point* M *sur ce cercle. On mène les lignes* AM, BM *qui rencontrent le cercle* O *aux points* A' *et* B'; *on mène aussi le rayon* OI *qui passe par le point* M. *Démontrer que l'on a arc* CI = *arc* B'C + *arc* A'I.

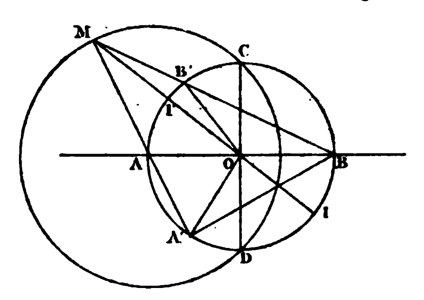
Il suffit de démontrer que COI = B'OC + A'OI ou en remplaçant ces angles par des valeurs équivalentes:

$$\pi - DOI = \pi + DOI - B'OA' = \pi + DOI - 2B'BA'$$

ou DOI = B'BA', c'est-à-dire, en écrivant que les compléments de ces angles sont égaux :

BOI = AOI' = AMB',

puisque l'angle MA'B, est droit.



Considérons les triangles MAB, MAO, ils donnent

$$MA^2 = 2R^2 = R \cdot 2R = AO \cdot AB$$

$$\frac{MA}{AO} = \frac{AB}{MA}.$$

Ces deux triangles sont donc semblables comme ayant un angle A égal compris entre côtés proportionnels, donc AOI' = AMB', C. Q. F. D.

La démonstration aurait été la même si on eût pris le point M à l'intérieur de la circonférence O.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Dulcy, à Châteauroux ; Bompard, au collège Stanislas.

QUESTION 316

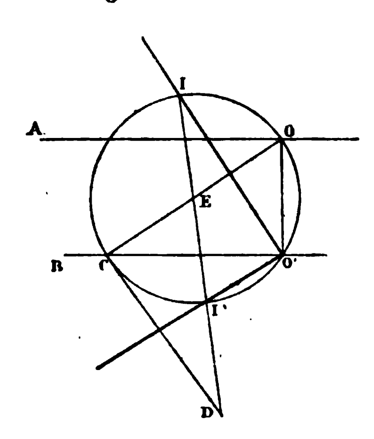
Solution par M. Rivard, élève au Lycée du Mans.

On donne deux parallèles A *et* B : *sur la première est un point fixe* O. *Soit* C *un point quelconque de* B *Sur* OC *comme diamètre décrivons une circonférence et menons en* C *la tangente* CD, *sur laquelle nous prenons* CD = CO. *Enfin joignons le point* D *au milieu* E *de* CO ; *cette droite rencontre le cercle en deux points* I *et* I' *dont on demande le lieu géométrique.*

(De Longchamps.)

Du point O abaissons la perpendiculaire OO' sur B. Le point O' appartient à la circonférence. Par suite les droites O'I, O'I' sont rectangulaires.

La ligne O'I fait avec la droite B un angle constant. En effet $IO'C = \frac{1}{2}CED$. **Or dans le triangle CED, on a** $C = 1dr$ **et** $\frac{CE}{CD} = \frac{1}{2}$, **ce qui prouve que tous les triangles rectangles CED sont semblables et par suite que CED est constant.**



Un calcul très simple montre que cet angle vaut 31° 47′ 3″, 13.

Le lieu des points I et I′ se compose donc des côtés de l'angle droit IO′I.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. H. Bourget, à Aix ; Delpit, Docteur, à l'école préparatoire Sainte-Barbe; Bompart, au collège Stanislas; Vitte, au lycée Henri IV ; Joly, à Tarbes.

QUESTION 322

Solution par M. Louis Rivard, élève au Lycée du Mans.

Trouver cinq nombres en progression arithmétique, connaissant leur somme et leur produit.

Soit y **la raison de cette progression,** x **le troisième terme; les cinq nombres cherchés sont :**

$$(x - 2y),\quad (x - y),\quad x,\quad (x + y),\quad (x + 2y).$$

La somme de ces nombres est $5x$, x **est donc connu, soit** $x = a$, **le produit des cinq nombres est**

$$(a - 2y)(a - y)\,a\,(a + y)(a + 2y) = m^5;$$

d'où

$$4ay^4 - 5a^3y^2 + a^5 - m^5 = 0.$$

La résolution et la discussion de cette équation rentrent dans la résolution de l'équation bicarrée.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Perrier, à Lons-le-Saulnier;

Boissière, Tinel, Hello, à Rouen; Joly, à Tarbes; Fievet, à Lille; Gino-Loria, à Mantoue; van Aubel, à Liège; Dupuy, à Grenoble; Bord, à Passy; Debray, à Chauvency-Saint-Hubert; Menigault, à Paris; Baudoin, à Beauvais; Vitte, Lepareillé, au lycée Henri IV; Bonnieux, à Riom; Blessel, Lerouge, à Paris.

QUESTION 323

Solution, par M. Alphonse JOLY, élève au Lycée de Tarbes.

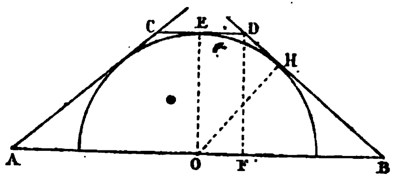
Trouver le minimum du volume d'un tronc de cône droit à bases parallèles circonscrit à un hémisphère.

Posons $ED = x$, $OB = y$, $OE = R$,

on a $$V\ .\ ABCD = \frac{1}{3}\pi R\,(x^2 + xy + y^2).$$

La question revient à trouver le minimum de $x^2 + xy + y^2\ (\alpha)$.

Menons OH et soit DF parallèle à EO. Les triangles rectangles DFB et OHB étant égaux, $DB = OB = y$. De plus on a



$$y^2 = R^2 + (x - y)^2 \text{ d'où } y = \frac{R^2 + x^2}{2x}.$$

Portant cette valeur dans l'expression (α), égalons à m, il vient : $$7x^4 - 2x^2(2m - 2R^2) + R^4 = 0,$$

d'où $$x^2 = \frac{2m - 2R^2 \pm \sqrt{4m^2 - 8mR^2 - 3R^4}}{7}.$$

Pour la réalité des racines on doit avoir

$$4m^2 - 8mR^2 - 3R^4 > 0, \qquad (1)$$

ou $$4(m - m')(m - m'') > 0,$$

ce qui exige que $m > m'$ $m < m''$;

on tire du trinôme (1) égalé à 0

$$m = \frac{R^2\left(2 \pm \sqrt{7}\right)}{2}.$$

Pour $m = m' = \dfrac{R^2\left(2 + \sqrt{7}\right)}{2}$ on a un minimum.

La valeur correspondante de x^2 est $\frac{R^2}{\sqrt{7}}$; par suite

$$x = \frac{R}{\sqrt[4]{7}} \text{ et } y = \frac{R(1+\sqrt{7})}{2\sqrt[4]{7}},$$ valeurs que l'on construit facilement.

Le volume minimum est $\frac{\pi R^3 (2+\sqrt{7})}{6}$.

Il n'y a pas lieu de considérer le maximum, que l'on trouverait d'ailleurs négatif.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Baudoin, à Beauvais; Prost, Perrier, à Lons-le-Saulnier; Rivard, au Mans; Tinel, Hello, Boissière, à Rouen; Menigault, à Paris.

QUESTION 324

Solution par M. ED. VAN AUBEL, élève à l'Athénée de Liège.

Construire géométriquement un triangle ABC *connaissant un côté* a, *le périmètre* 2p *et la surface* S.

Étant donnés le périmètre et la surface, on aura le rayon du cercle inscrit par la relation $S = pr$.

Cela posé, soient I le centre du cercle inscrit et I′ le centre du cercle exinscrit opposé à A.

On peut construire le triangle rectangle AMI, dont on connaît les deux côtés de l'angle droit

$$AM = p - a, \ MI = \frac{Sr}{p}.$$

On décrira ensuite le cercle I et on mènera la tangente AC.

De plus, si l'on remarque que $AQ = AT = p$, il sera facile de construire le cercle I′.

Il ne reste plus alors qu'à mener la tangente commune BC aux deux cercles I et I′.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. H. Bourget, à Aix; Bonnieux, à Riom; Dulcy, à Châteauroux; Rivard, Provost, au Mans; Prost, Perrier, à

Lons-le-Saulnier; Boissière, Tinal, à Rouen; Baudoin, à Beauvais; Tailhac, Joly, à Tarbes; Lapareillé, au lycée Henri IV; Dupuy, à Grenoble; Gino-Loria, à Mantoue; Debray, à Chauvency-Saint-Hubert; Blessel, à Paris; Lefèvre, à Senlis; Fiévet, à Lille; Henry, à Bréchaincourt.

NOTE D'ALGÈBRE

Par M. **Ch. Pravaz**, professeur au Collège d'Autun.

Comme application de sa théorie sur la recherche des facteurs commensurables d'ordre quelconque d'une équation algébrique et entière, M. de Longchamps a déterminé (t. IV, p. 73) les conditions de divisibilité d'un polynôme entier de degré m,

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_n x^{m-n} + \ldots + A_m \qquad (1)$$

par le trinôme du second degré

$$x^2 - px - q \qquad (2)$$

Ces conditions peuvent facilement être obtenues par un moyen direct.

Effectivement, pour que le polynôme (1) soit divisible par le trinôme (2), il faut et il suffit que l'on puisse trouver un polynôme entier de degré $m - 2$,

$$B_0 x^{m-2} + B_1 x^{m-3} + \ldots + B_{n-2} x^{m-n} + B_{n-1} x^{m-n-1} + B_n x^{m-n-2} + \ldots + B_{n-2} \qquad (3)$$

tel que le produit de ce dernier polynôme par le trinôme (2) soit identique au polynôme (1).

En écrivant que le coefficient du terme de chaque degré dans le produit des expressions (3) et (2) est égal au coefficient du terme de même degré dans le polynôme (1), on a, pour déterminer les $m - 1$ coefficients du polynôme (3), les $m + 1$ équations

$$\left.\begin{array}{r} A_0 - B_0 = 0 \\ A_1 + pB_0 - B_1 = 0 \\ A_2 + qB_0 + pB_1 - B_2 = 0 \\ A_3 + qB_1 + pB_2 - B_3 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{m-2} + qB_{m-4} + pB_{m-3} - B_{m-2} = 0 \\ A_{m-1} + qB_{m-3} + pB_{m-2} = 0 \\ A_m + B_{m-2} = 0 \end{array}\right\} (A)$$

Donc pour que la division proposée soit possible, il faut et il suffit que les équations (A) soient compatibles, c'est-à-dire que l'on ait

$$\begin{vmatrix} A_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & p & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & q & p & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_3 & 0 & 9 & p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & & . & . & . \\ . & . & . & . & & . & . & . \\ . & . & . & . & & . & . & . \\ A_{m-3} & 0 & 0 & . & \dots & p & -1 & 0 \\ A_{m-2} & 0 & 0 & & & 9 & p & -1 \\ A_{m-1} & 0 & 0 & & & 0 & 9 & p \end{vmatrix} = 0, \qquad (D_1)$$

et

$$(D_2) \quad \begin{vmatrix} A_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & p & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & q & p & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & 0 & q & p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & & . & . & . \\ . & . & . & . & & . & . & . \\ . & . & . & . & & . & . & . \\ A_{m-3} & 0 & 0 & 0 & \dots & p & -1 & 0 \\ A_{m-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & q & p & -1 \\ \frac{A_m}{q} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Désignons par Δ_{m-1} le déterminant obtenu en supprimant dans (D_1) la première ligne et la première colonne, et généralement par Δ_K le déterminant que l'on obtient par la suppression dans Δ_{K+1} de la première ligne et de la première colonne; de sorte que Δ_K est un déterminant à K^2 éléments et de la forme

$$\begin{vmatrix} p & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ q & q & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & q & p & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & & . & . \\ . & . & . & & . & . \\ . & . & . & & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p & -1 \\ 0 & 0 & 0 & & q & q \end{vmatrix}$$

Au moyen de cette notation, les équations (D_1) et (D_2) prennent la forme

$$A_0\ \Delta_{m-1} + A_1\ \Delta_{m-2} + \dots + A_{m-4}\ \Delta_2 + A_{m-2}\ \Delta_1 + A_{m-1} = 0$$

$$A_0\ \Delta_{m-2} + A_1\ \Delta_{m-3} + \dots + A_{m-3}\ \Delta_1 + A_{m-2}\ \Delta_1 + \frac{A_m}{q} = 0$$

en posant, pour conserver la symétrie, $\Delta o = 1$.

Calcul des déterminants Δ. — On a évidemment

$$\Delta_K = p\Delta_{K-1} + q\Delta_{K-2}$$

et si dans cette formule on remplace K successivement par 2, 3, 4, 5, 6 et que l'on remarque que

$$\Lambda o = 1, \quad \Delta_1 = p$$

on aura, en désignant par C_n^m le nombre des combinaisons de *m* objets pris *n* à *n*,

$$\Delta_2 = p^2 + q \qquad = p^2 + C_1^1 q$$
$$\Delta_3 = p^3 + 2pq \qquad = p^3 + C_1^2 pq$$
$$\Delta_4 = p^4 + 3p^2q + q^2 \qquad = d^4 + C_1^3 p^2q + C_2^2 pq^2$$
$$\Delta_5 = p^5 + 4p^3q + 3pq^2 \qquad = p^5 + C_1^4 p^3q + C_2^3 pq^2$$
$$\Delta_6 = p^6 + 5p^4q + 6p^2q^2 + q^3 = p^6 + 6_1^5\ p_9^4 + C_2^4 p^2q^2 + C_3^3 q^3$$

On a donc, par induction,

$$(\Delta)\ \Delta_k = p^k + C_1^{k-1}\ p^{k-2}\ q + C_2^{k-2}\ p^{k-4}\ q + \dots + C_n^{k-n}\ p^{k-2n}\ q^n + \dots$$

Pour vérifier cette formule, nous la supposerons vraie lorsque l'indice du premier membre a l'une quelconque des valeurs 2, 3, 4, ... *k*, et nous démontrerons qu'elle est encore vraie lorsque cet indice a la valeur $k + 1$.

On a, en effet, $\Delta_{k+1} = p\Delta_k + q\Delta_{k-1}$

ou

$$\Delta_{k-1} = p\left[p^k + C_1^{k-1}\ p^{k-2}\ q + C_2^{k-2}\ p^{k-4}\ q^2 + \dots + C_n^{k-n}\ p^{k-2n}\ q^n + \dots\right]$$
$$+ q\left[p^{k-1} + C_1^{k-2}\ p^{k-3}\ q + C_2^{k-3}\ p^{k-5}\ q^2 + \dots + C_{n-1}^{k-n}\ p^{k-2n+1}\ q^{n-1} + \dots\right]$$

ou encore

$$\Delta_{k+1}=p^{k+1}+\left(C_{1+1}^{k-1}\right)p^{k-1}q+\left[C_2^{k-2}+C_1^{k-2}\right]p^{k-3}q^2$$
$$+\ldots+\left(C_n^{k-3}+C_{n-1}^{k-n}\right)p^{k+1-2n}.\,q^n+\ldots$$

et, généralement

$$C_n^{k-n}+C_{n-1}^{k-n}=C_n^{k+1-n};$$

on a donc la formule

$$\Delta_{k+1}=p^{k+1}+C_1^k\,p^{k-1}\,q+C_2^{k-1}\,p^{k-3}\,q^2+\ldots$$
$$+C_n^{k+1-n}\,p^{k+1-2n}\,q^n+\ldots.$$

qui se déduit bien de la formule (Δ) par le changement de k en $k+1$.

ÉTUDE SUR LES COORDONNÉES TANGENTIELLES
ET LEURS APPLICATIONS

Par M. E. J. Boquel.

(*Suite;* voir page 319.)

Équations en coordonnées tangentielles des coniques qui satisfont à des conditions spéciales. — Comme nous l'avons déjà dit, on représente souvent, en coordonnées tangentielles, une fonction linéaire des coordonnées u et v ou des coordonnées homogènes u, v et w, par une seule lettre M, par exemple, de sorte que M = o, dans cette notation symbolique, est l'équation d'un point. Ce mode d'écriture est analogue à l'emploi des coordonnées trilinéaires X, Y, Z; on donne quelquefois aux coordonnées tangentielles, ainsi entendues, le nom de *coordonnées trilatères.*

— *Équation générale des coniques tangentes aux tangentes communes des deux coniques* f (u, v) = o et φ (u, v) = o. — Nous avons déjà démontré plus haut que les coniques qui touchent les tangentes communes aux deux coniques $f(u, v) = 0$ et $\varphi(u, v) = 0$ sont comprises dans l'équation générale $(u, v) + \lambda\varphi(u, v) = 0$.

— *Équation générale des coniques qui touchent les tangentes menées à la conique* f (u, v) = o *par les points* M = o *et* N = o. — Cette équation peut se déduire de la précédente en supposant que la conique φ (u, v) = o se réduit à un système de deux points. Les tangentes communes à la conique $f(u, v)$ = o et à un système de deux points sont évidemment les tangentes menées à la conique f = o par les deux points. L'équation générale est donc $f(u, v) + \lambda MN = o$.

Ce fait résulte d'ailleurs directement d'une démonstration analogue à celle qui a été donnée pour $f + \lambda\varphi = o$.

— *Équation générale des coniques doublement tangentes à une conique donnée* f = o *aux points de contact des tangentes menées à* f = o *d'un point* M = o. — C'est la conséquence de l'équation précédente en y supposant les points M = o et N = o confondus. Les tangentes menées de ces points à la conique f = o se confondent et l'équation générale prend la forme

$$f(u, v) + \lambda M^2 = o.$$

On reconnaît d'ailleurs le fait directement, en observant: 1° que l'équation $f(u, v) + \lambda M^2 = o$ est vérifiée par les valeurs de u et v qui annulent à la fois $f(u, v)$ et M, c'est-à-dire pour les coordonnées des tangentes menées du point M = o à la conique $f(u, v) = o$; 2° que le point de contact d'une tangente quelconque ayant pour équation (en coordonnées homogènes),

$$U(f'_u + 2\lambda MM'_u) + V(f'_v + 2\lambda MM'_v) + W(f'_w + 2\lambda MM'_w) = o$$

cette équation se réduit, pour une tangente issue de M = o, à

$$Uf'_u + Vf'_v + Wf'_w = o,$$

c'est-à-dire au point de contact de cette tangente sur la courbe f = o; 3° que l'équation est générale, puisqu'on peut y déterminer λ en imposant une cinquième condition à la conique $f(u, v) + \lambda M^2 = o$.

— *Équation générale des coniques tangentes aux quatre côtés d'un quadrilatère.* —Si les équations f=o et φ= o représentent chacune un système de deux points, l'équation $f + \lambda\varphi = o$ prend la forme

$$MN + \lambda PQ = o$$

qui représente les coniques tangentes aux tangentes communes des deux courbes MN = o et PQ = o. Or ces tangentes

ne peuvent être que les quatre côtés du quadrilatère dont les sommets *opposés* ont pour équations $M = o$, $N = o$ d'une part, et $P = o$, $Q = o$ d'autre part.

Le théorème se démontre d'ailleurs directement par un raisonnement identique à celui du cas précédent.

— *Équation générale des coniques touchant deux droites données en deux points donnés.* — Si dans l'équation $f(u, v) + \lambda M^2 = o$ on suppose que $f(u, v)$ se réduit à un système de deux points $PQ = o$, ou si dans l'équation $\lambda MN + PQ = o$ on suppose $M = o$ et $N = o$ confondus, l'équation prend la forme $PQ + \lambda M^2 = o$, qui représente les coniques touchant aux points $P = o$, $Q = o$, deux droites issues d'un point $M = o$.

Ce théorème se démontre d'ailleurs, comme les précédents, par un raisonnement direct absolument semblable à ceux dont nous avons déjà donné un exemple.

— *Équation générale des coniques inscrites dans un triangle.* — Si $P = o$, $Q = o$, $R = o$ sont les trois sommets du triangle, l'équation cherchée sera

$$\lambda PQ + \mu QR + \nu RP = o.$$

Car elle est vérifiée par les coordonnées des tangentes qui passent en $P = o$ et $Q = o$, ainsi que par celles des tangentes qui passent en $Q = o$ et $R = o$, et enfin par celles des tangentes qui passent en $R = o$ et $P = o$, c'est-à-dire par les coordonnées des trois côtés du triangle considéré.

L'équation est d'ailleurs générale; car on peut disposer des paramètres $\frac{\lambda}{\nu}$ et $\frac{\mu}{\nu}$ de manière à assujettir la conique dont il s'agit à avoir encore deux autres tangentes données, et comme on ne peut mener qu'une conique tangente à cinq droites, la courbe sera complètement déterminée.

Si l'une des fonctions se réduit à une constante, l'un des sommets du triangle est à l'origine des coordonnées.

— *Équation générale des coniques circonscrites à un triangle.* — Cette équation est $\lambda^2 P^2 + \mu^2 Q^2 + \nu^2 R^2 - 2\lambda\mu PQ - 2\mu\nu QR - 2\nu\lambda RP = o$. Il est facile de voir, en effet, que si l'on

fait dans cette équation $P = 0$, par exemple, on obtient le carré parfait $(\mu Q - \nu R)^2 = 0$; or faire $P = 0$, c'est chercher les coordonnées des tangentes qui passent par ce point $P = 0$; les deux tangentes sont donc confondues, ce qui veut dire que le point est sur la courbe.

L'équation est d'ailleurs générale ; car elle contient encore deux paramètres disponibles.

— *Équation générale des coniques circonscrites à un quadrilatère.* — Le calcul se fait exactement de la même manière qu'en coordonnées cartésiennes, pour les coniques inscrites dans un quadrilatère.

Si l'on représente par $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, les équations des points de rencontre des diagonales et des côtés opposés du quadrilatère supposées de la forme

$$M = au + a'v - 1 = 0$$
$$N = bu + b'v - 1 = 0$$
$$P = cu + c'v - 1 = 0$$

l'équation générale cherchée est de la forme

$$\frac{p^2N^2}{\lambda} + \frac{q^2P^2}{1-\lambda} - M^2 = 0,$$

p et q étant des constantes données, et λ un paramètre arbitraire.

Le théorème peut d'ailleurs être vérifié directement, tout à fait comme en coordonnées cartésiennes.

— *Équation générale des coniques doublement tangentes à deux coniques données.* — Si l'on prend une des racines de l'équation en λ relative aux deux coniques $f = 0$ et $\varphi = 0$, on aura identiquement $f - \lambda\varphi = PQ$,

P et Q étant deux des points ombilicaux des deux coniques f et φ. L'équation générale cherchée est alors

$$\mu^2P^2 + 2\mu(f + \lambda\varphi) + QQ^2 = 0.$$

Car les tangentes communes à cette conique et à $f = 0$ sont données par le système des deux équations $f = 0$ et $\mu^2P^2 + 2\mu\lambda\varphi + Q^2 = 0$, ou $f = 0$ avec $\mu^2P^2 - 2\mu PQ + Q^2 = 0$, c'est-à-dire $f = 0$ avec $(\mu P - Q)^2 = 0$; ces tangentes coïncident donc deux à deux ; c'est-à-dire que la conique considérée est doublement tangente à $f = 0$.

On peut remarquer en outre que les tangentes communes passant au point $\mu P - Q = o$, ce point est le pôle de la droite de contact.

La conique $\varphi = o$ est de même doublement tangente à la conique proposée, $\mu P + Q = o$ étant le pôle de sa corde de contact.

D'où il résulte que *les pôles des deux droites de contact et les points ombilicaux* $P = o$ *et* $Q = o$ *sont conjugués harmoniques.* — L'équation est d'ailleurs générale, puisqu'elle renferme encore un paramètre arbitraire, μ, disponible.

— *Équation générale des coniques conjuguées par rapport à un triangle.* — Si $M = o$, $N = o$, $P = o$ sont les trois sommets du triangle, l'équation cherchée est

$$\lambda M^2 + \mu N^2 + \nu P^2 = o.$$

En effet, l'équation du pôle d'une droite (u, v) étant

$$Uf'_u + Vf'_v + Wf'_w = o,$$

cette équation sera, dans le cas actuel,

$$U(\lambda MM'_u + \mu NN'_u + \nu PP'_u) + V(\lambda MM'_v + \mu NN'_v + \nu PP'_v) + W(\lambda MM'_w + \mu NN'_w + \nu PP'_w) = o.$$

S'il s'agit du côté qui passe par les sommets ($M = o$, $N = o$), c'est-à-dire du côté opposé au sommet $P = o$, l'équation du pôle se réduit à

$$P(UP'_u + VP'_v + WP'_w) = o$$

et comme l'expression $UP'_u + VP'_v + WP'_w$ n'est pas nulle, cette équation n'est autre que $P = o$.

Le pôle de chaque côté du triangle est donc le sommet opposé; C. Q. F. D.

— *Équation générale des coniques homofocales.* — L'équation générale des coniques à centre qui sont homofocales est en coordonnées cartésiennes

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} - 1 = o.$$

Prenons la forme adjointe du premier membre de l'équation $\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} - z^2 = o$ pour les variables u, v, w; nous aurons d'après la formation connue de la forme adjointe,

$$F = -\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2-\lambda} & 0 & 0 & u \\ 0 & \frac{1}{b^2-\lambda} & 0 & v \\ 0 & 0 & -1 & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire $F = u^2(a^2-\lambda) + v^2(b^2-\lambda) - w^2$;
d'où en faisant $w^2 = 1$, l'équation générale des coniques homofocales à la conique $a^2u^2 + b^2v^2 = 1$ sera

$$a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = \lambda(u^2+v^2).$$

On trouve de même pour les paraboles homofocales

$$2u + \lambda(u^2+v^2) = 0.$$

Si maintenant on observe que l'équation

$$a^2u^2 + b^2v^2 - 1 - \lambda(u^2+v^2);$$

est de la forme $f - \lambda\varphi = 0$, et que l'on écrive u^2+v^2 sous la forme $(u + v\sqrt{-1})\,(u - v\sqrt{-1})$, cette équation prend la forme $f(u, v) + MN = 0$, ce qui montre que les coniques considérées touchent les tangentes menées à $f = 0$ par les points circulaires de l'infini.

La propriété réciproque étant évidente, toujours en vertu de la même forme d'équation, l'équation générale des courbes homofocales à une conique $f = 0$ est $f(u, v) + \lambda(u^2+v^2) = 0$ et si $f = 0$ se réduit à un système de deux points, on aura l'équation $PQ + \lambda(u^2+v^2) = 0$, qui représentera les coniques ayant pour foyers deux points donnés. *(A suivre.)*

CHOIX DE QUESTIONS

PROPOSÉES AUX EXAMENS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1880

Géométrie analytique à deux dimensions.

Etant donnée une parabole, on prend le milieu de la portion comprise sur l'axe entre le pied de la normale et le pied de la tangente; par ce point on mène à l'axe une perpendiculaire qui renconte la tangente en un point M; on demande le lieu de ce point pour toutes les tangentes de la courbe.

— Construire la courbe $\rho = \dfrac{\cos\frac{\omega}{3}}{\sin\omega}$.

— Lieu des sommets des paraboles qui coupent deux axes rectangulaires, l'un en un point donné et en un point variable, l'autre en deux points donnés.

— Construire la courbe $\rho = \frac{1 - 3 \sin \omega}{1 - 2 \sin \omega}$. — Position des asymptotes par rapport à leur branche de courbe.

— Soit la courbe $y^2 = x^3$; on demande l'équation qui admet pour racines les coefficients angulaires des tangentes menées à la courbe aux points où elle est coupée par une droite $y = mx + n$.

— Sécantes communes aux deux courbes

$$\begin{cases} 4xy + 2y^2 - 6x - 12y + 12 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

Quelle relation remarquable entre ces deux courbes l'équation en λ met-elle en évidence?

— Construction de la courbe représentée par l'équation

$$\rho^2 \cos^2 \omega + 2\rho \cos^2 \omega + \sin^2 \omega = 0,$$

L'origine est un point remarquable; étudier en particulier ce point. — Quelles sont les tangentes aux points situés sur les rayons vecteurs $\omega = \frac{\pi}{4}$ et $\omega = \frac{3\pi}{4}$?

— Trouver les tangentes horizontales et les points d'inflexion de la courbe

$$y^2 = x^3 \pm \sqrt{1 - x^4},$$

— On demande de construire la courbe ayant pour équation

$$x^3 + y^3 - 3x - 6y + 7 = 0.$$

(Remarquer pour cela que le point $x = 1$, $y = 1$ est sur la courbe.)

— Construire la courbe dont l'équation est

$$\rho^2 \cos^3 \omega - 2\rho \cos \omega \, 2 \sin \quad \omega = 0.$$

Géométrie à trois dimensions.

Soient $y^2 - 2px = 0$ l'équation d'un cylindre parabolique, et $Ax + By + Cz + D = 0$ l'équation d'un plan; on demande de calculer les coordonnées du sommet de la parabole suivant laquelle le plan coupe la courbe.

— Trouver le lieu des centres des sphères d'un rayon donné qui coupent le paraboloïde elliptique suivant des cercles.

— Rechercher les plans qui coupent l'hyperboloïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, suivant des hyperboles équilatères.

— Étant données les deux hyperboles équilatères ($y = 0$, $x^2 - z^2 = a^2$) ($x = 0$, $y^2 - z^2 = b^2$), on considère une droite parallèle au plan des xy et assujettie à s'appuyer constamment sur ces deux hyperboles; on demande l'équation de la surface qu'elle engendre.

— Soient deux droites ($y = 0$, $z = h$), ($x = 0$, $z = h'$), l'une dans le plan des xz et parallèle à Ox, l'autre dans le plan des yz et parallèle à Oy; on considère en outre un cercle dans le plan bissecteur $x = y$ des plans xOz et yOz, assujetti de plus à couper l'axe des z aux mêmes points que les deux droites données. On demande l'équation de la surface engendrée par une droite qui se meut en s'appuyant à la fois sur le cercle et sur les deux droites.

— On considère dans le plan xOy l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; en un point quelconque M de cette courbe on mène la normale, jusqu'à sa rencontre en P

avec l'axe focal, et on prend la longueur de la portion MP de normale ainsi déterminée. On élève par le pied P de la normale, dans le plan xoz, une perpendiculaire à Ox, sur laquelle on prend une longueur PM' égale à MP; puis on joint M'M. On demande l'équation de la surface engendrée par la ligne MM' quand le point M parcourt l'ellipse donnée. — Intersections de cette surface avec les plans xOz et yOz.

— Soit le paraboloïde de révolution $x^2 + x^2 = 2pz$; on considère le cercle $\left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{array} \right.$; trouver la surface engendrée par une droite qui se meut en s'appuyant constamment sur le cercle donné sur l'axe des z et en restant tangente au paraboloïde. — Nature et propriétés de cette surface.

— Étant donnée dans le plan des xy la courbe $f(x, y) = 0$, on demande le lieu engendré par une parabole assujettie à rester tangente à l'axe des z en un point fixe, et à toucher le plan des xy en un point de la courbe $f(x, y) = 0$. On demande aussi de construire une génératrice quelconque de la surface.

— Étant donnée la surface ayant pour équation

$$x(x + y + z) + 2(y + z - 1) = 0,$$

on demande le lieu des centres des sections faites dans cette surface par des plans parallèles au plan $x = my + nz$. — Qu'arrive-t-il pour $m = n$?

— f_4, f_3, f_2, f_1, f_0, étant des fonctions homogènes à trois variables chacune d'un degré marqué par son indice, on considère la surface ayant pour équation $f_4 + f_3 + f_2 + f_1 + f_0 = 0$, et on mène des transversales par l'origine. Ces droites coupent la surface en quatre points A, B, C, D. On demande de mener ces transversales de manière que le milieu de la distance BC coïncide avec le milieu de la distance AD, et de trouver la surface engendrée par ces droites. L'équation étant trouvée, on demande les relations de la surface qu'elle représente avec les deux cônes $f_4 = 0$ et $f_3 = 0$.

— Soit le cylindre elliptique $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; on considère la section par le plan $z = mx + ny$, et en chaque point de cette section on mène la normale à la surface; cette normale rencontre la surface du cylindre en un autre point dont on demande le lieu pour tous les points de la section.

Algèbre.

Soit $f(x)$ un polynôme entier et rationnel en x; on demande de trouver le reste de la division de $f(x)$ par le produit $(x - a)(x - b)(x - c)$ sans effectuer l'opération. Le reste étant de la forme $Ax^2 + Bx + C$, déterminer A, B, C : 1° dans le cas général; 2° dans le cas où $a = b$; 3° dans le cas où $a = b = c$.

— Établir que si $f(u, v)$ est une fonction dans laquelle u et v entrent symétriquement, et que cette fonction s'annule pour $u = v$, $f(u, v)$ est divisible par $(u - v)^2$. — En conclure l'identité

$$\frac{\varphi(a)}{f'(a)} + \frac{\varphi(b)}{f'(b)} + \ldots + \frac{\varphi(l)}{f'(l)} = 0,$$

$f(x)$ étant un polynôme du degré m, et $\varphi(x)$ un polynôme au plus du degré $m - 2$; $a, b, c \ldots l$ étant d'ailleurs les m racines de l'équation $f(x) = 0$.

— Pour quelles valeurs de α et de x la série

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{x^{2\alpha}} + \ldots + \frac{1}{x^{n\alpha}} + \ldots$$

est-elle convergente ?

— Étant données les deux équations simultanées
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad xy + z^2 = b^2,$$
calculer les dérivées des deux fonctions x et y par rapport à la variable z considérée comme indépendante.

— Soit l'équation $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + Ax + B = 0$, on demande de déterminer A et B de manière que α, β, γ, δ étant ses racines, on ait entre elles les deux relations $\alpha = 2\beta$ et $\gamma = 3\delta$.

— Rechercher si la série
$$1 + \frac{1}{2(L2)^m} + \frac{1}{3(L3)} + \dots + \frac{1}{p(Lp)^m} + \dots$$
est convergente ou divergente.

— Trouver le nombre des racines réelles de l'équation
$$x^7 - 3x^6 + 5x^4 - 2x^2 + 27 = 0$$
au moyen des divers théorèmes connus.

— Résoudre l'équation $x^3 - 6x + 7\sqrt{-1} = 0$.

— Séparer les racines de l'équation $x^3 - 10x + 1 = 0$, et calculer leurs valeurs à moins de 0,001 par la méthode de Newton.

— Étudier la série $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$

— Construire la courbe $y = a - Lx$, et rechercher quand l'équation $a^x - Lx = 0$ a des racines réelles.

— Déterminer a et b dans l'équation
$$x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + 8x - 3 = 0$$
de manière que cette équation admette une racine triple.

Quelle est la limite de $\sqrt[x]{1 + \sin x}$ pour $x = 0$?

— Étant donnée l'équation $f(x) = 0$, on demande de former l'équation qui admet pour racines les produits de la forme $y = a^2b$, a et b étant deux racines quelconques, mais *différentes*, de l'équation $f(x) = 0$. — Quel est *à priori* le degré de l'équation obtenue? — Appliquer à $x^3 + px + q = 0$.

— Séparer les racines de l'équation $3x^5 - 25x^3 + 60x + \lambda = 0$. Quelles sont les valeurs de λ pour lesquelles l'équation est susceptible du plus grand nombre de racines réelles?

— Déterminer a et b dans l'équation $x^4 + 4x^3 - 6x^2 + ax + b = 0$ de manière que x_1 et x_2 étant deux racines de cette équation, on ait entre elles la relation $x_1 + x_2 = x_1x_2 = m$.

— $f(x) = 0$ étant une équation de degré m, on considère ses racines comme les tangentes de certains arcs, et on demande de former les équations admettant pour racines: 1° les tangentes des sommes deux à deux de ces arcs; 2° les tangentes des doubles de ces axes.

— $f(x, y) = 0$ et $\varphi(x, y) = 0$ étant les équations de deux courbes de degrés m et n, on demande de former l'équation qui admet pour racines les carrés des distances à l'origine des axes des points d'intersection des deux courbes. — Quel sera le degré de cette équation, et dans quel cas s'abaissera-t-il?

— Séparer les racines de l'équation $2x - 3x = 0$.

— Séparer les racines de l'équation $eLx + \frac{1}{2}x^2 - (1 + e)x = 0$.

— Appliquer les règles connues à la recherche d'une limite supérieure des racines positives de l'équation $x^8 + x^7 + x^6 + 10x^5 - 100x^4 + 1 = 0$. Quelle est la plus avantageuse?

— Trouver un arc dont la longueur soit égale à celle de sa corde augmentée de la flèche du segment correspondant à cet arc.

Géométrie descriptive.

Déterminer, dans la section plane d'une surface de révolution, les points le plus haut et le plus bas, et le point où la tangente est perpendiculaire à la ligne de terre.

— Etant donné le rabattement d'une courbe située dans un plan défini par ses traces, on fait tourner cette courbe autour d'un axe vertical. Trouver les projections verticales des points de la surface ainsi engendrée, qui correspondent à une projection horizontale donnée.

— On donne les traces d'un plan. Dans ce plan se trouve une courbe donnée par sa projection horizontale. Cette courbe est la directrice d'un cône dont on donne les projections du sommet. Mener au cône un plan tangent perpendiculaire au plan donné.

— Etant données 4 droites OA, OB, OC, OD, partant du même point, on mène la bissectrice OE, de l'angle AOB, et la bissectrice OF, de l'angle COD; OE et OF sont les axes de deux cônes de révolution engendré par les droites OA et OC, tournant autour de OE et de OF; on demande les traces horizontales des plans tangents communs à ces deux cônes.

— Etant donnée une droite parallèle au plan vertical, une ellipse tourne autour de cette droite; on demande le contour apparent sur le plan horizontal de la surface ainsi engendrée.

— On donne un triangle ABC situé dans le plan horizontal et un cercle situé à l'intérieur de ce triangle; ce cercle en tournant autour de AB engendre un tore; on demande l'intersection de ce tore par un plan conduit suivant BC, et incliné à 30° sur le plan du triangle. (Cet angle est supposé fait par le plan sécant avec la partie du plan horizontal à l'intérieur du triangle.)

— Un cône de révolution a pour axe une droite de front; une sphère ayant son centre dans le plan de front qui contient l'axe, coupe ce cône suivant une courbe dont la projection verticale est une parabole; on demande de trouver le sommet de cette parabole.

— Construire l'intersection d'un hyperboloïde de révolution dont l'axe est vertical avec un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la génératrice principale de l'hyperboloïde, et dont la directrice est une courbe quelconque donnée dans le plan horizontal. — Tangente en un point de cette intersection.

— On donne une sphère dont le centre est dans le plan horizontal, et une droite *Ab* dont la trace horizontale est en A, et qui est inclinée de 45° sur le plan horizontal. Mener à la sphère les plans tangents par cette droite. *(Question à résoudre sans employer de plan vertical de projection.)*

— On donne une droite par les projections horizontales et les côtés de deux de ses points. On prend un point C dans le plan horizontal. Distance du point C à la droite donnée. *(Pas de plan vertical de projection.)*

— On donne la projection horizontale d'un triangle et les côtés de ses sommets; mener par le sommet A, dans le plan du triangle, une droite qui fasse avec le plan horizontal un angle donné. *(Pas de plan vertical de projection.)*

— Soit un triangle ABC, et AI la bissectrice de l'angle A. — AC engendre un cône en tournant autour de AI; on demande l'intersection de ce cône avec un plan mené par AB et faisant avec le plan horizontal un angle de 30°. *(Pas de plan vertical de projection.)*

— Etant donnés deux points sur la ligne de terre, un troisième point dans le plan vertical, et un quatrième dans le plan horizontal, construire le centre de la sphère qui passe par ces quatre points.

— Comment se coupent deux cônes de révolution dont les axes sont verticaux, et dont les sommets sont à la même distance des deux plans de projection?

— Construire la courbe de contact d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à une direction donnée avec un paraboloïde de révolution auquel il est circonscrit.

Point le plus bas de cette courbe.

— Une ellipse tourne autour de son grand axe, lequel est perpendiculaire au plan horizontal. Dans le méridien principal de la surface, on trace une ellipse concentrique à la première, et on la fait tourner autour de son petit axe. Construire l'intersection des deux surfaces ainsi engendrées. Point le plus haut et point le plus bas de la courbe.

— Une courbe donnée par ses projections tourne autour d'un axe vertical. Construire la méridienne principale de la surface ainsi engendrée.

Cas particulier où la courbe donnée est plane, et définie par les traces de son plan et sa projection horizontale.

Cas d'une ellipse située dans un plan perpendiculaire au plan vertical, et dont la projection horizontale est une ellipse dont le grand axe passe par le pied de l'axe sur le plan horizontal.

— Intersection d'un cylindre défini par la directrice dans le plan horizontal et la direction de ses génératrices, avec un paraboloïde de révolution à axe vertical.

A ce sujet, voir comment se projette sur le plan horizontal la section faite dans un paraboloïde de révolution à axe vertical par un plan perpendiculaire au plan vertical.

— Construire le point le plus haut de l'intersection de deux cônes à bases circulaires.

— Construire l'angle d'un plan perpendiculaire au plan vertical avec un plan parallèle à la ligne de terre.

— On donne une ellipse E et deux droites L et L'. On demande de construire un point de l'intersection de deux surfaces du second ordre ayant l'ellipse E commune, et passant l'une par la droite L, l'autre par la droite L'.

— Etant donnée la base ABC d'un tétraèdre dans le plan horizontal, et la projection horizontale ainsi que la cote de son sommet, construire l'angle dièdre SA. *(Pas de plan vertical de projection.)*

— Etant donnés un plan par ses traces, et une droite dans le plan horizontal, mener par cette droite un plan faisant avec le plan donné un angle de 60 degrés.

— Etant donnés un plan et un point de l'espace invariablement lié à ce plan, on fait tourner ce dernier d'un angle donné autour de sa trace horizontale, et on demande les nouvelles projections du point.

— Construire l'intersection d'un hyperboloïde de révolution à axe vertical avec un cône ayant avec l'hyperboloïde une génératrice commune.

— On donne un cylindre vertical de révolution, et une droite D. Sur l'axe du cylindre et sur la droite D s'appuie une droite qui se déplace en restant parallèle au plan horizontal. Construire l'intersection du cylindre avec le paraboloïde ainsi engendré. Point le plus haut et point le plus bas de la courbe.

— Construire la plus courte distance de deux droites dont l'une est dans le plan vertical, et l'autre dans le plan horizontal de projection.

— Etant donné un cylindre à base d'hyperbole, on le coupe par un plan quelconque; trouver les asymptotes de la section. — Y a-t-il toujours des asymptotes?

QUESTION D'EXAMEN

Un cône de révolution se développant sur un plan, trouver la transformée d'une section plane du cône.

Nous prendrons pour axe polaire la génératrice qui passe par le sommet le plus haut de la section. Nous appellerons :

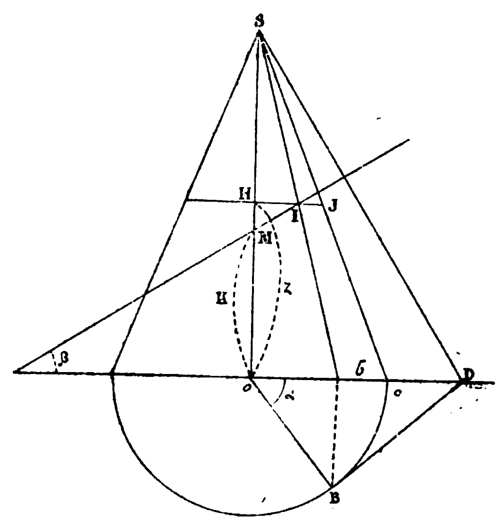
R, le rayon de base du cône;

h, sa hauteur;

l, son apothème;

k, la hauteur du point où le plan coupe l'axe;

β, l'angle du plan sécant avec le plan horizontal.



La vraie longueur du rayon vecteur qui se projette en SI est SJ.

En appelant z la distance OH, on a

$$\frac{h}{h-z}=\frac{l}{\rho},$$

d'autre part on a

$$\frac{h}{h-z}=\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{HI}}=\frac{\mathrm{R}\cos\alpha\operatorname{tg}\beta}{z-k}.$$

On en tire

$$\frac{h+\mathrm{R}\cos\alpha\operatorname{tg}\beta}{h-k}=\frac{h}{h-z}=\frac{l}{\rho}.$$

Donc
$$\rho=\frac{l(h-k)}{h+\mathrm{R}\operatorname{tg}\beta\cos\alpha}.$$

Maintenant dans le développement l'arc CB se transforme

en un arc égal, et entre les angles α et ω on a la relation

$$R\alpha = l\omega,$$

d'où

$$\alpha = \frac{l\omega}{R}.$$

Donc l'équation de la courbe est

$$\rho = \frac{l(h-k)}{h + R \operatorname{tg} \beta \cos \frac{l\omega}{R}}.$$

Cherchons pour quelle valeur de ω on a une inflexion.

On sait que la valeur de ω qui donne une inflexion est celle qui satisfait à la relation

$$\frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)'' = 0.$$

Or on a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{h + R \operatorname{tg} \beta \cos \left(\frac{l\omega}{R}\right)}{l(h-k)}$$

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)'' = \frac{-\frac{l^2}{R} \operatorname{tg} \beta \cos \left(\frac{l\omega}{R}\right)}{l(h-k)}.$$

En remplaçant, on trouve pour la condition d'inflexion,

$$Rh + (R^2 - l^2) \operatorname{tg} \beta \cos \frac{l\omega}{R} = 0,$$

ou

$$\cos \frac{l\omega}{R} = \frac{R}{h \operatorname{tg} \beta}.$$

Il faut que l'on ait $R < h \operatorname{tg} \beta$.

Or, si par le sommet S, je mène une perpendiculaire à la trace verticale du plan, elle coupe la ligne de terre en un point D, tel que l'on a $OD = h \operatorname{tg} \beta$; il faut donc d'abord que le point D soit extérieur à la base; en outre, si je mène par le point D la tangente DB au cercle, j'ai

$$\cos \alpha = \frac{R}{OD},$$

et, d'après la relation qui lie les angles α et ω, on voit que le point qui se projette en I est le point qui, dans la transformée, donnera une inflexion.

Le plan déterminé par les droites DB et DS est un plan tangent au cône, et ce plan est perpendiculaire au plan

sécant, puisqu'il passe par la ligne OD, perpendiculaire au plan sécant. On arrive donc à ce résultat :

Pour que la transformée présente une inflexion, il faut que l'on puisse mener au cône un plan tangent perpendiculaire au plan sécant, et le point de la courbe qui donnera un point d'inflexion dans la transformée est précisément le point qui se trouve dans ce plan tangent perpendiculaire au plan sécant.

On retrouve ainsi le résultat donné directement par la géométrie descriptive.

ÉCOLE CENTRALE 1881

PREMIÈRE SESSION

Géométrie analytique.

Soit $$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \qquad (1)$$
l'équation d'une ellipse rapportée à son centre O et à ses axes ; soient α et β les coordonnées d'un point P situé dans le plan de cette ellipse.

1° Démontrer que les pieds des normales menées à cette ellipse par le point P sont situés sur l'hyperbole représentée par l'équation
$$c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0, \qquad (2)$$
dans laquelle $c^2 = a^2 - b^2$.

2° On considère toutes les coniques qui passent par les points communs aux courbes (1) et (2) ; dans chacune d'elles, on mène le diamètre conjugué à la direction OP, et on projette le point O sur ce diamètre : trouver le lieu de cette projection.

3° Par les points communs aux deux courbes (1) et (2), on peut faire passer deux paraboles : trouver le lieu du sommet de chacune d'elles, quand le point P se meut sur une droite de coefficient angulaire donné m, menée par le point O.

On examinera en particulier le cas où $m = \frac{a^3}{b^3}$ et le cas où $m = -\frac{a^3}{b^3}$.

Trigonométrie.

On donne dans un triangle
$$a = 4567{,}89$$
$$b = 3456{,}78$$
$$C = 54°\,21'\,43'',7$$

Calculer A, B, c et S.

Physique et Chimie.

Un cylindre de verre CC′ communique, par sa partie inférieure, avec un tube en fer ff', ouvert à son extrémité supérieure. Les rayons du tube en fer et du cylindre sont dans le rapport de 1 à 5.

On introduit dans le cylindre une certaine quantité de mercure qui s'élève au même niveau dans le tube de fer; les deux surfaces libres du mercure se trouvent alors sur le même plan horizontal AB.

On fait ensuite communiquer la partie supérieure du cylindre avec une masse d'eau contenue dans un vase métallique R; cette communication est établie au moyen d'un tube de plomb assez large pour que l'air qui se trouve au-dessus du mercure puisse se dégager. — On comprime de l'air dans le récipient R, jusqu'à ce que la pression exercée à la surface de l'eau. dont le niveau n peut être considéré comme constant, soit de 8 atmosphères.

La hauteur de la colonne d'eau, h, comptée à partir de AB, était de $1^m,68$; quelle est, après l'expérience, la différence de niveau des surfaces du mercure dans l'appareil?

On prendra, pour densité du mercure, le nombre 13,5.

— Préparation et propriétés chimiques de l'ammoniaque.

Détermination de la densité théorique du gaz ammoniac, connaissant les densités de l'hydrogène et de l'azote :

Densité de l'hydrogène	0,0692
— de l'azote	0,972

Epure.

On propose de construire les projections des lignes d'intersection d'un hémisphère et des faces d'un cube avec un hyperboloïde de révolution à une nappe.

Le cube ($abde\,a'b'd'e'$), dont le côté a $0^m,200$ de longueur, dont la face inférieure et la face postérieure sont respectivement situées dans les deux plans de projection, contient entièrement l'hémisphère (hh'); cet hémisphère a pour base le cercle (h',h) inscrit dans la face antérieure du cube.

L'hyperboloïde a son axe (s,s') vertical, à $0^m,135$ du plan vertical de projection et à égale distance des faces de profil du cube; la cote du centre (oo') de cette surface est de $0^m,132$; les rayons de son collier (c, c') et de sa trace horizontale (θ,θ') ont respectivement $0^m,035$ et $0^m,100$ de longueur.

Dans la mise à l'encre, on supposera que le cube existe seul. qu'il est solide, et qu'on a enlevé la partie de ce corps comprise dans l'hémisphère et dans l'hyperboloïde. On indiquera, à l'encre rouge, les constructions nécessaires pour obtenir un point quelconque de chacune des lignes d'intersection et les tangentes en ces points.

QUESTION 246

Solution par M. Gilly, à Montpellier.

Étant données deux coniques $C = 0$, $C' = 0$, *trouver le lieu des points* M *tels que leurs polaires par rapport à ces coniques se coupent sur une courbe donnée* $f(x, y) = 0$. *Étudier les cas où 1°* $f(x, y) = 0$ *est une droite; 2°* $f(x, y) = 0$ *est un cercle.*

Prenons des coordonnées trilinéaires et soient

$\varphi(x, y, z) = 0$ l'équation de C

$\psi(x, y, z) = 0$ celle de C'

et α, β, γ un point du lieu. Ce lieu s'obtiendra en éliminant x, y, z entre les équations

$$x\varphi'_\alpha + y\varphi'_\beta + z\varphi'_\gamma = 0 \qquad (1)$$

$$x\psi'_\alpha + y\psi'_\beta + z\psi'_\gamma = 0 \qquad (2)$$

$$f(x, y, z) = 0 \qquad (3)$$

Si f est de degré m, le lieu sera une courbe de degré $2m$: car les deux premières équations donnent pour $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ des fonctions du second degré en α, β, γ.

1° Si $f(x, y, z) = 0$ est une droite on doit éliminer x, y, z entre

$$x\varphi'_\alpha + y\varphi'_\beta + z\varphi'_\gamma = 0$$

$$x\psi'_\alpha + y\psi'_\beta + z\psi'_\gamma = 0$$

$$Ax + By + Cz = 0$$

Le lieu demandé est la conique

$$F = \begin{vmatrix} \varphi'_\alpha & \varphi'_\beta & \varphi'_\gamma \\ \psi'_\alpha & \psi'_\beta & \psi'_\gamma \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0$$

2° Si $f(x, y, z) = 0$ est un cercle, on peut toujours prendre son équation sous la forme

$$x^2 + y^2 = R^2z^2. \qquad (4)$$

Or (1) et (2) donnent

$$\frac{x}{\varphi'_\gamma\psi'_\beta - \psi'_\gamma\varphi'_\beta} = \frac{y}{\varphi'_\alpha\psi'_\gamma - \psi'_\alpha\varphi'_\gamma} = \frac{z}{\varphi'_\beta\psi'_\alpha - \psi'_\beta\varphi'_\alpha}.$$

Substituant dans (4) le lieu est alors la courbe du quatrième degré

$$\left(\varphi'_\gamma\psi'_\beta - \psi'_\gamma\varphi'_\beta\right)^2 + \left(\varphi'_\alpha\psi'_\gamma - \psi'_\alpha\varphi'_\gamma\right)^2 = R^2\left(\varphi'_\beta\psi'_\alpha - \psi'_\beta\varphi'_\alpha\right)^2 \qquad (5)$$

Remarques. — 1° Lorsque $f(x, y, z) = 0$ est une droite $Ax + By + Cz = 0$, le lieu coïncide avec le jacobien des coniques $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $(Ax + By + Cz)^2 = 0$.

Le jacobien, qui est en général une courbe du troisième

ordre, se dédouble alors en une conique $F = 0$ et la droite $Ax + By + Cz = 0$. Cela est évident géométriquement. La conique $F = 0$ est d'ailleurs déterminée par cinq points connus *à priori*, savoir : les trois sommets du triangle autopolaire des coniques données φ et ψ, et les pôles de la droite donnée par rapport à ces coniques.

2° Lorsque $f(x, y, z) = 0$ est un cercle, la courbe (5) passe par les huit points d'intersection de la conique

$$\varphi'_\gamma \psi'_\beta - \psi'_\beta \varphi'_\gamma = 0$$

avec les deux coniques

$$R\left(\varphi'_\beta \psi'_\alpha - \psi'_\beta \varphi'_\alpha\right) + \varphi''_\alpha \psi_\gamma - \psi_\alpha \varphi'_\gamma = 0$$

$$R\left(\varphi_\beta \psi'_\alpha - \psi'_\beta \varphi'_\alpha\right) - \varphi'_\alpha \psi'_\beta + \psi'_\alpha \varphi'_\gamma = 0$$

et aussi par les huit points d'intersection de $\varphi'_\alpha \psi'_\gamma - \psi'_\alpha \varphi'_\gamma = 0$

$$\text{avec } R\left(\varphi'_\beta \psi'_\alpha - \psi'_\beta \varphi'_\alpha\right) + \varphi'_\gamma \psi'_\beta - \varphi'_\beta \psi'_\gamma = 0$$

$$\text{et } R\left(\varphi'_\beta \psi_\alpha - \psi'_\beta \varphi'_\alpha\right) - \varphi'_\gamma \psi'_\beta + \varphi'_\beta \psi'_\gamma = 0.$$

NOTA : M. Baron, du lycée Henri IV, a réso'u la même question.

QUESTION 255

Solution par M. BONVALET, élève de Mathématiques spéciales au Lycée de Versailles.

Trouver la surface engendrée par une droite s'appuyant constamment sur OZ, sur la droite $z = 1$, $x = 1$ *et sur le cercle* $z = 0$, $x^2 + y^2 = R^2$. *Étudier les sections faites dans la surface par des plans parallèles aux plans de coordonnées et particulièrement par le plan* $z = h$. *Les sections obtenues dans ce dernier cas sont des conchoïdes de Nicomède ; on propose de le démontrer géométriquement.*

Les équations des directrices rectilignes sont $x - 1 = 0$, $z - 1 = 0$ et $x = 0$, $y = 0$.

Les équations d'une droite s'appuyant sur ces droites sont $\lambda(z - 1) + x - 1 = 0$, $y = \mu x$, λ et μ étant deux paramètres arbitraires. Les coordonnées de la trace de cette

droite sur le plan xoy sont $z = 0$, $x = \lambda + 1$, $y = \mu(\lambda + 1)$; par suite, pour qu'elle rencontre le cercle $z = 0$, $x^2 + y^2 = R^2$, on doit avoir entre λ et μ la relation

$$(\lambda + 1)^2 + \mu^2 (\lambda + 1)^2 = R^2.$$

L'équation de la surface s'obtiendra en éliminant λ et μ entre l'équation précédente et les équations de la génératrice

$$\lambda (z - 1) + x - 1 = 0, \quad y = \mu x.$$

Ces équations déterminent λ et μ. En les portant dans la relation entre λ et μ, nous avons

$$(z - x)^2 (x^2 + y^2) = R^2 x^2 (z - 1)^2 :$$

telle est l'équation de la surface.

Cette surface est du quatrième degré. On voit immédiatement qu'elle passe par oz, par $x = 1$, $z = 1$ et que sa section par le plan $z = o$ est $x^2 + y^2 = R^2$.

Si nous coupons cette surface par des plans $z = h$, l'équation dans son plan de la courbe d'intersection est

$$(h - x)^2 (x^2 + y^2) = R^2 x^2 (h - 1)^2.$$

Si nous transformons cette équation en coordonnées polaires, nous avons

$$(h - \rho \cos \omega)^2 = R^2 (h - 1)^2 \cos^2 \omega$$

ou

$$\rho \cos \omega = h \pm R (h - 1) \cos \omega,$$

équation d'une conchoïde de Nicomède ayant l'origine pour pôle et pour directrice une droite perpendiculaire à ox au point dont l'abscisse est h et la quantité constante que l'on ajoute à chaque rayon vecteur étant $R (h - 1)$. $R (h - 1)$ est une quantité variable avec h. La conchoïde peut présenter les trois formes, puisqu'on peut déterminer h de façon que $R (h - 1) = h$, $R (h - 1) > h$, $R (h - 1) < h$.

Il est facile de voir géométriquement que la section est une conchoïde de Nicomède. En effet, soient OA (*fig. 1*) un rayon de la circonférence, AQ la génératrice correspondante de la surface et X, P, Y, le plan $z = h$, enfin M le point correspondant de la courbe ($OB' = \frac{1}{\cos \omega}$, $\omega = XOA$, $BC = 1$).

Si du point M on mène la parallèle ME à oz, les triangles MEC et CBA, semblables, donnent

$$\frac{ME}{EC} = \frac{CB}{BA}$$

ou
$$\frac{h - 1}{oB - PM} = \frac{1}{R - \frac{1}{\cos\omega}}$$

ou
$$\frac{h - 1}{1 - PM\cos\omega} = \frac{1}{R\cos\omega - 1}.$$

Si nous posons $\rho = PM$, cette relation devient
$$(R\cos\omega - 1)(h - 1) - 1 = \rho\cos\omega$$
ou
$$\rho\cos\omega = h - R(h - 1)\cos\omega$$
qui est l'équation trouvée précédemment.

Étudions maintenant les sections par des plans parallèles au plan yoz.

Soit $x = h$ l'un de ces plans; l'équation de la surface dans son plan est
$$(z - h)^2 (h^2 + y^2) = R^2 h^2 (z - 1)^2,$$
équation d'une courbe symétrique par rapport à Oy. Si nous résolvons cette équation par rapport à y, nous avons
$$y^2 = \frac{h^2 [(R + 1) z - R - h][(R - 1) z - R + h]}{(z - h)^2}.$$

La droite $z = h$ est une asymptote double et les deux droites $y^2 = h^2 (R^2 - 1)$ sont également asymptotes; ces dernières sont réelles si $R^2 > 1$. Soient alors z' et z'' les deux racines du numérateur, $z' < z''$ nous distinguerons plusieurs cas :
$$R^2 > 1,\ h < z' \text{ et } z' < h < z'' \text{ et } z'' < h.$$

La courbe dans le premier cas aura la forme représentée figure 2; dans le second cas la forme représentée par la figure 3. Dans le troisième cas, la courbe ne diffère comme forme de la figure 2 qu'en ce que la direction positive des z est changée Si $R^2 < 1$ les asymptotes $y^2 = h^2 (R^2 - 1)$ sont imaginaires et y^2 n'est positif que pour les valeurs de z comprises entre z' et z''. On a ainsi les formes représentées par les figures 4 et 5.

Nous avons supposé $h \lesseqgtr z'$ et z''; pour qu'il soit égal à l'une de ces quantités, il faut que $h = 1$ et dans ce cas $z = 1$ et $y^2 = R^2 - 1$ sont les deux courbes en lesquelles se décompose la section. Il est évident d'après les données de la question que l'on doit trouver $z = 1$.

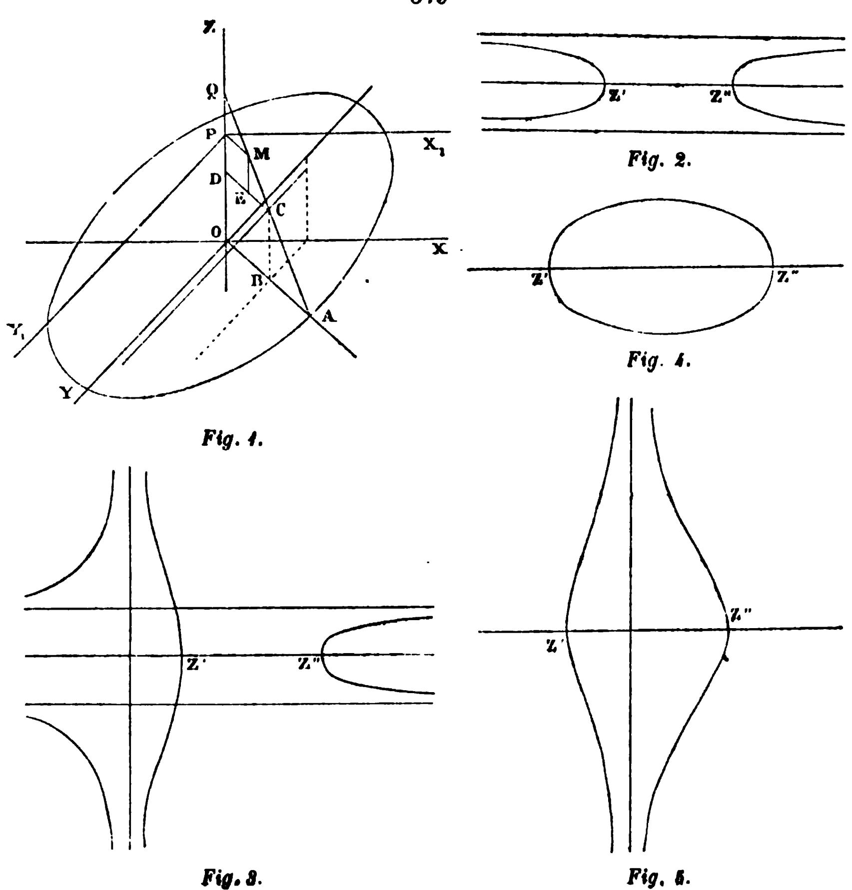


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 4. Fig. 3. Fig. 5.

Considérons maintenant les sections par des plans $y = h$. Nous aurons pour équation de la courbe

(A) $$(z - x)^2 (x^2 + h^2) = R^2 x^2 (z - 1)^2$$

courbe du quatrième degré présentant à l'origine un point double.

Les tangentes sont

$$h^2 (z - x)^2 = R^2 x^2$$

ou $$h^2 (z^2 - 2 h^2 zx + (h^2 - R^2) x^2 = 0;$$

d'où $$\frac{z}{x} = \frac{h \pm R}{h^2}$$

Ces tangentes sont toujours réelles et par suite l'origine est toujours un point double réel.

Les coefficients angulaires des asymptotes non parallèles à oz sont données par l'équation en λ

$$(1 - R^2)\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

D'où $\lambda' = \dfrac{1}{1 - R}$ et $\lambda'' = \dfrac{1}{1 + R}$.

Les ordonnées à l'origine sont

$$\frac{-\lambda' R^2}{(1 - R^2)\lambda' - 1} = -\frac{R}{(1 - R)^2}$$

et

$$\frac{-\lambda'' R^2}{(1 - R^2)\lambda'' - 1} = \frac{R}{(1 + R)^2}.$$

Si l'on ordonne l'équation (A) par rapport à z, on a

$$z^2[(1 - R^2)x^2 + h^2] - 2x(x^2 + h^2 - R^2x)z + x^2(x^2 - h - R^2) = 0;$$

on voit alors que les asymptotes parallèles à oz sont

$$(1 - R^2)x^2 + h^2 = 0;$$

par suite, pour qu'elles soient réelles, il faut que $1 - R^2$ soit négatif.

Posons $z = x\lambda$, l'équation devient

$$[(\lambda - 1)^2 - R^2\lambda^2]x^2 + 2R^2\lambda x + h^2(\lambda - 1)^2 - R^2 = 0.$$

Pour que x soit réel il faut que

$$R^4\lambda^2 - [h^2(\lambda - 1)^2 - R^2][(\lambda - 1)^2 - R^2\lambda^2] > 0$$

$$(\lambda - 1)^2[h^2(R^2 - 1)\lambda^2 + 2h^2\lambda + R^2 - h^2] > 0;$$

on en déduit $\lambda = \dfrac{-h^2 \pm Rh\sqrt{h^2 - R^2 + 1}}{h^2(R^2 - 1)}$.

Si $R^2 - 1 < 0$ les racines sont réelles et si on les désigne par λ' et λ'', λ' étant plus petit que λ'', le trinôme en λ est positif. Si $\lambda' < \lambda < \lambda''$, la courbe est alors comprise entre les deux droites $z = \lambda' x$ et $z = \lambda'' x$.

Si $R^2 > 1$ et $h^2 - R^2 + 1 > 0$, les asymptotes parallèles à oz deviennent réelles et le trinôme en λ est positif pour les valeurs de λ comprises en dehors des racines. Si $h^2 - R^2 + 1 < 0$, les valeurs de λ sont imaginaires. $R^2 - 1$ est positif et le trinôme est positif pour toute valeur réelle de λ; par suite x est toujours réel.

Nota. — Cette question a été résolue par MM. Leffuber, à Rennes; Baron, au lycée Henri IV; Boulogne, à Lille.

QUESTION 262

Solution par M. Gilly, de Montpellier.

Résoudre et discuter dans les diverses hypothèses

$$x^n + y^n + z^n = a^n$$
$$x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = b^{2n}$$
$$x^{3n} + y^{3n} + z^{3n} = c^{3n}.$$

Prenons pour inconnues auxiliaires $x^n = u$, $y^n = v$, $z^n = t$, et posons $a^n = p$, $b^{2n} = q^2$, $c^{3n} = r^3$.

Les équations deviennent

$$u + v + t = p \qquad (1)$$
$$u^2 + v^2 + t^2 = q^2 \qquad (2)$$
$$u^3 + v^3 + t^3 = r^3 \qquad (3)$$

Nous remarquerons d'abord qu'à chaque système de valeurs réelles de u, v, t correspondent n systèmes de valeurs pour x, y, z, dont un seul se compose de valeurs réelles si n est impair, et dont deux se composent de valeurs réelles si n est pair; car si u, v, t est une solution se composant de valeurs réelles, on a

$$x = u^{\frac{1}{n}}\left(\cos \frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin \frac{2k\pi}{n}\right)$$
$$y = v^{\frac{1}{n}}\left(\cos \frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin \frac{2k\pi}{n}\right)$$
$$z = t^{\frac{1}{n}}\left(\cos \frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin \frac{2k\pi}{n}\right)$$

où k doit recevoir les n valeurs $0, 1, 2 \ldots n - 1$.

Tout revient donc à compter les valeurs réelles de u, v, t.

Retranchons l'équation (2) du carré de (1), il vient

$$uv + vt + ut = \frac{p^2 - q^2}{2}. \qquad (4)$$

L'identité

$$3ABC = A^3 + B^3 + C^3 + (A + B + C)(A^2 + B^2 + C^2 - BC - AB - AC),$$

où l'on fait $A = u$, $B = v$, $C = t$, donne

$$3uvt = r^3 + \left(q^2 - \frac{p^2 - q^2}{2}\right)$$

ou
$$uvt = \frac{2r^3 + p(3q^2 - p^2)}{6}. \qquad (5)$$

Donc u, v, t sont racines de l'équation

$$X^3 - pX^2 + \frac{p^2 - q^2}{2} X - \frac{2v^3 + p(3q^2 - p^2)}{6} = 0.$$

Si l'on pose $X = Y + \frac{p}{3}$, cette équation devient

$$Y^3 + \frac{1}{6} Y (p^2 - 3q^2) + \frac{1}{27}(7p^3 - 18pq^2 - qr^3) = 0.$$

et u, v, t, ne différant que de $\frac{p}{3}$ des racines de cette équation, seront réelles en même temps que ces dernières et réciproquement.

La condition de réalité des racines de la transformée en Y est

$$(p^2 - 3q^2)^3 + 2(7p^3 - 18\,pq^2 - qr^3)^2 < 0, \qquad (6)$$

condition qui s'obtient sans difficulté en fonction des données a, b, c.

Alors si la condition (6) n'est pas satisfaite, le système proposé n'admet pas de solutions réelles.

Si cette condition est vérifiée il y a une solution réelle pour x, y, z, lorsque n est impair, et deux solutions réelles lorsque n est pair.

Si enfin $(p^2 - 3q^2)^3 + 2(7p^3 - 18\,p^2 - qr^3)^2 = 0$, il y a une solution réelle pour x, y, z dans laquelle deux de ces inconnues sont égales.

Remarque. — Dans le cours de la discussion, nous avons supposé p, q, r réels, c'est-à-dire a, b, c réels et de plus a et c positifs, si n est pair, et positifs ou négatifs, si n est impair.

Nota : Ont résolu la même question : MM. Boulogne, à Lille ; Haure, lycée Louis-le-Grand, à Paris.

QUESTION 295

Solution par M. Quiquet, élève au Lycée de Lille.

Le pôle étant placé au centre de similitude du cercle $\rho^2 - 2a\rho \cos(\theta - \alpha) + a^2 = r^2$ *et du cercle de rayon* mr, *trouver l'équation de l'axe radical et celle du cercle coupant orthogonalement les deux cercles donnés et dont le centre a pour angle polaire* β.

L'équation du premier cercle étant

$$\rho^2 - 2a\rho \cos(\theta - \alpha) + a^2 - r^2 = 0, \qquad (1)$$

celle du second est

$$\rho^2 - 2ma\rho \cos(\theta - \alpha) + m^2(a^2 - r^2) = 0, \qquad (2)$$

L'équation de l'axe radical de ces deux cercles s'obtiendra en retranchant (1) et (2), ce qui donne

$$\rho \cos(\theta - \alpha) = \frac{(a^2 - r^2(m + 1)}{2a}. \qquad (3)$$

Le centre du cercle coupant orthogonalement les deux cercles donnés est sur l'axe radical; ses coordonnées b et β doivent satisfaire à (3), ce qui donne

$$b = \frac{(r^2 - a^2)(m + 1)}{2a \cos(\beta - \alpha)}.$$

Le carré de la distance des deux points $(a\ \alpha)$, $(b\ \beta)$ a pour expression $\quad a^2 + b^2 - 2ab \cos(\beta - \alpha)$.

Le rayon R du cercle coupant orthogonalement les deux cercles donnés est égal à la distance du point $(b\beta)$ au point de contact de la tangente, menée par $(b\beta)$ au cercle de rayon r ; on a donc

$$R^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\beta - \alpha) - r^2$$

et par suite l'équation du cercle cherché qui est

$$\rho^2 - 2\rho b \cos(\theta - \beta) + b^2 - R^2 = 0$$

devient

$$\rho^2 - \rho \frac{(r^2 - a^2)(m + 1)}{a \cos(\beta - \alpha)} \cos(\theta - \beta) + (r^2 - a^2)(m + 2) = 0.$$

Nota. — M. Daguillon, du lycée Henri IV, a résolu la même question.

QUESTION 308

Solution par M. TRANIÉ, élève de Mathématiques spéciales, au Lycée de Toulouse.

a *et* b *étant des quantités réelles, on considère la fonction*

$$y = (x - a)^m (x - b)^m.$$

On demande combien l'équation obtenue en égalant à zéro la dérivée m^{me} *de* y *a de racines réelles.*

La fonction y est de degré $2m$. Elle admet m fois la racine a et m fois la racine b. Elle a donc toutes les racines réelles. Il suit de là que la dérivée première de y et toutes les dérivées successives auront toutes leurs racines réelles.

La dérivée première y' est du degré $2m - 1$. Elle admet $m - 1$ fois la racine a et $m - 1$ fois la racine b. De plus, d'après le théorème de Rolle, elle admet une autre racine réelle comprise entre a et b. Soit α cette racine.

La dérivée seconde, de degré $m - 2$, admet $m - 2$ fois la racine a, $m - 2$ fois la racine b, et deux autres racines réelles comprises l'une entre a et α, l'autre entre α et b.

En raisonnant ainsi de proche en proche, on voit que la dérivée m^{me} du degré $2m - m = m$ n'admet pas pour racines les quantités a et b; mais elle a toutes les racines réelles et comprises entre a et b.

NOTA. — A résolu la même question, M. Dupuy, à Grenoble.

Le Rédacteur-Gérant,

J. KŒHLER.

PARIS. — IMP. CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 15720-1.

FORMULE

QUI DONNE LA SOMME DES PUISSANCES SEMBLABLES DES n PREMIERS NOMBRES ENTIERS (*)

Par M. **Ch. Pravaz**, professeur au collège d'Autun

Si l'on représente par S_m^p la somme des puissances p^{mes} des m premiers nombres entiers; par $m!$ le produit des m premiers nombres entiers (o! étant supposé égal à 1); par A_p^{p+2} le produit $n(n-1)(n-2)\ldots(n-p)(n-p+1)$; on a

$$S_n^p = A_n^{p+2}\sum_{m=1}^{m=p+1}\frac{S_m^p \times (-1)^{p+1-m}}{m!(p+1-m)!(n-m)}.$$

La somme S_n^p est une fonction de n, entière, de degré $p+1$ et ne renfermant pas de constante (**); posons donc

$$S_n^p = A_0 n^{p+1} + A_1 n^p + A_2 n^{p-1} + \ldots + A_p n. \quad (1)$$

Si dans cette égalité on donne successivement à n les valeurs 1, 2, 3, ... p, $(p+1)$, on aura pour déterminer les $p+1$ coefficients A_0, A_1, A_2 ... A_p les $p+1$ équations linéaires

$$\left.\begin{array}{l} S_1^p = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_p \\ S_2^p = A_0 2^{p+1} + A_1 2^p + A_2 \,.\, 2^{p-1} + \ldots + A_p \,.\, 2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S^p{}_p = A_0(p+1)^{p+1} + A_1(p+1)^p \\ \qquad + A_2(p+1)^{p-1} + \ldots \times A_p(p+1) \end{array}\right\}(2)$$

L'élimination des coefficients $A_0, A_1, A_2 \ldots A_p$ entre (1) et (2) donne

(*) Voir un mémoire de M. Puiseux sur le même sujet (Journal de Liouville, 1846.

(**) *Journal de mathématiques élémentaires et spéciales*, tome IV, p. 94.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1} S_1^p & 1^p & 1^{p-1} & \ldots 1^2 & 1^0 & 1 \\ \frac{1}{2} S_2^p & 2^p & 2^{p-1} & \ldots 2^2 & 2^1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{p+1} S_{p+1}^p & (p+1)^p & (p+1)^{p-1} & \ldots (p+1)^2 & (p+1) & 1 \\ \frac{1}{n} S_n^p & n^p & n^{p-1} & n^2 & n & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on développe ce déterminant en l'ordonnant par rapport aux éléments de la première colonne et que l'on se rappelle que

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \ldots & a^{n-1} \\ 1 & b & b^2 & \ldots & b^{n-1} \\ 1 & c & c^2 & \ldots & c^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & k & k^2 & \ldots & k^{n-1} \\ 1 & l & l^2 & \ldots & l^{n-1} \end{vmatrix} = (a-b) \ldots (a-k)(a-l) \\ (b-c) \ldots (b-k)(b-l) \\ \ldots\ldots\ldots \\ (k-l),$$

le coefficient de l'élément $\frac{1}{m} S_m^p$ (m étant l'un des nombres $1, 2, \ldots, p, p+1$) sera

$$(1-2)(1-3)\ldots(1-m+1)(1-m-1)(1-m-2) \ldots (1-p)(1-p-1)(1-n)$$
$$(2-3)\ldots(2-m+1)(2-m-1)(2-m-2)\ldots (2-p)(2-p-1)(2-n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(m-2-m+1)(m-2-m-1)(m-2-m-2)\ldots (m-2-p)(m-2-p-1)(m-2-n)$$
$$(m-1-m-1)(m-1-m-2)\ldots (m-1-p)(m-1-p-1)(m-1-n)$$
$$(m+1-m-2)\ldots (m+1-p)(m+1-p-1)(m+1-n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(p-1-p)(p-1-p-1)(p-1-n)$$
$$(p-p-1)(p-n)$$
$$(p+1-n)$$

c'est-à-dire, abstraction faite du signe

$$\frac{p\,!}{m-1}\,\frac{(p-1)\,!}{m-2}\cdots\frac{(p-m+3)\,!}{2}\,\frac{(p-m+2)\,!}{1}$$

$$\times\,(n-1)\,(n-2)\ldots\frac{(p-m)\,!\,(p-m-1)\,!\ldots 2\,!\,1\,!}{(n-m+1)\,(n-m-1)\ldots(n-p-1)},$$

ou $$\frac{1\,!\,2\,!\,3\,!\ldots p\,!}{(m-1)\,!\,(p-m+1)\,!}\cdot\frac{A_n^{p+2}}{n(n-m)}.$$

Le coefficient de S_m^p est donc, abstraction faite du signe,

$$\frac{1\,!\,2\,!\,3\,!\ldots p\,!}{m\,!\,(p-m+1)\,!}\times\frac{A_n^{p+2}}{n(n-m)}.$$

On verrait de même que le coefficient de $\frac{1}{n}S_n^p$ est

$$1\,!\,2\,!\,3\,!\ldots p\,!$$

On a donc

$$S_n^p = A_n^{p+2}\left[\frac{S_{p+1}^p}{(p+1)!\,0!\,(n-p-1)} - \frac{S_p^p}{p!\,1!\,(n-p)} + \cdots \pm \frac{S_2^p}{2!\,(p-1)!\,(n-2)} \mp \frac{S_1^p}{1\,!\,p\,!\,(-1)}\right],$$

ou, sous une forme plus concise,

$$S_n^p = A_n^{p+2}\sum_{m=1}^{m=p+1}\frac{S_m^p\times(-1)^{p+1-m}}{m\,!\,(p+1-m)\,!\,(n-m)}.$$

Remarque. — La formule que nous venons d'établir se vérifie aisément *a posteriori*.

Il est évident, en effet, que le second membre est une fonction de n entière, de degré $p+1$ et ne renfermant pas de constante. Or, il est aisé de voir que les deux membres de la formule sont identiques pour $p+2$ valeurs de n, savoir $0, 1, 2, \ldots p+1$. D'abord, pour $n=0$, les deux nombres sont nuls. Puis, pour $n=m$, m étant l'un des nombres $1, 2, \ldots, p+1$, tous les termes du second membre s'annulent, sauf le terme en S_m^p dont le coefficient est

$$(-1)^{p-m+1}\times\frac{m(m-1)\ldots 2.1.(-1).(-2)\ldots[-(p-m+1)]}{m\,!\,(p-m+1)\,!} = 1.$$

Les deux polynômes de degré $p + 1$ qui constituent les deux membres de la formule étant égaux pour $p + 2$ valeurs de la variable n, sont identiques.

NOTE D'ALGÈBRE

M. Burat-Dubois, professeur au lycée de Pau, nous a communiqué deux notes qu'il vient de publier, sur la fraction du second degré, et que nous devons signaler à nos lecteurs, à cause de l'importance des résultats que présentent ces notes.

Dans la première, M. Burat-Dubois fait remarquer, avec beaucoup de raison, que, après avoir donné une définition du maximum, on emploie une méthode qui laisse complètement de côté la définition; c'est la méthode désignée souvent sous le nom de *méthode indirecte*. Mais l'auteur, après avoir signalé cette première faute de raisonnement, montre que, en outre, la règle trouvée par cette méthode indirecte n'est pas identique à celle que donne l'étude directe de la variation des fonctions. Les exemples que donne M. Burat-Dubois mettent le fait en évidence; ils nous montrent en effet que la règle donnée par la méthode indirecte peut fournir des résultats en désaccord absolu avec l'étude mathématique de la variation de la fonction.

Le but de la première note était d'appeler l'attention sur cette question, et de provoquer, pour ainsi dire, une étude nouvelle de la fraction du second degré, l'une des questions les plus délicates du programme de mathématiques élémentaires. Cette étude, qu'il fallait entreprendre au point de vue du programme du baccalauréat et de l'École Saint-Cyr, fait précisément l'objet de la seconde note de M. Burat-Dubois.

Partant de la définition précise du maximum et du minimum, M. Burat-Dubois commence par insister sur ce fait, qu'un maximum ou un minimum ne peut correspondre qu'à une valeur finie de la variable, mais peut parfaitement

répondre à une valeur infinie de la fonction pour une valeur finie de la variable.

Ensuite, l'auteur démontre les théorèmes suivants :

1. ***Les fonctions*** **$ax + b$** ***et*** **$\frac{ax+b}{a'x+b'}$** ***n'ont ni maximum ni minimum.***

2. ***La fonction*** **$ax^2 + bx + c$** ***a toujours un maximum*** **ou** ***un minimum si*** **a** ***est différent de zéro.***

3. ***La fonction*** **$x + \frac{m}{x}$** ***a toujours un minimum*** **et** ***un maximum si*** **m** ***est positif; elle n'a ni maximum ni minimum si*** **m** ***est nul ou négatif.***

Ces principes établis, M. Burat-Dubois, reprenant la fraction

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'},$$

effectue la division, et obtient une expression de la forme

$$y = \frac{a}{a'}, - m\ \frac{x+n}{a'x^2 + b'x + c'};$$

par un changement de variable, il ramène cette fraction à la forme

$$\frac{z}{z^2 + pz + q},$$

ou encore en divisant par z, à la forme

$$\frac{1}{z + p + \frac{q}{z}};$$

c'est l'étude du dénominateur de cette fraction qui indique précisément s'il y a maximum ou minimum.

Les conclusions auxquelles arrive M. Burat-Dubois sont les suivantes:

Pour qu'il y ait maximum ou minimum, il faut que l'on ait $(ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') > 0$;

Si cette quantité était nulle ou négative, il n'y aurait ni maximum ni minimum.

Après avoir reconnu l'existence d'un maximum et d'un minimum, il faut chercher quelle est la valeur de x qui correspond au maximum, quelle est celle qui correspond au

minimum. Appelons K la valeur de la quantité que nous venons de considérer; si $ab' - ba'$ est positif, le maximum correspond à

$$x_1 = \frac{-(ac' - ca') - \sqrt{K}}{ab' - ba')},$$

et le minimum à

$$x_2 = \frac{-(ac' - ca') + \sqrt{K}}{(ab' - ba')};$$

c'est l'inverse qui aura lieu si $ab' - ba'$ est négatif.

Ce fait général établi, M. Burat-Dubois examine ce qui arrive lorsque certains coefficients sont nuls, et il reconnait que ses conséquences peuvent se déduire du premier cas, en portant, dans la valeur de K les hypothèses qu'il fait sur les coefficients, en supposant toutefois que $ab' - ba'$ ne soit pas nul; si $ab' - ba'$ était nul, avec $ac' - ca'$ différent de zéro, il y aurait un maximum ou un minimum, mais jamais l'un et l'autre.

Enfin, l'auteur termine sa note en comparant l'étude qu'il vient de faire avec la méthode dite indirecte, et il montre que la seconde ne tient pas compte de toutes les hypothèses qu'il a considérées, et que certaines hypothèses peuvent exister dans la première méthode en même temps que d'autres hypothèses de la seconde, qui donnent des résultats différents des premiers.

Nous devons dire que déjà, dans une *Algèbre* parue depuis plusieurs années, M. Lauvernay a cherché à présenter la question d'une autre manière; il a suivi une marche fort différente de celle que nous signalons aujourd'hui, et il est arrivé aux mêmes résultats; mais ensuite il a repris la méthode indirecte, et ce qui constitue, à notre avis, la supériorité de la note de M. Burat-Dubois, c'est que ce dernier s'est préoccupé de montrer que les deux méthodes ne sont pas équivalentes.

On peut maintenant se demander s'il y a une faute de raisonnement quelque part dans la méthode indirecte, ou bien à quoi tient ce désaccord entre les résultats donnés par les deux méthodes. Nous allons montrer que la méthode indi-

recte nous donne seulement une condition nécessaire pour qu'il y ait ou maximum ou minimum, ou bien maximum et minimum, mais que cette condition n'est pas suffisante.

Pour cela, reprenons la condition de maximum ou de minimum (Lauvernay, p. 281). Il faut que x soit l'une des racines de l'équation

$$(ab' - ba')x^2 + 2(ac' - ca')x + (bc' - cb') = 0.$$

Mais, comme l'indique l'auteur dont nous parlons, cette condition n'est pas suffisante.

D'autre part, si nous posons dans la méthode indirecte

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} = y,$$

nous trouvons que les valeurs de x correspondant au maximum ou au minimum sont celles que l'on tire de l'équation précédente quand on y remplace y par l'une des racines de l'équation

$$(b'^2 - 4a'c')y^2 - 2(bb' - 2ac' - 2ca')y + b^2 - 4ac = 0.$$

Si, dans cette équation, nous remplaçons y par la fraction donnée, nous aurons une fonction de x qui devra s'annuler précisément pour les valeurs que nous venons d'indiquer. Or, en faisant cette transformation, nous arrivons à l'équation

$$\left.\begin{array}{l}(b'^2 - 4a'c')(ax^2 + bx + c)^2 \\ - 2(bb' - 2ac' - 2ca')(ax^2 + bx + c)(a'x^2 + b'x + c') \\ + (b^2 - 4ac)(a'x^2 + b'x + c')^2\end{array}\right\} = 0$$

qui, tous calculs faits, revient à la suivante :

$$\left.\begin{array}{l}(ab' - ba')^2x^4 + 4(ab' - ba')(ac' - ca')x^3 \\ + [4(ac' - ca')^2 + 2(ab' - ba')(bc' - cb')]x^2 \\ + 4(ac' - ca')(bc' - cb')x + (bc' - cb')^2\end{array}\right\} = 0.$$

Cette dernière équation peut se mettre sous la forme

$$[(ab' - ba')x^2 + 2(ac' - ca')x + (bc' - cb')]^2 = 0.$$

On retrouve ainsi la condition nécessaire, mais non suffisante, à laquelle doit satisfaire x, pour qu'il y ait maximum ou minimum ; on reconnaît donc bien que la méthode indirecte est défectueuse, ainsi que l'avait signalé M. Burat-Dubois dans sa première note.

Nous pourrons faire remarquer, pour ceux de nos lecteurs qui sont en mathématiques spéciales, que la fonction de x

que nous annulons n'est autre que le numérateur de la dérivée de la fraction du second degré; et ils verront ainsi que, en annulant cette fraction, nous avons bien une condition nécessaire, mais non suffisante pour que la fraction passe par un maximum ou un minimum.

A. M.

EXAMENS ORAUX DE SAINT-CYR (1881)

Résoudre l'équation

$$(\sin x - \cos x) \sin x = a;$$

trouver entre quelles limites doit varier a pour que le problème soit possible.

— Trois cercles dont les rayons sont R, R', R'', sont tangents deux à deux extérieurement. Trouver les angles du triangle qui a pour sommets les centres de ces trois circonférences.

— Rendre calculable par logarithmes l'expression

$$\sin A + \sin B + \sin C$$

en supposant $$A + B + C = 180°.$$

— Sur une droite AB comme diamètre, on décrit une circonférence, et on prolonge AB d'une longueur BC égale au rayon. Du point C, on mène une tangente CT, et on fait tourner la figure autour du diamètre AB. On demande la surface engendrée par CT. Dire *a priori* quelle est la valeur de l'angle C.

— Intersection, par la méthode des projections cotées, de deux plans dont les lignes de pente sont parallèles.

— On partage un diamètre AB en trois parties égales et on mène des perpendiculaires à AB; puis on fait tourner la figure autour du diamètre; trouver les aires des trois zones et les volumes des trois segments sphériques ainsi déterminés.

— Construire l'expression $x = \dfrac{2a}{1 + \sqrt{5}}$.

— Étant donnés deux points A et B sur le plan horizontal, et la projection horizontale d'un point de l'espace d'où l'on voit la droite AB sous un angle donné, trouver sa projection verticale.

— En un point O, situé à l'intérieur d'un triangle ABC on applique trois forces dont les grandeurs et les directions sont OA, OB, OC; on demande de trouver leur résultante et son expression en fonction de la distance du point O au point de rencontre G des médianes. Démontrer que la résultante passe par le point G.

— Un mobile de poids P est soumis à trois forces, l'une $\dfrac{P}{3}$ verticale dirigée de bas en haut; l'autre $\dfrac{P}{3}$ parallèle au plan incliné, et la troisième $\dfrac{P}{3}$ horizontale; le corps étant immobile, on demande l'inclinaison du plan.

— Un mobile du poids de 25 grammes est soumis à une force de 3 grammes pendant $\dfrac{1}{10}$ de seconde; on supprime la force qui agit, et on demande l'espace parcouru pendant 7 secondes de descente libre.

— On suppose qu'on ait trois points, et trois forces appliquées en ces points, et situées dans un même plan. Démontrer qu'il est possible de remplacer ces forces par deux autres, l'une passant par un point donné, l'autre ayant une direction donnée.

— $2p$ étant le périmètre d'un triangle et r le rayon du cercle inscrit, si l'on a $r = p - a$, le triangle est rectangle en A.

— On donne deux points A et B de l'espace, et un plan P. Lieu des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = K^2$.

— Décomposition du trinôme $x^4 + px^2 + q$ en facteurs réels du second degré.

— Résoudre les deux équations

$$xy + a(x + y) = p; \quad x^2 + y^2 + b(x + y) = q.$$

— Un point pesant est lancé avec une vitesse donnée dans une direction oblique; quelle est la ligne parcourue? On prend un point sur la courbe, et on demande la vitesse en ce point.

— On a une balance dont les deux bras sont inégaux; on pèse un poids P successivement dans l'un et l'autre des plateaux, et pour lui faire équilibre, il faut des poids dont la somme est A. On demande le rapport des bras de la balance. Connaissant le rapport des deux bras, pourra-t-on avec cette balance avoir exactement le poids d'un corps?

— Si, au milieu des côtés d'un triangle, on applique des forces perpendiculaires et proportionnelles aux côtés, elles se font équilibre. Si au lieu d'un triangle on a un polygone, l'équilibre subsiste-t-il?

— Résoudre le système

$$\begin{aligned} x + 2(y + z) &= c \\ y + 2(z + x) &= b \\ z + 2(x + y) &= a \end{aligned}$$

— Peut-on éliminer les côtés et trouver une relation entre les angles en partant des équations de la forme

$$a = b \cos C + c \cos B.$$

— Faire la somme des fractions suivantes:

$$\frac{a}{b} + \frac{a + r}{bq} + \frac{a + 2r}{bq^2} + \ldots + \frac{a + nr}{bq^n}.$$

— Démontrer que $N^3 - N$ est toujours divisible par 6, si N est un nombre entier.

— Résoudre les équations

$$x - y = a; \quad \sin^2 x - \sin^2 y = b.$$

— Sachant que $A + B + C = 180°$, rendre calculable par logarithmes l'expression

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C.$$

— On donne la base et la hauteur d'un triangle, ainsi que la différence des angles à la base; calculer les autres éléments.

— Soit a le chiffre des unités, b le chiffre des dizaines, c le chiffre des centaines, d le chiffre des mille d'un nombre, etc. Démontrer que le nombre sera divisible par 4 si $a + 2b$ est divisible par 4; le nombre sera divisible par 8 si $a + 2b + 4c$ est divisible par 8; il sera divisible par 16 si $a + 2b + 4c + 8d$ est divisible par 16, etc. Généraliser la règle à trouver.

QUESTIONS D'EXAMEN

Démontrer que, pour diviser un polynôme A *par le produit* BCD *de divers polynômes, il suffit de diviser* A *par* B, *le quotient par* C, *et le nouveau quotient par* D, *même lorsque les divisions successives donnent des restes.*

Pour démontrer ce théorème, je rappellerai que, si entre quatre polynômes entiers M, N, P, R, j'ai l'identité

$$M = NP + R$$

et si, en outre, le degré de R est inférieur à celui de N, cela m'apprend que, en divisant M par N, j'obtiendrai pour quotient P et pour reste R.

Cela posé, j'effectue les divisions comme l'indique l'énoncé; j'ai en appelant Q, Q′, Q″ les quotients successifs

$$A = BQ + R,$$
$$Q = CQ' + R',$$
$$Q' = DQ'' + R'';$$

je dis que, si je divisais directement A par le produit BCD, j'aurais Q″ pour quotient; en effet, en remplaçant dans la première identité successivement Q et Q′ par leur valeur, j'ai

$$A = BCD.Q'' + (BCR'' + BR' + R).$$

Il suffit donc de démontrer que le degré de la quantité entre parenthèses est moindre que le degré de BCD. Soient p, p', p'', les degrés respectifs des facteurs B, C, D; alors, BCD est du degré $p + p' + p''$. (Je suppose implicitement que les polynômes considérés sont entiers, et par suite que leurs degrés sont positifs.) Le degré de R″ est au plus égal à $p'' - 1$; celui de R′ est au plus égal à $p' - 1$, et celui de R est au plus $p - 1$; donc les trois termes qui composent la somme entre parenthèses ont respectivement des degrés inférieurs à $p + p' + p''$. La quantité entre parenthèses est donc d'un degré inférieur à celui de BCD. Donc, si je divise le polynôme A par BCD, j'aurai bien comme quotient Q″, c'est-à-dire le même quotient que m'avait donné la suite des divisions partielles par les divers facteurs B, C, D.

— *Démontrer que, pour extraire la racine* mnp *d'un nombre* A *à une unité près, il suffit d'extraire la racine* m *de* A *à une unité près, la racine* n *du résultat, et ainsi de suite.*

Je vais démontrer ce théorème d'abord pour le cas où l'indice est un produit de deux ou de trois facteurs, et démontrer ensuite que si la proposition est supposée vraie pour le cas de h facteurs, elle est vraie aussi pour $h + 1$ facteurs.

D'abord, je me propose d'extraire la racine np de A; je prends la racine n de A à une unité près; soit a cette racine; puis je prends la racine p de a à une unité près; soit a_1 cette racine; je dis que a_1 est la racine np de A à une unité près; en effet, j'ai, par définition,

$$a^n \leq A < (a + 1)^n$$
$$a_1^p \leq a < (a_1 + 1)^p$$

En considérant d'abord les premiers et les seconds membres j'aurai
$$a_1^{np} \leq a^n$$
et par suite
$$a_1^{np} \leq A.$$

D'autre part a et $(a_1 + 1)^p$ étant des nombres entiers, j'ai

$$a + 1 \leq (a_1 + 1)^p.$$

Donc
$$(a + 1)^n \leq (a_1 + 1)^{np}.$$

Donc j'ai bien

$$a_1^{np} \leq A \leq (a_1 + 1)^{np}.$$

En second lieu, si j'appelle a_2 la racine q à une unité près de a_1, j'ai

$$a_2^q \leq a_1 \leq (a_2 + 1)^q .$$

D'après cela, je vois immédiatement que j'ai

$$a_2^{npq} \leq A,$$

et comme
$$a_1 + 1 \leq (a_2 + 1)^q ,$$
il résulte de ce qui précède que

$$(a_1 + 1)^{np} \leq (a_2 + 1)^{npq}.$$

Donc j'ai bien

$$a_2^{npq} \leq A < (a_2 + 1)^{npq}.$$

En suivant le même raisonnement, je verrai que si j'ai, en appliquant la méthode précédente,

$$a_h^{np\ldots q} \leq A < (a_h + 1)^{np\ldots q}$$

en appelant α la racine r de ce nombre à une unité près, comme j'aurai $\alpha \leq a_h < (\alpha + 1)^r$

et que, d'autre part, j'ai

$$a_h + 1 \leq (\alpha + 1)^r,$$

j'aurai $\alpha^{np\ldots qr} \leq A < (\alpha + 1)^{np\ldots qr}$.

Donc, j'aurai bien extrait, à une unité près, la racine d'ordre $(np\ldots qr)$ du nombre A.

Le théorème est donc démontré.

— *Soient* a, b, a′, b′ *quatre nombres entiers; soit* p *un nombre premier avec chacun d'eux; si* p *divise* ab′ — ba′ *et* a — a′, *il divise* b — b′.

En effet, p, divisant $a - a'$, divisera $b(a - a')$. Donc il divisera $ab' - ba' - b(a - a') = a(b' - b)$.

Mais, par hypothèse, p est premier avec a; donc il divise $(b' - b)$ et par suite $(b - b')$.

— *Étant données deux fractions* $\frac{a}{a'}$ *et* $\frac{b}{b'}$, *si l'on a*

$$ab' - ba' = -1,$$

la fraction la plus simple comprise entre $\frac{a}{a'}$ *et* $\frac{b}{b'}$ *sera*

$$\frac{a+b}{a'+b'}.$$

En effet, soit $\frac{p}{p'}$ une fraction telle que l'on ait

$$\frac{a}{a'} < \frac{p}{p'} < \frac{b}{b'}.$$

La fraction $\frac{p}{p'}$ peut être inférieure ou supérieure à la fraction $\frac{a+b}{a'+b'}$. Je dis que, dans tous les cas, on a

$$p > a + b; \quad p' > a' + b'.$$

Premier cas. — On a $\frac{p}{p'} < \frac{a+b}{a'+b'}$.

On en tire $\frac{a}{a'} < \frac{p}{p'} < \frac{a+b}{a'+b'}$,

d'où $$\frac{p}{p'} - \frac{a}{a'} < \frac{a+b}{a'+b'} - \frac{a}{a'}.$$

On en tire, en réduisant au même dénominateur, et tenant compte de la relation donnée dans l'hypothèse

$$\frac{a'p - ap'}{p'} < \frac{1}{a'+b'}.$$

Or $pa' - ap'$ est un nombre entier, au moins égal à l'unité; donc on aura, *à fortiori*, $\frac{1}{p'} < \frac{1}{a'+b'}$

ou $$p' > a' + b'.$$

On en déduit, en remplaçant p' par une quantité plus petite,

$$\frac{a}{a'} < \frac{p}{a'+b'},$$

ou $$aa' + b'a < pa'.$$

Mais $$b'a = b'a - 1;$$

donc $$a'(a+b) < pa' + 1$$

ou enfin $$a + b < p + \frac{1}{a'}.$$

Mais $a + b$ et p sont entiers ; donc on aura bien

$$p > a + b.$$

Deuxième cas. — Si l'on a

$$\frac{a+b}{a'+b'} < \frac{p}{p'} < \frac{b}{b'},$$

on aura

$$\frac{b}{b'} - \frac{a+b}{a'+b'} > \frac{b}{b'} - \frac{p}{p'},$$

ou, comme précédemment,

$$\frac{1}{a'+b'} > \frac{bp' - pb'}{p'} > \frac{1}{p'}.$$

Donc $$a' + b' < p';$$

puis on aura

$$\frac{a+b}{a'+b'} < \frac{p}{p'} < \frac{p}{a'+b'}.$$

D'où l'on tire $$a + b < p.$$

— *Trouver le produit de tous les diviseurs d'un nombre donné* N.

Nous savons que si l'on a

$$N = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma},$$

le nombre de ses diviseurs est égal à

$$(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$$

De plus, à tout diviseur moindre que $\sqrt{N}$, correspond un diviseur plus grand, et leur produit est égal à N. Donc le produit cherché est égal à

$$\sqrt{N^{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)}}.$$

Ce nombre est entier, puisque si N n'est pas un carré parfait, l'un au moins des facteurs $(\alpha+1)$, $(\beta+1)$, $(\gamma+1)$ est pair.

Si $N = A^2$, on sait que le nombre des diviseurs est impair; mais alors on peut écrire, pour le produit,

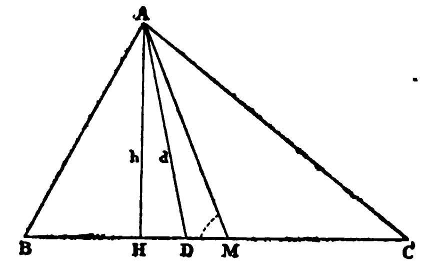
$$A^{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)}$$

qui est encore un nombre entier, et qui rentre dans la formule précédente.

QUESTION 301

Solution par M. Debray, à Chauvency-Saint-Hubert.

Construire un triangle connaissant un angle A, *la bissectrice* d *et la médiane* m *partant du sommet de cet angle.*



Soient ABC le triangle cherché, AH la hauteur, AD la bissectrice, AM la médiane partant du sommet de l'angle A.

On a

$$\sin M = \frac{h}{m} \text{ (1)}; \quad \cos \frac{\beta}{2} = \frac{h}{d} \text{ (2)}; \ \beta = B - C;$$

$$\cos A = \frac{\cos (M + \beta)}{\cos M} = \cos \beta - \sin \beta \operatorname{tg} M;$$

d'où $\operatorname{tg} M = \dfrac{\cos\beta - \cos A}{\sin\beta}$; (3)

divisant membre à membre les égalités (1) et (2)

$$\frac{m \sin M}{d} = \cos\frac{\beta}{2}. \qquad (4)$$

Les égalités (3) et (4) résolvent le problème. Ce sont deux équations à deux inconnues qu'il suffit de résoudre.

L'angle M étant déterminé, la hauteur est connue et le problème s'achève facilement.

Il suffit de mener la bissectrice de l'angle BAC, puis du point A avec h pour rayon de décrire une circonférence à laquelle on mènera du point D une tangente qui sera le troisième côté du triangle.

Le problème a deux solutions quand on peut mener deux tangentes à la circonférence; c'est le cas ordinaire.

Si $h = m$, c'est-à-dire quand le triangle demandé est isoscèle, le problème n'a qu'une solution.

Si $h > o$, le point D est à l'intérieur de la circonférence et le problème n'a plus de solution.

NOTA. — Ont résolu la même question :
MM. Delpit, école préparatoire Sainte-Barbe; Henry, à Bréchincourt; Blessel, à Paris; H. Bourget, à Aix.

QUESTION 325

Solution par M. BLESSEL, piqueur des Ponts et Chaussées.

Résoudre l'équation $\sqrt[n]{\dfrac{a+x}{a}} + \sqrt[n]{\dfrac{a+x}{x}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{b}}$.

Cette équation peut s'écrire

$$\frac{\sqrt[n]{bx(a+x)}}{\sqrt[n]{abx}} + \frac{\sqrt[n]{ax(a+x)}}{\sqrt[n]{abx}} = \frac{\sqrt[n]{ax^2}}{\sqrt[n]{abx}};$$

d'où $$\sqrt[n]{bx(a+x)} + \sqrt[n]{ax(a+x)} = \sqrt[n]{ax^2}$$

et $$\sqrt[n]{x(a+x)}[\sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{a}] = \sqrt[n]{ax^2}.$$

Élevant à la puissance n, supprimant la solution $x = o$,

on a $$(a+x)(\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{a})^n = ax,$$

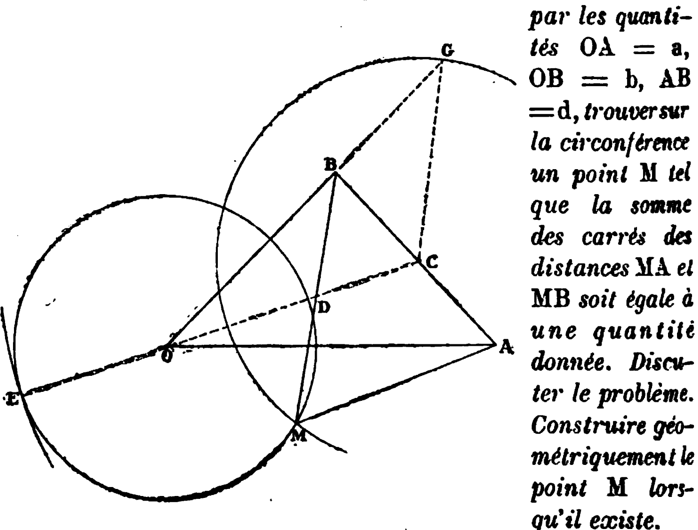
d'où $$x = \frac{a(\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{a})^n}{a-(\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{a})^n}.$$

NOTA. — La même question a été résolue par M. Bonieux, de Riom.

QUESTION 326

Solution par M. RIVARD, élève au Lycée du Mans.

Étant donné un cercle O *et deux points extérieurs* A *et* B *donnés par les quantités* OA = a, OB = b, AB = d, *trouver sur la circonférence un point* M *tel que la somme des carrés des distances* MA *et* MB *soit égale à une quantité donnée. Discuter le problème. Construire géométriquement le point* M *lorsqu'il existe.*



On sait que le lieu des points M tels que l'on ait $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = K^2$ est une circonférence ayant pour rayon

$$\sqrt{\frac{2K^2 - d^2}{4}}$$

Les points communs à cette circonférence et à la circonférence donnée répondent à la question.

Soit $\sqrt{\frac{2K^2}{4} - \frac{d^2}{4}} = m$ et C le milieu de AB. Menons CO. Cette ligne coupe la circonférence en deux points D et E.

Si l'on a $m >$ CE, pas de solution.

Pour $m =$ CE, une seule solution, le point M vient en E.

Si CE $> m >$ CD, deux solutions.

Pour $m =$ CD une solution.

Pour $m <$ CD pas de solution.

Construction. — m est l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui aurait pour côtés de l'angle droit $\frac{BC}{2}$ et $K\sqrt{2}$. Cette construction est indiquée sur la figure.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Dupuy, de Grenoble; Fiévet, de Lille; Joly, de Tarbes; Provost, du Mans.

QUESTION 327

Solution par M. TINEL, élève au lycée Corneille (Rouen).

On donne un cercle C, *une corde* AB *de ce cercle et sur* AB *un point* P. *Mener par le point* P *une corde* XPY *telle que si on abaisse* XX′ *et* YY′ *perpendiculaires sur* AB, *on ait* XX′ — YY′ = D. (Le lecteur est prié de faire la figure.)

Soient I le pied de la perpendiculaire abaissée de C sur XY; CP $= d$, PX′ $= x$, PY′ $= y$, XPX′ $= \alpha$, CPX′ $= \omega$.

On connaît d, D et ω; calculons α. Les triangles XPX′, YPY′ donnent d'abord

$$\operatorname{tg} \alpha (x - y) = D; \qquad (1)$$

on a ensuite, d'après une propriété des sécantes,

$$\frac{xy}{\cos^2 \alpha} = R^2 - d^2; \qquad (2)$$

enfin le triangle rectangle XCI donne

$$R^2 - \frac{(x+y)^2}{4\cos^2 \alpha} = d^2 \sin^2 (\omega - \alpha). \qquad (3)$$

Remplaçons dans (1) élevée au carré, et (3), $\frac{xy}{\cos^2 \alpha}$ par sa valeur (2), nous obtiendrons les deux équations

$$\text{Sin}^2 \alpha \left(\frac{x^2 + y}{\cos^2\alpha} - 2R^2 + 2d^2\right) = D^2$$

$$2R^2 = 2d^2 - \frac{x^2 + y^2}{\cos^2 \alpha} = 4d^2 \sin(\omega - \alpha).$$

La seconde de ces équations donne la valeur de $\frac{x^2 + y^2}{\cos^2\alpha}$; portant cette valeur dans la première équation et simplifiant, on a $$d \sin(2\alpha - \omega) = D - d \sin \omega,$$ équation qui fait connaître $2\alpha - \omega$ et par suite α.

Pour que le problème soit possible il faut que

$$\frac{D - d \sin \omega}{d} \geqq 1$$

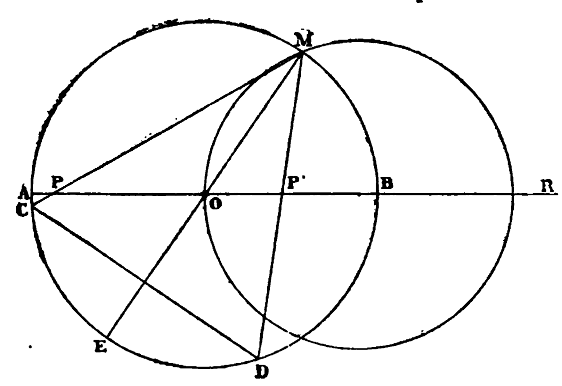
ou $$D \geqq 2d \cos^2 \frac{\omega}{2}.$$

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Joly, de Tarbes; Ville, au lycée Henri IV; Henri, à Bréchincourt, et par M. Van Aubel, de Liège, qui nous en a envoyé une solution géométrique très simple.

QUESTION 328

Solution par M. E. VAN AUBEL, élève à l'Athénée de Liège.

On donne un cercle, un diamètre et deux points P *et* P' *sur ce*



diamètre, de part et d'autre du centre et à des distances inégales

de ce centre. Mener par P *et* P′ *deux cordes égales qui se coupent sur la circonférence.* (Lieber)

Soient MC, MD les deux droites qui répondent à la question. Le triangle MCD étant isoscèle, on a : arc MAC = arc MBD ou arc CE = arc ED; ME est donc bissectrice de l'angle CMD. Par suite le triangle MPP′ donne

$$\frac{MP}{MP'} = \frac{OP}{OP'}.$$

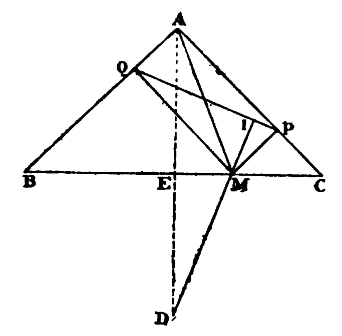
Donc le point M se trouve à l'intersection de la circonférence O et de celle qui a pour diamètre la droite OR, R étant le conjugué harmonique de O par rapport à PP′.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Dupuy, de Grenoble; Tinel, de Rouen; Baudoin, de Beauvais; Vitte, du lycée Henri IV; Leclair, à Passy.

QUESTION 336

Solution par M. Joly, élève du Lycée de Tarbes.

Étant donné un triangle rectangle isoscèle ABC, *d'un point* M *pris sur l'hypoténuse* BC, *on abaisse des perpendiculaires* MP, MQ *sur les côtés* AC, AB. *On joint* PQ *et du point* M *on abaisse une perpendiculaire sur* PQ. *Démontrer que cette perpendiculaire passe par un point fixe.*



Joignons AM. La perpendiculaire IM sur PQ rencontre la hauteur AE du triangle ABC en un point D. Les triangles AEM, MED sont égaux : car AME = EMD = IMC. On a IMP = QPA = QMA. Il en résulte AE = ED. Le point D est donc fixe.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Rivard, au Mans; Vitte, Lapareillé, Lefèvre d'Hellencourt, au lycée Henri IV; Montéron, au lycée Louis-le-Grand; H. Bourget, à Aix; Forceville, à Saint-Omer; Tinel, à Rouen; Fiévet, à Lille; Simonet, à Neufchâteau (Vosges); Baudoin, à Beauvais; Leclair, à Passy; Barthe, à Tarbes; Prost à Lons-le-Saunier; Moreau, à Châteauroux.

QUESTION 337

Solution par M. A. JOLY, élève du Lycée de Tarbes (Classe de M. Escary).

Dans un triangle on appelle p *le demi-périmètre,* r *le rayon du cercle inscrit ;* r′, r″, r‴ *les rayons des cercles ex-inscrits. Démontrer que l'on a*

1° $$p^2 \geqq 27r^2 ;$$

2° $$2p = 3\sqrt{\frac{r'r''r'''}{r}} - \sqrt{\frac{rr''r'''}{r'}} - \sqrt{\frac{rr'r'''}{r''}} - \sqrt{\frac{rr'r''}{r'''}}.$$

PREMIÈRE SOLUTION

On a $$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}.$$

La question revient alors à vérifier l'inégalité

$$p^3 > 27(p-a)(p-b)(p-c)$$

que l'on peut écrire

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 > (a+b-c)(b+c+a)(a+c-b).$$

Or la moyenne géométrique de plusieurs nombres est inférieure à leur moyenne arithmétique, on a

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 > abc$$

et l'on sait que si a, b, c sont positifs et inégaux,

$$abc > (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

L'inégalité proposée est donc satisfaite.

Si $a = b = c$, cette inégalité devient une égalité.

DEUXIÈME SOLUTION

On sait que dans tout triangle équilatéral

$$p^2 = 27r^2.$$

Or le triangle équilatéral est de tous les triangles de même périmètre celui qui a le plus grand cercle inscrit. quand ce triangle deviendra scalène on aura donc

$$p^2 > 27r^2.$$

On a

$$S = \overset{(1)}{\sqrt{rr'r''r'''}} = \overset{(2)}{pr} = \overset{(3)}{(p-a)r'} = \overset{(4)}{(p-b)r''} = \overset{(5)}{(p-c)r'''}.$$

En combinant (1) avec les expressions qui suivent on tire :

$$3\sqrt{\frac{r'r''r'''}{r}} = 3p; \quad \sqrt{\frac{rr''r'''}{r'}} = p - a$$

$$\sqrt{\frac{rr'r'''}{r''}} = (p-b); \quad \sqrt{\frac{rr'r''}{r'''}} = p - c;$$

d'où, retranchant les trois dernières égalités obtenues de la première, et simplifiant :

$$3\sqrt{\frac{r'r''r'''}{r}} - \sqrt{\frac{rr''r'''}{r'}} - \sqrt{\frac{rr'r'''}{r''}} - \sqrt{\frac{rr'r''}{r'''}} = 2p.$$

Nota.— Ont résolu la même question : MM. Rivard, au Mans; Lapareillé, Noir lycée Henri IV; Baudoin, à Beauvais; H. Bourget, à Aix; Prost, à Lons-le-Saunier; Leglos, à Avignon; Moreau à Châteauroux; Fiévet, à Lille.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

BESANÇON

On donne une pyramide SABCD, à base carrée, dont la hauteur et la demi-diagonale sont h et a. Du sommet A, on abaisse une perpendiculaire AK sur l'arête opposée SC ; et par cette perpendiculaire on mène un plan perpendiculaire à SC ; ce point détermine dans la pyramide une section AFKG. On demande le volume ABCDFGK. Application : $h = 4$; $a = 1$.

— On donne un quadrilatère ABCD dont l'angle B est droit ; les côtés AB, BC, CD, DA sont respectivement égaux à 28, 32, 17 et 7 ; trouver l'angle des diagonales.

— On donne un plan, et un point non situé dans le plan ; on demande de faire tourner le point autour d'un axe vertical de façon à l'amener dans le plan.

— Résoudre un triangle connaissant un côté, un angle adjacent et le rayon du cercle inscrit.

— Étant donné un cercle de rayon OA = R, on fait un angle OAP = α, un autre angle OAM = β. Trouver la surface mixtiligne APM.

CAEN

Les distances d'un point M à la hauteur AH et à la base BC d'un triangle ABC sont x et y ; on connaît AH = h ; HB = b ; HC = c ;

On demande de calculer en fonction de x et de y la somme des carrés des dis-

tances du point H aux trois sommets du triangle, et de trouver quelles valeurs on doit donner à x et à y pour que cette somme soit minima.

— On a emprunté une somme de 100000 francs, que l'on rembourse par annuités de 6000 francs; le taux étant 5 o/o on demande au bout de combien d'années la dette sera amortie.

DIVERS

Deux triangles MAB, NAB, ont pour base commune AB ; on a en outre

$$MA = MB = NA = AB,$$
$$2NB = AB,$$

et l'angle dièdre MABN que forment leurs plans est de 45 degrés. Construire l'angle MAN, et la distance MN. *(Dijon.)*

— Étant donnée une droite AB de longueur a, la partager par un point C en deux parties telles que si sur chacune d'elles on construit un triangle équilatéral, la somme des aires de ces triangles soit minima. *(Toulouse.)*

— Inscrire un rectangle dans un triangle de base et de hauteur données, de telle manière que le volume engendré par le rectangle tournant autour de la base du triangle soit maximum. *(Toulouse.)*

— On donne une circonférence de rayon 1 ; calculer le côté du polygone de vingt-quatre côtés inscrit dans cette circonférence. *(Toulouse.)*

— Résoudre $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$. *(Toulouse.)*

— Maximum et minimum de $\frac{R}{x} + \frac{r}{d - x}$. *(Rennes.)*

— Calculer la hauteur, le rayon du cercle de la base et l'angle au sommet d'un cône, sachant : 1° que le volume est de 1 litre ; 2° que la surface convexe est à la surface de base comme le côté du triangle équilatéral est au rayon du cercle circonscrit à ce triangle. *(Montpellier.)*

— Maximum et minimum de $\frac{x^2}{1 + x^2}$, et de $\frac{\cos x}{1 + \cos^2 x}$ *(Montpellier.)*

— On fait tendre x vers l'unité et l'on demande la valeur limite de l'expression

$$\frac{x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}.$$

(Nancy.)

— Résoudre un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse a et la différence m des deux autres côtés. Condition de possibilité des triangles. Dans le cas particulier où $m = \frac{7}{13} a$, calculer les angles du triangle et le rayon du cercle inscrit. *(Montpellier.)*

— Étant donnés les quatre côtés d'un trapèze, calculer les diagonales et la surface. *(Nancy.)*

— Déterminer entre quelles limites peut varier la fonction $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x}$. *(Poitiers.)*

— Si par un point extérieur à une sphère on mène trois sécantes, démontrer que le produit des distances de ce point aux deux points d'intersection de chaque sécante avec la sphère est constant. La réciproque est-elle vraie? *(Poitiers.)*

— **Condition d'équilibre de la vis, déduite du principe de l'égalité du travail moteur et du travail résistant.** *(Marseille.)*

— **Envelopper un cercle O dans une couronne de** n **cercles extérieurs égaux entre eux, tangents entre eux et au cercle donné. Calculer les rayons des cercles extérieurs** au moyen du rayon R du cercle donné et du côté a du polygone de n côtés inscrit dans ce cercle. Considérer le cas où il y aura six cercles extérieurs. *(Marseille.)*

— Démontrer que si une circonférence roule dans l'intérieur d'un cercle de rayon double, un point quelconque de la circonférence mobile décrit un diamètre de la circonférence fixe. *(Marseille.)*

— Pour mesurer la distance d'un point A à un point inaccessible F, on prend sur une perpendiculaire AB à AF une longueur AB $= c$; puis on fait en A, avec AB, un angle BAC $= \alpha$; on mesure la longueur AC $= b$ dont l'extrémité C est à la rencontre de BF et de AC; calculer AF. *(Grenoble.)*

— Dans la fraction $\frac{5x^2 + 16x - 4}{x^2 + 4}$, on suppose que x prenne toutes les valeurs réelles positives ou négatives et on demande de déterminer : 1° le maximum et le minimum de cette fraction, et les valeurs correspondantes de x; 2° les valeurs de x pour lesquelles la fraction est négative. *(Grenoble.)*

— Étant données les bases et la hauteur d'un trapèze, calculer la ligne, parallèle aux bases, qui partage la surface du trapèze en deux parties dans un rapport donné. *(Grenoble.)*

— On donne deux rectangles de même périmètre; les côtés de l'un sont 8 et 4; la surface du second est la moitié de la surface du premier; calculer ses côtés. *(Clermont.)*

— Trouver trois nombres en progression géométrique, tels que leur somme soit égale à a, et la somme de leurs carrés à b. Appliquer à $a = 19$; $b = 133$. *(Clermont.)*

— Sachant que $\cos a = \frac{1}{5}$, calculer $\sin \frac{a}{2}$, $\cos \frac{a}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$. *(Clermont.)*

— Maximum de $\sin x + \sin y$, sachant que $x + y = a$. *(Clermont.)*

— Sur le prolongement du diamètre d'une circonférence de rayon R, on prend de part et d'autre de la circonférence deux points A et B, tels que AB $= d$, et on mène les tangentes AA′, BB′; que doivent être les distances AO et BO pour que l'arc A′B′, en tournant autour de AB, engendre une zone de surface donnée? *(Rennes.)*

— Dans un triangle rectangle ABC on donne l'hypoténuse BC $= a$, et l'angle B. Par un point D, pris sur le prolongement de BC, on mène à cette ligne une perpendiculaire DX autour de laquelle on fait tourner le triangle; on demande de déterminer le point D par la condition que le volume engendré soit double de celui qu'engendrerait le même triangle en tournant autour de CK perpendiculaire à BC menée par le point C. *(Grenoble.)*

RECHERCHES SUR UNE FAMILLE DE CONIQUES

Par **M. L. Ibach**, étudiant à la Faculté des sciences de Marseille.

I. — *Le lieu géométrique des points tels que leurs polaires par rapport à deux coniques* U, V *se coupent sous un angle donné* α *est une conique.*

En effet, xyz étant les coordonnées d'un point du lieu, les polaires ont pour équation

$$xU'_x + yU'_y + zU'_z = 0, \quad xV'_x + yV'_y + zV'_z = 0.$$

Exprimant que ces droites se coupent sous l'angle α, on trouve

$$U'_x V'_y - V'_x U'_y + \text{tang}\,\alpha\,[U'_x V'_x + U'_y V'_y] = 0,$$

qui est une conique que je désigne par P_α de U et V. On peut l'écrire :

$$P_\alpha = P_0 + \text{tang}\,\alpha.\,P_{\frac{\pi}{2}} = 0 \ldots \quad (1)$$

Il serait bon de remarquer ici que le lieu se compose en réalité de deux coniques, tang α pouvant être précédée du double signe. Cependant lorsque α varie, l'équation (1) représente une famille de coniques dont nous allons étudier quelques propriétés.

II. — *Les coniques* P_α *de deux coniques* U, V, *sont circonscrites à un même quadrilatère.*

Cela résulte immédiatement de l'équation (1) qui montre de plus que ce quadrilatère est formé par les points communs à P_α et $P_{\frac{\pi}{2}}$. On pourrait donc établir de nouveaux théorèmes en appliquant aux courbes P_α toutes les propriétés des coniques passant par quatre points.

III.— *Le lieu des centres des coniques passant par l'intersection de deux coniques* U, V *est la courbe* P_0 *de ces deux coniques.*

L'équation générale étant $U + \lambda V = o$, on doit éliminer λ entre les deux égalités

$$U'_x + \lambda V'_x = o, \quad U'_y + \lambda V'_y = o,$$

ce qui donne

$$P_o = U'_x V'_y - V'_x U'_y = o, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On peut énoncer ce théorème d'une autre manière :

Les polaires des points de la (conique des neuf points) de deux coniques U,V, sont deux à deux parallèles.

Il en résulte évidemment que :

Le lieu du centre des coniques P de U et V est la conique P'_o des coniques P_o et $P_{\frac{\pi}{2}}$.

IV. — En employant la méthode des polaires réciproques on verrait aussi que

L'enveloppe des droites telles que la ligne joignant leurs pôles par rapport à deux coniques U, V, soit vue d'un point donné sous un angle α, est une conique dont l'équation tangentielle est de la forme

$$Q_o + \lambda Q_{\frac{\pi}{2}} = Q_\alpha = o \ldots . \qquad (2)$$

Q_o, $Q_{\frac{\pi}{2}}$ étant les équations tangentielles des coniques correspondant à $\alpha = o, \alpha = \frac{\pi}{2}$. En faisant varier α, (2) représentera une famille de coniques inscrites dans un même quadrilatère formé par les tangentes communes à $Q_o = o$ et $Q_{\frac{\pi}{2}} = o$.

En leur appliquant les propriétés des coniques tangentes à quatre droites, on aurait de nouveaux théorèmes; ainsi :

Le lieu des centres des coniques Q *de deux coniques est une ligne droite.......*

V. — Les formes de P_o et $P_{\frac{\pi}{2}}$ montrent que les courbes P de deux coniques passent par leurs centres, il en résulte que :

Les courbes P de deux coniques concentriques se

réduisent à des systèmes de droites, car elles doivent avoir un point double au centre commun.

En considérant les coniques P_0, $P_{\frac{\pi}{2}}$ d'une conique rapportée à ses axes et d'un cercle, on voit que la conique $P_{\frac{\pi}{2}}$ est homothétique à cette conique et qu'elle la coupe suivant la polaire du centre du cercle; que P_0 est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes de la conique. Ces résultats étant d'ailleurs indépendants du rayon du cercle, les courbes P d'une conique fixe et d'un cercle à centre fixe et rayon variable sont constantes.

On verrait de même que la courbe P_0 de deux cercles est la ligne des centres et que $P_{\frac{\pi}{2}}$ est le cercle décrit sur cette ligne prise comme diamètre, les courbes P étant évidemment les mêmes, quels que soient les rayons.

Les coniques P d'une parabole et d'une conique quelconque sont forcément des hyperboles, car elles doivent passer par le centre de la parabole qui est à l'infini.

VI. **Théorème.** — *Lorsque les coniques* U, V *se coupent sous l'angle* α, *la courbe* P_α *passe par leurs points communs.*

En effet, les polaires de ces points étant les tangentes aux coniques se coupent sous l'angle α d'après l'hypothèse. Il résulte de là un moyen d'exprimer que deux coniques se coupent sous l'angle α. Il suffit d'éliminer, en effet, x et y entre

$$U = 0, \quad V = 0, \quad P_\alpha = 0.$$

De même :

La condition pour que deux coniques soient tangentes, s'obtient en exprimant qu'il y a des solutions communes en x et y entre

$$U = 0, \; V = 0, \; P_0 = 0.$$

Enfin, celle qui indique que deux coniques sont orthogonales s'obtient en éliminant x et y entre

$$U = 0, \; V = 0, \; P_{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Lorsque deux coniques sont homofocales, la conique $P_{\frac{\pi}{2}}$

passe par leurs points communs : car, dans ce cas, elles se coupent orthogonalement.

VII. — Considérons maintenant un système de trois coniques U, V, W.

Théorème. — *Les coniques* P_α *de* U, V, P_β *de* V, W, $P_{\pi-\alpha-\beta}$ *de* W, U, *se coupent aux mêmes points.*

En effet, soit un point dont les polaires par rapport à U, V, W, sont (1), (2), (3). S'il est commun à $P_\alpha P_\beta$ (1), (2) secoupent sous l'angle α et (2), (3) sous l'angle β, mais comme (1), (2), (3) forment un triangle, (1), (3) se coupent sous l'angle $\pi - \alpha - \beta$, le théorème est donc démontré. Il en résulte : les coniques $P_{\frac{\pi}{2}}$ de U, V; V, W, ont leurs quatre points communs sur P_0 de U et W.

Les coniques P_0 de U, V, W considérées deux à deux se coupent aux mêmes points, qui sont aussi sur le Jacobien, car

$$J = \begin{vmatrix} U'_x & U'_y & U'_z \\ V'_x & V'_y & V'_z \\ W'_x & W'_y & W'_z \end{vmatrix} = \lambda_1 \underset{uv}{P_0} + \lambda_2 \underset{vw}{P_0} + \lambda_3 \underset{wu}{P_0}$$

VIII. — Les conditions pour que trois coniques U, V, W soient tangentes au même point s'obtiendront en éliminant xy entre

$$U = 0, \; V = 0, \; W = 0, \; P_{uv} = 0, \; P_{vw} = 0, \; P_{wu} = 0,$$

car, les coniques ayant même tangente au point commun, celui-ci doit appartenir aux courbes P_0. (Comme il ne sera plus question que des coniques P_0, P_{uv} indiquera la conique P_0 de U et V.) Ces conditions seront donc au nombre de quatre. En général les conditions pour que n coniques $U_1, U_2, \ldots U_n$ soient tangentes au même point, s'obtiendront en éliminant xy entre

$$U_1 = 0, \; U_2 = 0 \ldots\ldots U_n = 0, \; P_{u_1 u_2} = 0, \; P_{u_2 u_3} = 0 \ldots .$$

Le nombre des coniques P_0 étant $\dfrac{n(n-1)}{1-2}$, celui des coniques étant n, le nombre des conditions sera en général

de $\frac{n(n-1)}{1.2}+n-2$ ou $\frac{n(n+1)}{1.2}-2.$

IX. — ***Lieu des points d'un plan tels que leurs polaires par rapport à trois coniques*** U,V,W ***forment un triangle de surface donnée.***

Les polaires d'un point xyz étant

$$xU'_x+yU'_y+zU'_z=0,\quad xV'_x+yV'_y+zV'_z=0,$$
$$xW'_x+yW'_y+zW'_z=0,$$

la surface du triangle formé par ces droites est (voir au *Journal*, p. 164) :

$$\Sigma=\frac{\begin{vmatrix}U'_x & U'_y & U'_z\\ V'_x & V' & V'_z\\ W'_x & W'_y & W'_z\end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix}U'_x & U'_y\\ V_x & V'_y\\ W'_x & W'_y\end{vmatrix}}$$

Le dénominateur indiquant le produit des mineurs de la dernière colonne :

c'est-à-dire :

$$\Sigma=\frac{S^2}{P_{uv}P_{w}P_{wv}}\text{ ou encore }=\frac{S^2}{(UV)(VW)(WU)}.$$

L'équation du lieu sera donc

$$S^2=\Sigma.P_{uv}\,.\,P_{vw}P_{wu}$$

c'est-à-dire une courbe du sixième degré passant par les quatre points communs à $P_{uv}.P_{wu}P$. On obtiendrait de même la surface du quadrilatère formé par les quatre polaires d'un point par rapport à $U_1U_2U_3U_4$ en décomposant en triangles, on aurait des expressions de la forme

$$\Sigma=\frac{S_{134}}{P_{13}P_{34}P_{41}}-\frac{S_{123}^2}{P_{12}P_{23}P_{31}}$$

ou encore $$\Sigma_4=\frac{(134)^2}{(13)(34)(41)}-\frac{(123)^2}{(12)(23)(31)}$$

P_{12} ... désignant la conique P de U_1 et U_2 ...

On aurait autant de formes différentes de Σ_n que de combinaisons deux à deux avec les combinaisons trois à trois des quatre nombres 1.2.3.4. c'est-à-dire six manières différentes. On voit bien que ce raisonnement s'applique au polygone de n côtés formé par les polaires d'un point par

rapport à n coniques : U_1U_2 ..... U_n. On formera, en effet, la surface cherchée en faisant les combinaisons trois à trois des n nombres 1.2.3 ... n ; on prendra les Jacobiens correspondants qu'on élèvera au carré et qu'on divisera ensuite par le produit des coniques P_0 correspondant à la combinaison. On fera ensuite celles $(n-2)$ à $(n-2)$ des termes ainsi formés et on les joindra en leur donnant le signe $+$ ou $-$ sauf au premier. On aura ainsi des expressions de la surface, de forme

$$\sum_y = \frac{(1,\,3,\,n-p)^2}{(1,3)(3,\,n-p)(p-p,\,1)} - \frac{(1.2.3)^2}{(1.2)(2.3)(3.1)} \cdots\cdots$$

Le nombre de ces diverses expressions sera, comme nous venons de le dire, celui des combinaisons $n-2$ à $n-2$ des combinaisons trois à trois de n nombres. Or, ces dernières sont au nombre de

$$m = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.}.$$

Le nombre total N des expressions sera, par suite,

$$N = \frac{m(m-1)\,\ldots\,(m-n+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,..\,(n-2)}$$

$$= \frac{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}\left(\dfrac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} - 1\right)\cdots\cdots}{1.\quad 2.\quad 3..\,(n-2)}$$

Si, dans la formule précédente, on considère Σn comme une constante, elle représentera le lieu des points tels que leurs polaires par rapport à n coniques forment un polygone de surface constante. Or, les dénominateurs étant chassés, le second membre a pour degré celui du produit $P_{12}\,P_{23}\ldots$ c'est-à-dire $n(n-1)$ et le premier

$$6 + \left[\frac{n(n-1)}{1\,.\,2} - 3\right]2 = n(n-1).\ \text{Donc :}$$

Théorème. — *Le lieu des points tels que leurs polaires par rapport à* n *coniques* $U_1\ U_2 \ldots U_n$ *forment un polygone de surface donnée est en général de degré* $n(n-1)$.

Dans le cas de $n = 3$, on a bien six, ce que nous avons trouvé directement.

... Nous étudierons en dernier lieu la question suivante:

PROBLÈME. — *Étant données* n *coniques* $U_1 U_2 \ldots U_n$ *dans un plan, déterminer le nombre de conditions qu'elles doivent remplir pour qu'il puisse exister un point dont les* n *polaires forment un polygone régulier.*

La somme des angles du polygone sera évidemment $(n-2)\pi$, et comme il y a n angles égaux, chacun d'eux sera égal à
$$\pi - \frac{2\pi}{n}.$$

Le point cherché devra donc se trouver sur les courbes $P_{\pi - \frac{2\pi}{n}}$ de toutes les coniques considérées deux à deux. On aura donc un système d'équations de la forme
$$P_{(13)\,\pi-\frac{2\pi}{n}} = 0$$
$$P_{(22)\,\pi-\frac{2\pi}{n}} = 0$$
$$\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots$$
qui seront au nombre de $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$, avec deux inconnues seulement : x, y. En les éliminant on aura pour le nombre de conditions cherché:
$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - 2 - 1,$$
car dans les équations précédentes il y en a une qui rentre forcément dans les autres.

En particulier si $n = 3$, on trouve zéro, ce qui prouve que ce problème est toujours possible dans ce dernier cas.

ÉTUDE SUR LES COORDONNÉES TANGENTIELLES
ET LEURS APPLICATIONS

Par M. E. J. Boquel.

(*Suite et fin* ; voir page 360).

L'étude détaillée des théorèmes qui résultent du principe de dualité dépasserait de beaucoup les limites que nous

sommes forcé de nous imposer dans ce journal ; un pareil travail ne pourrait même pas être complet sans prendre des proportions volumineuses ; mais, pour faire ressortir la fertilité du principe de dualité, nous choisirons quelques exemples parmi les plus intéressants, et nous montrerons comment des propositions qu'il serait difficile d'établir directement résultent presque immédiatement de l'interprétation des équations en coordonnées tangentielles.

On sait que *les polaires d'un point du plan, par rapport aux différentes coniques circonscrites à un quadrilatère donné, passent toutes par un même point.* — Ce théorème résulte de ce que l'équation de la polaire d'un point (x_0y_0) par rapport aux coniques comprises dans l'équation $MN + \lambda PQ = o$ ne contient qu'un paramètre arbitraire au premier degré.

Or l'équation $MN + \lambda PQ = o$, en coordonnées tangentielles, représente, comme nous l'avons vu, les coniques inscrites dans le quadrilatère dont les sommets opposés ont pour équations $M = o$, $N = o$, d'une part, et $P = o$, $Q = o$, d'autre part. L'équation du pôle d'une droite donnée (u_0v_0) par rapport à ces courbes est exactement de la même forme que l'équation de la polaire du point (x_0y_0) dans le théorème précédent ; elle ne contient donc qu'un paramètre arbitraire au premier degré ; donc tous les points qu'elle représente sont sur une même ligne droite. On peut donc énoncer le théorème suivant, corrélatif du premier : *Les pôles d'une même droite, par rapport aux coniques inscrites dans un quadrilatère donné, sont en ligne droite.*

Il en résulte immédiatement que *le lieu des centres des coniques inscrites dans un quadrilatère donné est une ligne droite ;* car la polaire s'éloignant à l'infini, son pôle devient le centre de la conique.

Parmi les coniques inscrites dans le quadrilatère donné, si l'on considère en particulier les trois coniques infiniment aplaties qui sont les trois diagonales de ce quadrilatère, leur centre est au milieu de chacune d'elles ; le lieu des centres est donc la droite qui joint les milieux des diagonales ; d'où il résulte incidemment que les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite.

THÉORÈME CORRÉLATIF DU THÉORÈME DE DESARGUES. — *Les tangentes menées par un point fixe à toutes les coniques inscrites dans un quadrilatère sont en involution.* — Le théorème général de Desargues dit que *les coniques circonscrites à un quadrilatère déterminent sur une droite fixe des segments en involution*. La démonstration résulte de ce que les points situés à l'intersection de la droite fixe avec les coniques $MN + \lambda PQ = 0$ satisfont à une relation de la forme $aK^2 + bK + c + \lambda(a'K^2 + b'K + c') = 0$.

En coordonnées tangentielles l'équation $MN + \lambda PQ = 0$ représente toutes les coniques inscrites dans un quadrilatère; les tangentes issues d'un point fixe satisfont donc, en vertu du même calcul, à une relation de la forme $aK^2 + bK + c + \lambda(a'K^2 + b'K + c') = 0$; ces tangentes sont donc en involution; c. q. f. d.

Parmi les coniques inscrites dans le quadrilatère ABCD, si l'on considère en particulier celles qui sont formées chacune de deux sommets opposés, le théorème précédent engendre, comme corollaire immédiat, le suivant :

Les droites qui joignent un point du plan aux sommets opposés d'un quadrilatère et les tangentes menées de ce point à une conique inscrite dans le quadrilatère forment involution. — Ces théorèmes ont de nombreuses conséquences, qui sont pour la plupart très connues, et dans le détail desquelles nous n'avons pas d'ailleurs le loisir d'entrer.

— *Si l'on considère deux angles circonscrits à une conique, leurs sommets et les contacts de leurs côtés appartiennent à une même conique.* — Soit $\alpha\beta + K\gamma^2 = 0$ l'équation d'une conique tangente aux deux droites $\alpha = 0$, $\beta = 0$, aux points où la droite $\gamma = 0$ rencontre ces deux droites; l'équation de la polaire du sommet $(x_1 y_1 z_1)$ du second angle par rapport à cette courbe est $x_1 f'_x + y_1 f'_y + z_1 f'_z = 0$. L'équation générale des coniques passant par les rencontres des deux cordes de contact avec la conique considérée est

$$\alpha\beta + K\gamma^2 + \lambda\gamma\,(x_1 f'_x + y_1 f'_y + z_1 f'_z) = 0.$$

Si l'on exprime que cette conique passe par le sommet du premier angle ($\alpha = 0$, $\beta = 0$), on aura :

$$K\gamma^2 + \lambda\gamma\,(x_1 . 2K\gamma\gamma'_x + y_1 . 2K\gamma\gamma'_y + z_1 . 2K\gamma\gamma'_z) = 0$$

ou

$$1 + 2\lambda\,(x_1\gamma'_x + y_1\gamma'_y + z_1\gamma'_z) = 0.$$

L'équation de la conique dont il s'agit est donc

$$2(\alpha\beta + K\gamma^2)(x_1\gamma'_x + y_1\gamma'_y + z_1\gamma'_z) - \gamma\,(x_1 f'_x + y_1 f'_y + z_1 f'_z) = 0$$

si l'on y remplace x, y, z par $x_1 y_1 z_1$ et que l'on remarque que $x_1 f'_{x_1} + y_1 f'_{y_1} + z_1 f'_{z_1} = 2f(x_1 y_1 z_1) = 2(\alpha_1\beta_1 + K\gamma_1^2)$ et que $x_1\gamma'_{x_1} + y_1\gamma'_{y_1} + z_1\gamma'_{x_1} = \gamma_1$

on a identiquement

$$2(\alpha_1\beta_1 + K\gamma_1^2)\gamma_1 - \gamma_1 . 2(\alpha_1\beta_1 + K\gamma_1^2) = 0.$$

La conique passe donc aussi par le sommet du second angle.

Le même calcul, en coordonnées tangentielles, signifie que la conique tangente aux côtés des deux angles et à la corde des contacts du premier, est aussi tangente à la corde des contacts du second. Ce calcul démontre donc le théorème suivant, corrélatif de celui que nous avons énoncé :

Si l'on considère deux angles circonscrits à une conique, les quatre côtés des deux angles, et leurs cordes de contact sont six tangentes à une même conique.

— On démontre que *si deux triangles sont conjugués par rapport a une conique, leurs six sommets appartiennent à une même conique.* — Transportons la démonstration, sans y rien changer, dans le système des coordonnées tangentielles; on aura ainsi un nouvel exemple de ce fait que les démonstrations faites pour les théorèmes directs n'ont pas besoin d'être répétées pour leurs corrélatifs.

$U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ étant les équations des trois sommets de l'un des triangles donnés, l'équation d'une conique conjuguée par rapport à ce triangle est $aU^2 + bV^2 + cW^2 = 0$ (1).

Pour que le second triangle, dont nous appellerons M_1, M_2, M_3 les trois sommets, soit conjugué par rapport à la conique (1), il faut que le pôle de chaque côté soit le sommet opposé.

Soient (u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3) les coordonnées des trois côtés M_2M_3, M_3M_1, M_1M_2 du second triangle; représentons

par U_1, V_1, W_1 les valeurs que prennent les fonctions linéaires U, V, W quand on y remplace u et v par u_1, v_1 ; soient de même U_2, V_2, W_2 et U_3, V_3, W_3, les résultats analogues pour u_2, v_2 et u_3, v_3.

Le pôle du côté M_2M_3 par rapport à la conique (1) a pour équation

$$aU_1U + bV_1V + cW_1W = 0.$$

Il faut que ce pôle soit le sommet M_1, c'est-à-dire que son équation soit vérifiée pour les coordonnées des droites M_3M_1 et M_1M_2 ; ce qui donne les conditions

$$aU_1U_2 + bV_1V_2 + cW_1W_2 = 0$$

et

$$aU_1U_3 + bV_1V_3 + cW_1W_3 = 0.$$

Deux groupes de conditions analogues exprimeront de même que les pôles des côtés M_3M_1 et M_1M_2 sont respectivement les sommets M_2 et M_3 ; ces conditions s'obtiennent par la permutation circulaire des indices 1, 2, 3 ; donc pour que le second triangle soit conjugué par rapport à la conique (1), il faut et il suffit qu'on ait les trois conditions :

$$\begin{cases} aU_1U_2 + bV_1V_2 + cW_1W_2 = 0 \\ aU_2U_3 + bV_2V_3 + cW_2W_3 = 0 \\ aU_3U_1 + bV_3V_1 + cW_3W_1 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Cela posé, l'équation d'une conique tangente aux trois côtés du premier triangle est

$$\lambda UV + \mu VW + \nu WU = 0. \qquad (3)$$

Pour que cette conique soit tangente à deux côtés. M_2M_3 et M_3 M_1, de l'autre triangle, il faut qu'on ait

$$\lambda U_1V_1 + \mu V_1W_1 + \nu W_1U_1 = 0$$
$$\lambda U_2V_2 + \mu V_2W_2 + \nu W_2U_2 = 0.$$

L'équation de la conique tangente aux trois côtés du premier triangle et à deux des côtés du deuxième triangle est donc

$$\begin{vmatrix} UV & VW & WU \\ U_1V_1 & V_1W_1 & W_1U_1 \\ U_2V_2 & V_2W_2 & W_2U_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Or cette conique est tangente au troisième côté (U_3, V_3, W_3) du deuxième triangle; car on a identiquement, en vertu des conditions (2) qui sont satisfaites pour des valeurs de a, b, c, autres que zéro :

$$\begin{vmatrix} U_1U_2 & V_1V_2 & W_1W_2 \\ U_2U_3 & V_2V_3 & W_2W_3 \\ U_3U_1 & V_3V_1 & W_3W_1 \end{vmatrix} = 0$$

et il est facile de voir que ce déterminant est identique au suivant

$$\begin{vmatrix} U_1V_1 & V_1W_1 & W_1U_1 \\ U_2V_2 & V_2W_2 & W_2U_2 \\ U_3V_3 & V_3W_3 & W_3U_3 \end{vmatrix}$$

qui, égalé à zéro, exprime précisément la condition pour que la conique (4) soit tangente au troisième côté du deuxième triangle.

Par conséquent, on peut énoncer le théorème suivant, qui est le corrélatif de celui que nous avons énoncé en commençant, et qui résulte ainsi de la même démonstration faite en coordonnées tangentielles :

Quand deux triangles sont conjugués par rapport à une conique, leurs six côtés sont tangents à une même conique.

Les divers exemples que nous venons de donner suffisent amplement à montrer qu'on peut déduire tous les théorèmes relatifs aux tangentes des théorèmes relatifs aux points ; on voit aussi qu'il est inutile de refaire les démonstrations; car elles se transportent intégralement dans le système des coordonnées tangentielles. Le principe de dualité se trouve donc mis en évidence par une voie purement analytique, et la géométrie de calcul, grâce à cet instrument dont la puissance est remarquable, devient capable de donner les résultats fournis par la géométrie pure. Comme nous l'avons déjà dit, il nous serait impossible, sans reculer outre mesure les limites de ce travail, de passer en revue même les principaux de ces résultats; mais en prenant le *Traité des sections coniques*, de Chasles, le *Traité des propriétés projectives des figures* de Poncelet, la plupart des travaux de Steiner, le lecteur reconnaîtra facilement que les beaux théorèmes dus à ces grands géomètres peuvent être obtenus immédiatement par corrélation réciproque à l'aide des coordonnées tangentielles. Nous citerons en particulier les propriétés des pôles et polaires dans les coniques bitangentes, les divers modes de génération des coniques, etc., etc.

Un fait qui dans le cours de cette étude, fixe tout d'abord l'attention, c'est la grande analogie que l'on constate à chaque pas entre la méthode des polaires réciproques et l'emploi des coordonnées tangentielles : un grand nombre de théorèmes s'obtiennent, en effet, par chacune des deux méthodes. Or il est facile de voir que cette analogie est complète.

En effet, quand un point décrit une courbe, sa polaire par rapport à une conique directrice quelconque reste tangente à la polaire réciproque de la courbe par rapport à cette conique. La polaire réciproque est donc l'enveloppe des polaires des points de la courbe proposée.

Soit donc, en coordonnées tangentielles, $\varphi\ (u, v) = 0$ l'équation d'une courbe, c'est-à-dire l'équation de l'enveloppe d'une droite mobile $ux + vy - 1 = 0$. Cette enveloppe est la polaire réciproque de la courbe que décrit le pôle de la droite mobile pris par rapport à une conique directrice quelconque. Si nous prenons pour directrice le cercle $x^2 + y^2 = 1$, la polaire d'un point $(\alpha\beta)$ par rapport à ce cercle a pour équation $\alpha x + \beta y = 1$; le point $(\alpha\beta)$ coïncidera avec le pôle d'une droite particulière (u, v) si l'on identifie les deux équations $\alpha x + \beta y = 1$ et $ux + vy - 1 = 0$; il vient ainsi $\alpha = u$ et $\beta = v$. La droite mobile se déplaçant de manière que u et v satisfassent toujours à la relation $\varphi\ (u, v) = 0$, son pôle $(\alpha\beta)$ par rapport au cercle directeur se déplacera de manière que les coordonnées cartésiennes α et β satisfassent toujours à l'équation $\varphi(\alpha, \beta) = 0$; cette équation sera donc, en coordonnées cartésiennes, celle de la polaire réciproque de la courbe $\varphi\ (u, v) = 0$ par rapport au cercle $x^2 + y^2 = 1$. Cela posé, il sera facile de déduire de cette équation celle de la polaire réciproque de la courbe $\varphi\,(\alpha\beta) = 0$ en coordonnées cartésiennes par la méthode connue, que l'on développe dans la théorie des polaires réciproques. La recherche de l'enveloppe de la droite $ux + vy = 1$, où les paramètres u et v sont liés par la relation $\varphi\ (u, v) = 0$, qui est l'équation tangentielle de l'enveloppe, peut donc

(*) Cette démonstration est la reproduction de celle que j'ai donnée dans mes *Leçons de géométrie analytique* au § 3 du chapitre Ier du livre XI (n° 639).

se ramener à la recherche de la polaire réciproque de la courbe $\varphi(x, y) = 0$ par rapport au cercle $x^2 + y^2 = 1$ (*).

— *De l'influence de certains points remarquables sur la classe d'une courbe.* — Pour terminer cette étude, d'ailleurs très sommaire, sur les coordonnées tangentielles et leurs applications, nous entrerons encore dans quelques détails sur les cas où la classe d'une courbe d'ordre m, laquelle est généralement $m(m-1)$, vient à s'abaisser.

On sait que les points de contact des tangentes menées d'un point $(\alpha\beta\gamma)$ à une courbe $f(x, y, z) = 0$ sont à la rencontre de cette courbe avec une autre courbe, du degré $m-1$, ayant pour équation $\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0$ (première polaire du point $(\alpha\beta\gamma)$.

Le nombre de ces points de contact, et par suite le nombre des tangentes que l'on peut mener à la courbe d'un point extérieur, est donc généralement $m(m-1)$, de sorte que la classe d'une courbe d'ordre m est généralement $m(m-1)$.

Cette classe s'abaisse lorsque la courbe proposée a des points multiples. Il est facile de voir, en effet, que tout point multiple d'ordre p d'une courbe est un point multiple d'ordre $p-1$ dans sa première polaire.

Quand un point est multiple d'ordre p, si l'on prend ce point pour origine, les termes du moindre degré dans l'équation de la courbe sont du degré p, et en décomposant l'équation en groupes homogènes, elle est de la forme :

$$\varphi_m(x, y) + \varphi_{m-1}(x, y) + \dots + \varphi_p(x, y) = 0$$

ou en y introduisant la variable apparente z :

$$\varphi_m(x, y) + z\varphi_{m-1}(x, y) + \dots + z^{m-p}\varphi_p(x, y) = 0.$$

Si l'on forme l'équation $\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0$, il vient

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\left[\varphi'_{m_x} + z\varphi'_{m-1_y} + \dots + z^{m-p}\varphi'_{p_x}\right] \\ + \beta\left[\varphi'_{m_x} + z\varphi'_{y\,m-1} + \dots + z^{m-p}\varphi'_{p_y}\right] \\ + \gamma\left[\varphi_{m-1} + \dots + (m-p)z^{m-p-1}\varphi_p\right. \end{array}\right\} = 0.$$

Or dans cette dernière équation, l'ensemble des termes du moindre degré est $z^{m-p}(\alpha\varphi'_{p_x} + \beta\varphi'_{py})$ qui sont du degré $p-1$; la première polaire a donc à l'ori-

gine (c'est-à-dire au point multiple d'ordre p de la courbe donnée) un point multiple d'ordre $p - 1$.

Dans le cas où l'on prend la première polaire du point multiple lui-même, comme on sait que la polaire de l'origine a pour équation $f'_z = 0$, cette première polaire devient la courbe

$$\varphi_{m-1} + 2z\varphi_{m-2} + \ldots + (m-p)z^{m-p-1}\varphi_p = 0,$$

dans laquelle les termes du moindre degré sont de l'ordre p. Le point multiple d'ordre p est donc multiple du même ordre pour la première polaire.

Dès lors, si une courbe présente un point double, la première polaire passe en ce point ; il y a donc deux des intersections de la courbe proposée avec la courbe des contacts des tangentes issues d'un point extérieur quelconque qui sont confondues en ce point, et il n'y en a plus que $m(m-1) - 2$ autres. La droite qui joint le point extérieur au point double n'est pas la limite des positions d'une sécante dont deux rencontres avec la courbes sont venues se confondre; il est d'ailleurs facile de voir que son équation n'est pas celle d'une des tangentes au point double ; elle n'est donc pas tangente, et dès lors il n'y a plus que $m(m-1) - 2$ tangentes issues d'un point extérieur.

L'existence d'un point double dans une courbe diminue donc la classe de la courbe de deux unités.

Un point multiple d'ordre p diminuera pour la même raison la classe de la courbe de $p(p-1)$ unités.

Une démonstration tout à fait pareille à la précédente montre que si, en un point multiple d'ordre p, q tangentes se confondent, le point multiple d'ordre p dans la courbe proposée est encore d'ordre $p-1$ dans la première polaire, et il y a en ce point $q-1$ tangentes à la première polaire qui sont confondues.

Donc, s'il y a dans la courbe proposée un rebroussement, la première polaire passe par ce point, et est en ce point tangente à la tangente de rebroussement.

Par conséquent en un point de rebroussement la première polaire d'un point extérieur quelconque et la courbe proposée ont trois points communs confondus; il n'y a donc plus que $m(m-1) - 3$ autres intersections.

La droite qui joint le point extérieur au point de rebroussement n'étant pas tangente, on ne peut plus mener d'un point extérieur que $m(m - 1) - 3$ tangentes à la courbe proposée, et sa classe est ainsi diminuée de trois unités.

Il peut même arriver qu'elle soit diminuée de plus de trois unités, si l'ordre du contact de la tangente de rebroussement avec la courbe et sa première polaire est supérieur au premier.

En résumé, si une courbe possède λ points doubles et μ points de rebroussement, sa classe est au plus égale à $m(m - 1) - 2\lambda - 3\mu$.

Nous terminerons ici notre travail sur les coordonnées tangentielles; il reste nécessairement fort incomplet, et pour n'en donner qu'une preuve, nous ferons remarquer que nous avons laissé de côté toute la question des points et tangentes à l'infini. Mais nous croyons que, si restreinte que soit cette étude, elle peut encore être utile à nos lecteurs; car elle met en évidence, par la voie purement analytique, le principe de dualité et ses conséquences si fécondes; elle peut donc offrir des moyens de résoudre un grand nombre de questions par corrélation réciproque; elle montre l'analogie frappante qui existe entre la méthode des polaires réciproques et l'usage des coordonnées tangentielles; en un mot, elle aborde, bien sommairement il est vrai, à peu près toutes les questions que l'on peut avoir besoin de connaître pour faire des applications nombreuses de la méthode.

Dans ce travail, il est un certain nombre de démonstrations qui nous sont personnelles; quant aux autres, nous les avons empruntées à divers ouvrages, parmi lesquels il faut citer le remarquable ouvrage d'un géomètre enlevé trop tôt à la science, M. Painvin, et les *Leçons sur la géométrie* de Clebsch. Ceux de nos lecteurs qui désireraient compléter les notions succinctes que nous avons cherché à leur offrir ici, pourront consulter avec fruit les deux ouvrages que nous venons de citer; quant à nous, nous regarderons notre tâche comme accomplie si nous avons réussi à leur inspirer le goût de cette étude si intéressante.

QUESTION 233

Solution par M. P. BOULOGNE, élève de mathématiques spéciales au Lycée de Lille.

Du centre d'un cercle on abaisse des perpendiculaires OT *sur les tangentes à un autre cercle et sur chacune d'elles on prend, à partir du point* T *et de part et d'autre de la tangente des longueurs égales* TP = TP' *telles que l'on ait* OP . OP = K². *Trouver le lieu des points* P *et* P'.

Cherchons d'abord le lieu du point T. Pour cela prenons pour axe polaire la ligne des centres et le point O pour pôle. Par le centre B du second cercle menons une parallèle BD à la tangente. Nous avons $OT = OD + DT = b \cos \omega + a$, b étant la distance des centres et a le rayon du cercle B. Le lieu de T est donc la courbe $\rho = a + b \cos \omega$. C'est un limaçon de Pascal.

Soient les points P et P' : on a $OP + OP' = 2OT = 2(a + b \cos \omega)$; d'ailleurs $OP . OP' = K^2$. Le lieu de P et de P' a donc pour équation

$$\rho^2 - 2(a + b \cos \omega)\rho + K^2 = 0.$$

Nous remarquerons d'abord que ce lieu, symétrique par rapport à l'axe polaire est limité dans tous les sens. On peut le construire par points. En effet tirons la valeur de ρ, on a

$$\rho = a + b \cos \omega \pm \sqrt{(a + b \cos \omega)^2 - K^2};$$

il faut donc porter à partir de T sur le rayon vecteur et son prolongement des longueurs égales au radical. De là la construction suivante.

Sur OT comme diamètre décrire un demi-cercle. Du point O mener une corde OL = K et rabattre TL sur le rayon, de part et d'autre de T en P et P'.

Les points de rebrousement du lieu sont donnés par

$$a + b \cos \omega = K \text{ ou } \cos \omega = \frac{K - a}{b};$$

alors

$$\rho = a + b \frac{K - a}{b} = K.$$

Les points de rebroussement sont donc situés sur un cercle décrit de O comme centre avec K pour rayon.

Cherchons d'ailleurs les points d'intersection du lieu et du limaçon auxiliaire ; remplaçant $a + b \cos \omega$ par ρ, nous trouvons $\rho^2 = K^2$ ou $\rho = K$; donc les points de rebroussement du lieu sont à l'intersection du limaçon auxiliaire et du cercle décrit de O comme centre avec K pour rayon.

Examinons le cas où le point O est extérieur au cercle B. Si $K > a + b$, il n'y a pas de lieu. Si $K = a + b$ le lieu se réduit au point double E. Pour $a + b > K > b - a$ on a une seule courbe avec deux points de rebroussement.

Quand $K = b - a$, outre la courbe, le point F est point double isolé du lieu.

Enfin quand $K < b - a$, on obtient deux courbes et quatre points de rebroussement. Ces courbes s'aplatissent à mesure que K décroît. Elles correspondent chacune à une boucle du limaçon.

On pourrait faire une discussion analogue lorsque O est sur le cercle B et quand il est intérieur; on obtient dans ces deux cas une seule courbe et deux points de rebroussement au plus.

QUESTION 253

Solution par **M. Dupuy**, élève au Lycée de Grenoble.

Étant donnés sur un plan un parallélogramme et une droite, construire avec la règle et le compas les points où la droite rencontre l'ellipse inscrite au parallélogramme et touchant ses quatre côtés en leur milieu.

Considérons l'ellipse inscrite au parallélogramme comme la projection oblique d'un cercle inscrit dans un carré. Prenons le plan du parallélogramme pour plan horizontal, le côté CD pour ligne de terre et dans le plan vertical construisons sur CD un carré CDEF. Inscrivons-y un cercle. Pour avoir la position de la droite dans le plan vertical, prolon-

geons-la en M jusqu'à CD, d'un côté, et en N jusqu'à AB de l'autre. Menons Nn parallèle à BC et nN' parallèle à cF ; MN est la droite cherchée qui coupe le cercle en deux points H', I'. Menons I'i, H'h perpendiculaires à la ligne de terre, iI, hH parallèles à BC ; les points I, H d'intersection avec MN sont les points cherchés.

QUESTION 272

Solution par M. Gino Loria, à Mantoue.

Vérifier l'identité

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) \dots (1 + x^{2^{p-1}}) = 1 + x + x^2 + \dots + x^k$$

et exprimer k *en fonction de* p.

1° k sera égal à la somme des exposants de x dans les p binômes ; donc

$$K = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{p-1} = \frac{2^p - 1}{2 - 1} = 2^p - 1.$$

Comme il est facile de vérifier l'égalité pour $p = 2$, je supposerai qu'elle soit vraie pour une certaine valeur de p et je démontrerai qu'elle est vraie aussi pour la valeur $p + 1$.

On a par hypothèse

$$(1 + x)(1 + x^2) \dots (1 + x^{2^{p-1}}) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{2^p - 1}$$

multipliant cette égalité par $1 + x^{2^p}$ nous obtiendrons

$$(1 + x)(1 + x^2) \dots (1 + x^{2^p}) = 1 + x + x^2 + \dots x^{2^p - 1} + x^{2^p} + x^{2^p + 1} + \dots x^{2 \cdot 2^p - 1}$$

c'est-à-dire

$$(1 + x)(1 + x^2) \dots (1 + x^{2^p}) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{2^{p+1} - 1}$$

donc l'identité est aussi vraie pour la valeur $p + 1$, elle est par suite générale.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Dupuy, à Grenoble ; Boulogne, à Lille ; Daguillon, au lycée Henri IV (classe de M. Macé de Lépinay).

QUESTION 312

Solution par M. du Motel, élève de Mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis (cours de M. Lucas).

On considère une ellipse et le cercle lieu des sommets des angles droits qu'on peut lui circonscrire. Par un point P *extérieur à l'ellipse, on mène les deux tangentes* PA *et* PB *à l'ellipse. On prolonge la corde des contacts* AB *jusqu'à sa rencontre en* C *et* D *avec le cercle. Faire voir analytiquement et géométriquement que les angles* CPA, BPD *sont égaux.*

Il suffit de démontrer que les bissectrices des angles APB, CPD coïncident.

SOLUTION ANALYTIQUE

Soit $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ l'équation de l'ellipse. $x_0\, y_0$ étant les coordonnées du point P, l'équation quadratique des droites PA et PB est

$$\left(\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-1\right)^2=\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1\right)$$

Celle des parallèles à ces droites menées par l'origine est

$$\left(\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}\right)^2=\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1\right)$$

et l'équation des bissectrices est

$$\frac{x^2-y^2}{x_0^2-y_0^2-(a^2-b^2)}=\frac{xy}{x_0y_0}.$$

Cherchons l'équation aux coefficients angulaires des droites PC, PD. Il suffit de mener par le point P une droite $y-y_0=m(x-x_0)$ (1) et d'exprimer qu'elle coupe la droite AB, $b^2xx_0+a^2yy_0-a^2b^2=0$ (2), sur le cercle $x^2+y^2-a^2-b^2=0$ (3).

Des équations (1) et (2) on tire

$$x=a^2\,\frac{b^2+mx_0y_0-y_0^2}{a^2my_0+b^2x_0},\quad y=b^2\,\frac{a^2m+x_0y_0-mx_0^2}{a^2my_0+b^2x_0}$$

transportant dans (3) on tire

$$a^4(b^2 + mx_0y_0 - y_0^2)^2 + b^4(a^2m + x_0y_0 - mx_0^2)^2$$
$$- (a^2 + b^2)(a^2my_0 - b^2x_0)^2 = 0.$$

Pour avoir l'équation des parallèles aux droites PC, PD menées par l'origine, il n'y a qu'à remplacer dans cette équation m par $\frac{y}{x}$, ce qui donne

$$a^4[x_0y_0y + x(b^2 - y_0^2)]^2 + b^4[(a^2 - x_0^2) + xx_0y_0]^2$$
$$- (a^2 + b^2)(a^2yy_0 + b^2xx_0)^2 = 0.$$

L'équation des bissectrices est

$$\frac{x^2 - y^2}{[x_0^2 - y_0^2 - (a^2 - b^2)][a^4{}_0y^2 + b^4x_0^2]} = \frac{xy}{x_0y_0(a^4y_0^2 + b^4x_0^2)}$$

C'est la même équation que pour les bissectrices des parallèles aux droites PA, PB.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Soient PE, PF les bissectrices de l'angle APB. Le triangle rectangle EPF étant conjugué par rapport à la conique, le cercle circonscrit est orthogonal au cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits ; EF, étant un diamètre de ce cercle, est divisé harmoniquement par l'autre. Donc le faisceau P(CEDF) est harmonique et comme les rayons PE, PF sont rectangulaires, ils sont les bissectrices de l'angle des deux autres,

c. q. f. d.

QUESTIONS PROPOSÉES

Mathématiques élémentaires.

361. — Considérons quatre droites dans un plan ; ces quatre droites prises trois à trois forment quatre triangles. et l'une d'elles, AB par exemple, appartient à trois de ces triangles. Dans chacun des trois triangles correspondant à AB, joignons le centre du cercle circonscrit au sommet opposé à AB. 1° Pour un même côté AB, les trois droites ainsi menées concourent en un point I. 2° Les quatre points analogues à I et les quatre centres des cercles circonscrits

aux triangles formés par les quatre droites sont sur une même circonférence.

362. — Deux cercles donnés se coupent en un point A; mener par le point A une sécante rencontrant les deux cercles en B et C, de telle manière que l'on ait

$$AB \, . \, AC = l^2.$$

363. — On donne une corde AB; trouver sur son prolongement un point P, tel que si l'on mène PH tangente au cercle, et que des points A et B on abaisse des perpendiculaires AC et BD sur la tangente PH on ait

$$AC \, . \, BD = l^2.$$

364. — On donne le demi-cercle AB et les tangentes en A et B; par un point fixe P, pris sur le diamètre AB, on mène une droite PQ, qui rencontre la circonférence en Q, et par ce point Q, on mène à PQ la perpendiculaire MQN, rencontrant en M la tangente AM, et en N la tangente BN. Démontrer que le produit AM . BN reste constant lorsque PQ tourne autour du point P.

365. — On donne deux circonférences et un point P; mener aux circonférences des tangentes parallèles, telles que le rapport des distances du point P aux deux tangentes soit égal à un rapport donné.

366. — Étant donnés deux cercles et une droite, trouver sur cette droite un point P, tel que les tangentes menées de ce point aux deux cercles soient également inclinées sur la droite.

367. — Par le centre d'un cercle et par un point, faire passer un cercle tel que la corde commune ait une longueur donnée.

368. — Circonscrire à une circonférence de rayon r un triangle isoscèle dont le côté soit égal à m fois la base.

Mathématiques spéciales.

369. — On considère une ellipse rapportée à ses axes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Soit M un point de l'ellipse; par le point M, le point M

diamétralement opposé, et les extrémités A, A′ du grand axe on fait passer une hyperbole équilatère H ; puis on prend un cercle C passant par les points M, A et A′. Cela posé, l'hyperbole H et le cercle C ont un quatrième point commun P ; on mène MP, et l'on demande, le point M parcourant l'ellipse, de déterminer la trajectoire orthogonale des droites MP, c'est-à-dire la courbe qui les coupe à angle droit. C'est une ellipse ; on fera voir que cette ellipse n'est jamais un cercle, et qu'elle n'est pas non plus homothétique à l'ellipse donnée. On suppose, bien entendu $a > b$.

(De Longchamps.)

370. — On donne la parabole $y^2 - 2px = 0$ et l'on considère les coniques osculatrices à cette parabole en son sommet (une courbe f est osculatrice à une courbe φ en un point M de celle-ci quand elle a, en ce point M, le plus grand nombre de points communs confondus avec M ; en particulier, une conique est osculatrice à une conique φ en M, quand elle a en ce point quatre points communs avec φ). Montrer que : 1° le lieu des sommets de ces coniques est une parabole ; 2° le lieu de leurs foyers est un cercle.

(De Longchamps.)

371. — Une conique variable est osculatrice à une hyperbole équilatère donnée, et son foyer fixe au centre de cette hyperbole. Démontrer que les tangentes communes aux deux courbes se coupent sur la lemniscate $\rho^2 = a^2 \cos 2\omega$, le centre de l'hyperbole étant pris pour pôle et l'axe transverse pour axe polaire. *(The Educat. Times.)*

372. — On donne : 1° dans le plan des zx une droite parallèle à l'axe ox ; 2° dans le plan des zy une droite parallèle à l'axe des y, et ne rencontrant pas l'axe des z au même point que la précédente. D'un point pris dans le plan xoy, on abaisse des perpendiculaires sur ces deux droites, et l'on joint leurs pieds par une ligne droite. On demande l'équation de la surface engendrée par cette droite quand le point du plan xy se meut sur une courbe $f(x, y) = 0$.

Appliquer la solution au cas où $f(x,y) = 0$ est une ligne droite, et dans ce cas étudier la nature et les propriétés de la surface obtenue.

373. — On donne dans les plans des zx et des yz deux coniques tangentes à l'axe oz à l'origine des coordonnées; on demande l'équation générale des surfaces du second ordre contenant ces deux coniques et le lieu des centres de ces surfaces. Discuter le lieu obtenu et étudier comment il varie avec la nature des coniques données.

374. — On donne deux cercles égaux situés dans des plans parallèles, et dont les centres sont sur une perpendiculaire à ces plans. Deux points se meuvent simultanément sur ces deux circonférences avec des vitesses différentes. On demande d'étudier la surface engendrée par la droite qui les joint. On suppose que les positions initiales des deux points sont sur une perpendiculaire aux plans des cercles. On examinera en particulier le cas où le rapport des vitesses est égal à 2. *(Genty.)*

BIBLIOGRAPHIE

Traité de géométrie descriptive *répondant au programme de Saint-Cyr, par* **M. Javary,** *chef des travaux graphiques à l'École polytechnique, etc. — Paris, librairie Delagrave.*

Nous avons rendu compte, il y a quelques mois, de la première partie du cours complet de géométrie descriptive, destiné aux candidats à l'École polytechnique et publié par M. Javary; le nouvel ouvrage du même auteur, que nous signalons aujourd'hui, a été écrit pour les élèves qui se préparent à Saint-Cyr, et contient, en dehors de la ligne droite et du plan, des notions très complètes sur les plans cotés, les plans tangents au cylindre et au cône, et les sections planes de ces deux corps. L'élève qui aura eu soin, en étudiant ce cours, de faire, comme l'indique M. Javary, les épures à la règle et au compas, et qui aura étudié les divers problèmes indiqués dans le cours sous le nom d'exercices, saura et comprendra la géométrie descriptive de façon à ne pas se laisser embarrasser par une question d'examen.

Un chapitre fort intéressant termine l'ouvrage; il donne rapidement, et sans aucune figure, la solution des questions proposées aux examens écrits de Saint Cyr depuis 1863; pour bien comprendre ces solutions, il faut de toute nécessité faire les épures; et en étudiant attentivement les explications données dans ces dix-huit épures, un élève y trouvera la meilleure des préparations à l'épreuve de géométrie descriptive qu'il devra faire pour entrer à Saint-Cyr.

Leçons de Cosmographie *par* **H. Garcet.** *Nouvelle édition mise en harmonie avec les nouveaux programmes et avec les nouvelles découvertes par* **Ch. Simon,** *professeur au lycée Louis-le-Grand. — Paris, librairie Delagrave.*

Voici un ouvrage qui répond bien aux programmes de l'enseignement scien-

tifique des lycées, programme qui porte que l'étude de la cosmographie sera purement descriptive ; en effet, ici les faits intéressants de la cosmographie sont exposés avec une grande précision ; mais en revoyant l'ancienne édition de l'ouvrage de Garcet, ouvrage principalement destiné aux candidats à la licence ès sciences, M. Simon, ancien directeur de l'Observatoire de Toulouse, et par suite très compétent dans les questions relatives au système du monde, n'a laissé subsister dans la nouvelle édition que les connaissances que l'on peut considérer actuellement comme indispensables à toute personne instruite. Il a donc laissé de côté les formules, que les élèves oubliaient le plus souvent, ne sachant comment ils pourraient les établir.

Le nouvel ouvrage que nous indiquons à nos lecteurs contient tout ce qui est nécessaire pour les examens, mais rien de plus ; on est sûr de ne pas se perdre dans des détails inutiles en le prenant pour guide d'une bonne préparation.

Éléments de trigonométrie rectiligne, *par* **M. Pichot,** *censeur au Lycée Fontanes. — Paris, librairie Hachette.*

Ce traité élémentaire de trigonométrie, qui fait partie de la collection du baccalauréat ès sciences publiée par la librairie Hachette, peut être fort utile aux candidats à Saint-Cyr, par le grand nombre d'exercices résolus qu'il présente, exercices choisis de façon à donner beaucoup de formules intéressantes à retenir. Les problèmes proposés, qui terminent le volume, sont aussi très bons pour les élèves, parce que ce sont des questions d'examens, ce qui pousse toujours les candidats à travailler ce genre d'exercices. Nous regrettons seulement que l'auteur n'ait pas jugé à propos d'en mettre un plus grand nombre ; avec les tendances actuelles des examens, où l'on pousse les élèves à des exercices de calcul, il est bon de mettre beaucoup de problèmes dans un ouvrage de ce genre : c'est ce que comprennent à merveille les Anglais, dont les ouvrages classiques contiennent un nombre très considérable de problèmes, énoncés, ce qui est très important, à la fin de chaque chapitre. C'est du reste la seule critique que nous ayons à faire au livre de M. Pichot, et nous nous permettons cette observation, précisément parce que nous trouvons son ouvrage bon, et que nous le désirons encore plus profitable aux élèves.

A. M.

Le Rédacteur-Gérant,

J. KŒHLER.

PARIS. — IMP. CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 18388-1.

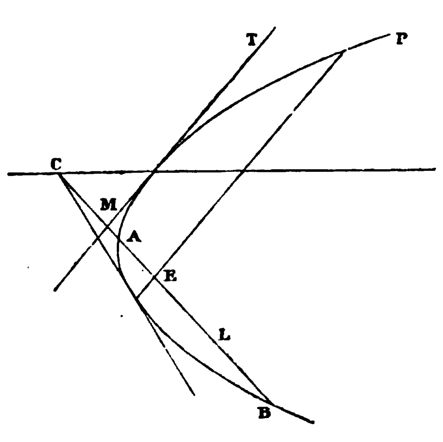
RÉSOLUTION GEOMÉTRIQUE

DE DEUX PROBLÈMES DU QUATRIÈME DEGRÉ RELATIFS A LA PARABOLE

Par M. **G. de Longchamps.**

Les deux problèmes dont nous allons nous occuper sont ceux qui se proposent : 1° *de construire une parabole passant par deux points et tangente à deux droites;* 2° *de construire une parabole passant par trois points et tangente à une droite.*

1. Nous ferons d'abord cette remarque : Si l'on considère une parabole P; une tangente T à cette courbe; le diamètre Δ, du point de contact, et une droite L qui rencontre P en A et B, T en M, Δ en C, on a :



$$\overline{MC}^2 = MA \cdot MB$$

En effet, menons par C la tangente CD à P, et par D une parallèle à T. Cette dernière droite sera la polaire du point C; elle rencontre donc AB en un point E, conjugué harmonique de C. D'autre part, et d'après la propriété connue de la sous-tangente, on voit que le point M est le milieu de CE. On a donc bien

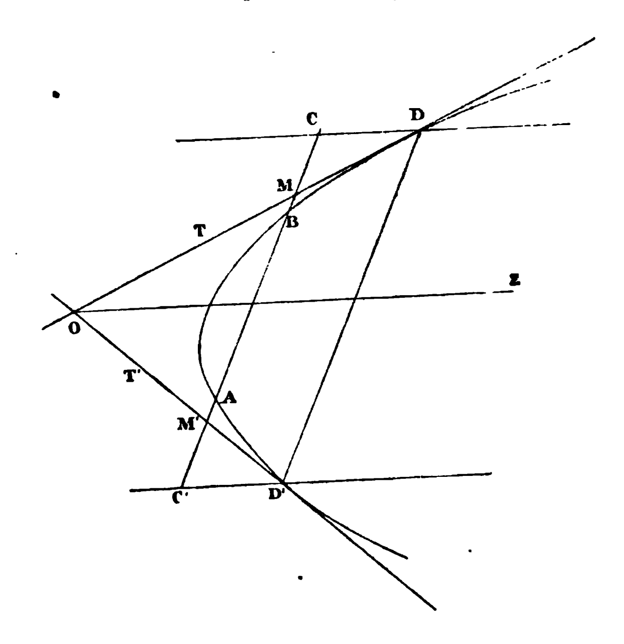
$$\overline{CM}^2 = MA \cdot MB.$$

2. Ceci posé, soient T, T′ les deux tangentes; D, D′ les points de contact. On a, par la remarque précédente,

$$\overline{MC}^2 = MA \cdot MB; \text{ et } \overline{M'C'}^2 = M'A \cdot M'B;$$

DC et D′C′ étant, bien entendu, les diamètres des points D

et D'. Joignons le point O au milieu de DD', cette droite OZ sera parallèle aux diamètres; et, pour des raisons évidentes, c'est une parallèle équidistante de CD et de C'D'. Elle passe donc par le milieu de CC', donc OZ est une droite qui est déterminée. Alors en menant par les points C et C' des parallèles à OZ, on aura les points D, D'.



En appliquant le théorème de la sous-tangente au point A et au point B, on déterminera les tangentes en A et B et l'on est ramené au problème connu : ***construire une parabole, connaissant quatre tangentes.***

3. Le problème que nous venons de résoudre est, comme on le sait, un problème du *quatrième degré*; parce qu'il existe *quatre coniques passant par deux points et tangentes à trois droites:* en particulier, il existe *quatre paraboles passant par deux points et tangentes à deux droites.* Lorsque les points C et C' ont été construits, à ces points ne correspond, évidemment, qu'***une parabole.***

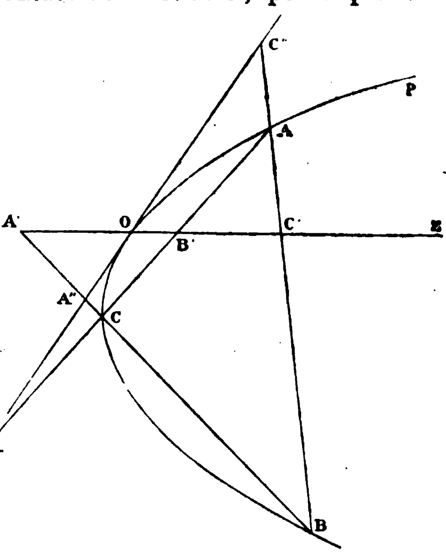
Mais, pour retrouver les quatre solutions du problème, il faut observer que la relation

$$\overline{MC}^2 = MA \cdot MB$$

détermine *deux points* C; il y a de même *deux points* C′, et les points associés deux à deux de toutes les façons possibles donnent les quatre solutions cherchées.

4. — Si l'on donne, maintenant, trois points A, B, C d'une parabole P, et une tangente T, la construction de la courbe dépend encore d'un problème du quatrième degré. En appliquant les idées précédentes, ce problème, comme celui que nous venons de traiter, se ramène, lui aussi, à quatre problèmes du premier degré.

Soit O le point de contact de T et de P, point que nous nous proposons de déterminer. Le diamètre OZ coupe les côtés du triangle ABC en A′, B′, C′, la droite T coupe les mêmes côtés en des points A″, B″, C″, et l'on a, par exemple,



$$\overline{C'C''}^2 = C''A \cdot C''B,$$

ce qui détermine deux points C′ à égale distance du point C″ sur AB. On aura, de même, deux points B′ et deux points A′; ces points A′, B′, C′ sont en nombre 6; mais i est facile de reconnaître que ces points sont *trois à trois en ligne droite et forment un quadrilatère complet dont les côtés sont les diamètres cherchés*. Ayant pris l'un de ces côtés, on aura donc une tangente, le diamètre correspondant, et trois points. Le théorème de la sous-tangente permettra de déterminer les tangentes en ces points, et l'on sera ramené

de nouveau au problème de la construction de la parabole, connaissant quatre tangentes de cette courbe.

Pour établir que les points A', B', C' sont, trois à trois, en ligne droite, on démontrera le théorème suivant :

Théorème. — *Étant donnés un triangle* ABC, *une transversale* Δ, *qui rencontre les côtés en* A', B', C', *on prend entre* A *et* B *un point* C'' *tel que*

$$C''C'^2 = C'A \cdot C'B;$$

démontrer que les trois droites AA'', BB'', CC'' *concourent au même point* (*).

REMARQUES SUR LES PROBLÈMES PRÉCÉDENTS

Chasles a donné la solution du problème général qui consiste à décrire une conique passant par deux points et tangente à trois droites (*Traité des Coniques*, p. 59).

Elle est fondée sur le théorème suivant :

Si l'on a un angle circonscrit à une conique AMB *et un point* S, *les tangentes* ST, ST' *et les droites* SA, SB *menées aux points de contact des côtés de l'angle déterminent une involution dont* SM *est un rayon double.*

D'après cela, si l'on donne les deux points A, B et le triangle circonscrit CDE, on cherchera les rayons doubles de l'involution (CD, CE), (CA, CB), et on aura deux droites sur lesquelles doivent se trouver les points tels que M, intersection des tangentes en A et B aux coniques cherchées. Prenant ensuite l'involution (DC, DE), (DA, DB), on aura deux nouvelles droites, et par suite quatre points M.

Le problème est ramené à construire une conique tangente à cinq droites, et admet quatre solutions.

Pour traiter par cette méthode le premier des problèmes résolus par M. de Longchamps, il suffit de rejeter à l'infini une des droites données. Considérons l'involution déterminée par OT (*fig.* 2), la droite de l'infini et les parallèles à

(*) Nous insérerons une solution de ce théorème, si quelqu'un de nos lecteurs nous adresse cette solution.

OT menées par A et B. Il faut chercher sur AB les points doubles de l'involution dont on connaît le couple (A, B) et le couple (M, ∞). Le point M n'est autre chose que le point central, les points doubles s'obtiennent en prenant MC = MC', de telle sorte que $\overline{MC}^2 = \overline{MC'}^2 = MA.MB$. On retrouve ainsi les points C et C'. Les parallèles à OT menées par M et M' sont deux premières droites sur lesquelles doivent se trouver les points de concours des tangentes en A et B. Le point de rencontre M_1 de AB avec OT' fournit deux autres points C_1, C'_1 et deux droites parallèles à OT'. Les quatre sommets du parallélogramme ainsi obtenu sont les pôles de AB relatifs aux quatre paraboles qui répondent à la question.

Le deuxième problème traité par M. de Longchamps peut se résoudre d'une manière analogue.

D'abord, en transformant par dualité le théorème cité au commencement de ces remarques, on obtient l'énoncé suivant :

Étant donnés deux points A *et* B *sur une conique et une droite* D *qui rencontre la courbe en* C, C', *les tangentes en* A *et* B *coupent la droite en deux points* A', B', *qui déterminent avec* C, C' *une involution dont un des points doubles est le point de concours des droites* D *et* AB.

De ce théorème on conclut aisément la construction d'une conique passant par trois points et tangente à deux droites, puis celle de la parabole passant par trois points et tangente à une droite.

J. K.

NOTE

SUR LES VARIATIONS DE LA FONCTION RATIONNELLE DU SECOND DEGRÉ

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

Par M. **J. Bourget.**

La brochure de M. Burat-Dubois (*) et les réflexions de M. Morel dans le numéro de septembre tendent à démontrer que la méthode *indirecte* généralement employée pour déterminer le maximum et le minimum de la fraction rationnelle du second degré, ne conduit pas toujours à des résultats conformes à ceux que donne la méthode *directe*, fondée sur la définition classique des maxima et des minima.

Je me propose, dans cette note, de montrer que les contradictions signalées par M. Burat ne sont qu'apparentes et que les deux méthodes conduisent au même résultat.

A la première page de sa brochure, M. Burat fait remarquer que, d'après la définition connue des maxima et minima *relatifs* :

1° $y = +\infty$, $y = -\infty$ peuvent être respectivement des maxima et des minima, si ces valeurs correspondent à des valeurs finies de x. Si par exemple $y = +\infty$ pour $x = a$, et que pour $x = a + h$ et $x = a - h$, y soit très grand et positif, on peut dire que, conformément à la définition, $y = +\infty$ est un maximum relatif. Cette observation n'est pas nouvelle; mais on laisse de côté ces solutions de la question, qu'on détermine directement par la résolution de l'équation $a'x^2 + b'x + c' = 0$. On voit d'ailleurs qu'il

(*) Règle pour déterminer le maximum et le minimum de la fraction

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

par M. Burat-Dubois. (Pau, imprimerie Vignancourt, juillet 1881.)

ne peut y avoir de maxima et de minima de cette espèce, que si $b'^2 = 4a'c'$.

2° *Un maximum et un minimum de* y *ne peuvent correspondre qu'à une valeur finie de la variable.*

Cette assertion de M. Burat me semble inexacte, et c'est en admettant cette proposition qu'il arrive à prouver qu'il y a divergence entre la méthode directe et la méthode indirecte.

Voici comment nous raisonnons pour démontrer l'inexactitude de la proposition de M. Burat-Dubois.

La fonction donnée y est continue et uniforme de $x = -\infty$ à $x = +\infty$. Changeons x en $\frac{1}{u}$, elle deviendra

$$y = \frac{a + bu + cu^2}{a' + b'u + c'u^2},$$

et imaginons deux axes ou et oy servant à représenter, par une construction graphique, les variations de la fonction.

A chaque valeur m de u correspondra une valeur p de la fonction y. Si u tend vers m par valeurs croissantes ou décroissantes, y tendra vers la même valeur p. Supposons $m = 0$; nous pourrons dire que y tend vers p, soit que u croisse de $-\varepsilon$ à 0, soit que u décroisse de $+\varepsilon$ à 0. Revenons à la fonction primitive en x:

Faire croître u de $-\varepsilon$ à 0, c'est faire décroître x de $-\frac{1}{\varepsilon}$ à $-\infty$; faire décroître u de ε à 0, c'est faire croître x de $\frac{1}{\varepsilon}$ à $+\infty$ et puisque $u = 0$ nous donne un point unique sur l'axe des U, vers lequel on tend soit en partant de $-\varepsilon$, soit en partant de $+\varepsilon$, nous devons regarder $x = +\infty$ et $x = -\infty$ comme donnant aussi le même point de l'axe des x, où il faut élever une ordonnée égale à p pour représenter la fonction.

Adoptons donc cette manière de voir que : $x = -\infty$ et $x = +\infty$ *représentent un même point de l'axe des* x *et que* $x = -k$ *et* $x = +k$ *(k étant très grand) représentent deux*

points situés de part et d'autre de ce point, et dans son voisinage.

Cette convention faite, il est facile de démontrer le théorème suivant.

Théorème. — *Tout maximum absolu de* y *est aussi un maximum relatif. Tout minimum absolu est aussi un minimum relatif.*

Il y a deux cas à considérer.

1° Admettons que pour une région de l'axe des x, y reste toujours inférieur à p, et qu'il atteigne cette valeur pour $x = m$, valeur finie; p est un maximum absolu; mais il est évidemment aussi un maximum relatif, puisque y étant continu et uniforme, p sera plus grand par hypothèse que la valeur que prend y soit pour $x = m - \varepsilon$, soit pour $x = m + \varepsilon$.

2° Supposons que dans les régions extrêmes de x, à gauche et à droite, y soit toujours inférieur à p, et qu'il tende vers p, soit quand x tend vers $-\infty$, soit quand x tend vers $+\infty$; p est un maximum absolu dans ces deux régions; mais, d'après notre convention ci-dessus, p est aussi un maximum relatif, car y est inférieur à p, soit pour $x = -k$, soit pour $x = k$ (k étant très grand).

Un raisonnement semblable montrerait que, dans tous les cas, p minimum absolu est en même temps un minimum relatif.

Donc on peut dire que les deux méthodes ne diffèrent pas au fond et conduisent aux mêmes résultats.

Les exemples que donne M. Burat pour prouver que les deux méthodes ne s'accordent pas toujours, traitées en suivant notre manière de voir, ne présentent plus rien d'anormal et confirment la vérité du théorème général suivant, que nous avons démontré dans notre *Traité d'algèbre* :

1° La fonction $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$, *quand* x *varie de* $-\infty$ *à* $-\infty$ *n'a ni maximum, ni minimum, si les racines du numérateur et du dénominateur sont réelles et si les segments* AA', BB' *qu'elles déterminent sur l'axe des* x *empiètent l'un sur l'autre.*

2° Dans le cas où le dénominateur de la fonction a ses racines égales, la fonction a un maximum, ou un minimum.

3° Dans tous les autres cas, la fonction a un maximum et un minimum.

Ces exemples sont les suivants :

$$(a)\qquad y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-4)}$$

$$(b)\qquad y = \frac{x^2 - 5x - 6}{x^2 - 5x + 4} = \frac{(x+1)(x-6)}{(x-1)(x-4)}$$

$$(c)\qquad y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 2x + 1} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)^2}$$

$$(d)\qquad y = \frac{x^2 + 5x - 6}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+6)}{(x+1)^2}$$

$$(e)\qquad y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})}{(x+1)^2}$$

$$(f)\qquad y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 1} = \frac{(x+1)^2 + 1}{(x+1)^2}$$

Conformément au théorème précédent:

L'exemple (*a*) nous donne un maximum absolu $\frac{1}{9}$ pour $x = 2\frac{1}{2}$ et un minimum absolu 1 pour $x = \pm\infty$. $\frac{1}{9}$ est aussi un maximum relatif et 1 un minimum relatif, d'après notre convention.

L'exemple (*b*) nous donne un minimum absolu $5\frac{4}{9}$ pour $x = \frac{5}{2}$ et un maximum absolu 1 pour $x = \pm\infty$. $5\frac{4}{9}$ est aussi un minimum relatif et 1 est un maximum relatif suivant nos idées.

L'exemple (*c*) nous donne un minimum absolu pour $x = \frac{69}{49}$. Ce minimum $-\frac{1}{48}$ est aussi un minimum relatif. — Nous ne nous occupons pas du maximum $y = +\infty$ pour $x = -1$.

L'exemple (*d*) nous donne pour $x = 5\frac{2}{3}$ un maximum absolu $1\frac{9}{40}$, qui est aussi un maximum relatif. — Nous ne nous occupons pas de $y = -\infty$ qui est un minimum pour $x = -1$.

L'exemple (*e*) nous donne pour $x = \pm\infty$ un maximum absolu $y = -1$, qui est aussi un maximum relatif, suivant nos idées. — Nous mettons de côté $y = -\infty$, qui est un minimum pour $x = -1$.

Enfin l'exemple (*f*) nous donne pour $x = \pm\infty$ le minimum absolu 1, qui est aussi un minimum relatif. Nous laissons de côté $y = +\infty$ qui est un maximum pour $x = -1$.

Remarquons, en finissant, que notre manière de voir est conforme à l'esprit de généralisation qui a fait de l'algèbre un instrument apte à éliminer les exceptions que présente la théorie des grandeurs considérées d'abord uniquement au point de vue absolu.

Comment, d'ailleurs, en suivant M. Burat-Dubois, expliquerait-on que la fonction

$$y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4}$$

ne présenterait qu'un maximum pour $x = 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, et qu'après avoir posé $x = \frac{1}{u}$, la même fonction

$$y = \frac{1 - 5u + 6u^2}{1 - 5u + 4u^2}$$

présenterait un maximum pour $x = \frac{5}{2}$ ou $u = \frac{2}{5}$ et un minimum 1 pour $u = 0$ ou $x = \pm\infty$?

QUESTIONS D'EXAMEN

Dans le cas douteux des triangles, en appelant C *et* C′ *les valeurs du troisième angle* A *étant donné, on a*

$$tg\,A = cotg \frac{1}{2} (C + C').$$

En effet, la construction géométrique nous apprend que la perpendiculaire CD abaissée du point C sur le côté AB est la bissectrice de l'angle BCB′; de plus, si le problème a deux solutions, la ligne CA est à l'extérieur de l'angle BCB′; donc on a, par un théorème connu,

$$2ACD = ACB + ACB'.$$

D'autre part, l'angle ACD est le complément de l'angle A donné; donc on trouve bien d'après cela la relation indiquée.

Dans une division, on ajoute au dividende et au diviseur le même nombre d'unités; que doit être ce nombre pour que la partie entière du quotient ne change pas?

(Nous supposons que dans les deux cas nous faisons la division par défaut.)

Soient A le dividende, B le diviseur, Q le quotient; dans la première opération, nous trouvons un reste R, et nous avons identiquement

$$A = BQ + R.$$

Prenons pour dividende $A + m$, et pour diviseur $B + m$; par hypothèse, nous avons le même quotient Q; soit R′ le nouveau reste, nous aurons

$$A + m = (B + m)Q + R'.$$

En comparant ces deux égalités nous trouvons facilement

$$m(Q - 1) + R' = R.$$

Supposons d'abord que Q ne soit pas égal à 1; alors nous voyons que R′ est inférieur à R, et nous aurons pour

déterminer m, l'égalité

$$m = \frac{R - R'}{Q - 1};$$

puisque R′ n'est pas connu, nous voyons que m ne peut pas dépasser le plus grand entier contenu dans l'expression

$$\frac{R}{Q - 1}$$

c'est-à-dire que nous aurons une limite supérieure de m en diminuant le quotient d'une unité et divisant le reste par le nombre ainsi obtenu.

Nous avons supposé que Q n'était pas égal à 1; cherchons ce qui arriverait dans ce cas; si nous avions

$$A = B + R,$$

R étant inférieur à B, nous aurions évidemment, quel que fût m : $$A + m = (B + m) + R,$$

et R serait plus petit que $B + m$; donc dans ce cas nous pourrions prendre pour m un entier quelconque, et le quotient ne changerait pas; le problème est alors indéterminé.

Une équation du second degré a ses coefficients imaginaires; trouver la condition pour que cette équation admette une racine réelle.

Soit l'équation

$$(a + a'i)x^2 + (b + b'i)x + (c + c'i) = 0.$$

Si cette équation admet une racine réelle, cette racine réelle devra annuler séparément la partie réelle et le coefficient de i dans l'équation mise sous la forme

$$ax^2 + bx + c + i(a'x^2 + b'x + c') = 0.$$

Donc, pour que l'équation proposée admette une racine réelle, il faut que les deux équations

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a'x^2 + b'x + c' = 0$$

aient au moins une racine commune, ce qui nous donne une condition connue.

Il est bon de remarquer que cette racine convient aussi à une équation que nous pourrions appeler l'équation con-

juguée de la précédente et qui en diffère en ce que les coefficients sont conjugués de ceux de l'équation donnée.

Trouver la somme des n *premiers termes de la série*

$$1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \ldots + (n-1)n^2$$

Si à cette somme j'ajoute

$$2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2,$$

j'aurai la somme des cubes des nombres de 2 à n, c'est-à-dire

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} - 1.$$

Donc, puisque la somme que j'ai ajoutée est égale à

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1,$$

il vient pour la somme cherchée

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)}{12}(3n^2 - n - 2).$$

Il est facile de voir que cette expression est toujours divisible par 12; car le facteur $3n^2 - n - 2$ étant toujours pair, ainsi que l'un des facteurs n ou $n+1$, le produit est toujours divisible par 4; et si n est un multiple de 3 augmenté de 1, le facteur $3n^2 - n - 2$ est divisible par 3. Donc le produit est bien divisible par 12.

On donne un demi-cercle AB *et une perpendiculaire* PN *au diamètre telle que* AP $= b$. *On demande de mener par le point* A *une corde rencontrant* PN *en* H, *et la circonférence en* C *de telle sorte que* HC $=$ R.

(Le lecteur est prié de faire la figure.)

Abaissons du point C la perpendiculaire CD, et posons AH $= x$.

Les triangles rectangles AHP, ACD sont semblables et donnent

$$\frac{x}{R+x} = \frac{b}{AD}.$$

D'autre part, on a, puisque AC est une corde et AD sa projection, $AD = \frac{(R + x)^2}{2R}$

Donc l'équation est, en supprimant le facteur $R + x$, qui ne peut être nul, $x = \frac{2bR}{R + x}$

Il est facile de résoudre cette équation. Nous avons supposé ici que le segment HC faisait suite au segment AH; on pourrait étudier la question en supposant que le point C est entre A et H; le problème n'est pas plus difficile à traiter.

De chaque côté du centre O *d'un cercle, on prend* $OC = OD = a$, *sur le diamètre* AB ; *déterminer un point* M *sur la circonférence tel que* $OM^2 = MC \cdot MD$.

(Le lecteur est prié de faire la figure.)

La ligne OM étant médiane, on a

$$MC^2 + MD^2 = 2a^2 + 2OM^2;$$

et, par suite de la relation donnée, on trouve

$$(MD - MC)^2 = 2a^2.$$

On aura aussi, en ajoutant $2OM^2$ de part et d'autre,

$$(MD + MC)^2 = 2a^2 + 4OM^2.$$

Il sera dès lors très facile de construire la somme et la différence des côtés MD et MC, et par suite de trouver le point M.

On pourrait trouver aussi facilement la projection du point M sur le diamètre; en effet, on sait que l'on a

$$MD^2 - MC^2 = 4a \times OB.$$

Si l'on multiplie membre à membre les deux égalités précédentes, on trouve

$$16a^2 \times OB^2 = 4a^2(a^2 + 2OM^2).$$

Par suite, on construira très facilement la ligne OB.

Trouver, pour x $= 1$, *la valeur de*

$$\frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[p]{x} - 1}.$$

Posons $x = y^{mp}$; alors il vient

$$\sqrt[m]{x} = y^p; \quad \sqrt{x} = y^m,$$

et l'expression devient, en supprimant haut et bas le facteur $y - 1$,

$$\frac{y^{p-1} + y^{p-2} + \ldots + 1}{y^{m-1} + y^{m-2} + \ldots + 1}$$

et pour $y = 1$, ce qui donne aussi $x = 1$, on trouve

$$\frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[p]{x} - 1} = \frac{p}{m}.$$

Application: $$\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[5]{x} - 1}$$

pour $x = 1$, a pour valeur $\frac{5}{3}$.

Tout plan perpendiculaire à l'une des arêtes d'un trièdre rectangle coupe ce trièdre suivant un triangle rectangle.

Le théorème est évident lorsque le plan est perpendiculaire à l'arête du dièdre droit.

Soit un angle trièdre SABC, dont le dièdre suivant SC est droit; je mène un plan ABC perpendiculaire à l'arête SB; il est par suite perpendiculaire au plan BSC; or le plan ASC est aussi perpendiculaire à BSC; donc l'intersection AC de ces deux plans est perpendiculaire à la face BSC, et par suite à la droite BC.

Ce théorème nous permet de résoudre facilement le problème suivant.

Étant données deux droites SA *et* SB *qui se coupent, par* SA *on mène un plan et par* SB *un plan perpendiculaire au précédent: trouver le lieu des droites d'intersection.*

Si je mène un plan perpendiculaire à la droite SA, ce plan coupera le trièdre formé par ASB et les deux plans mobiles suivant un triangle rectangle dont le sommet de l'angle droit sera sur l'arête SC; donc le point C d'intersection de cette arête mobile avec le plan que je viens de mener sera sur un cercle ayant pour diamètre l'intersection de ce plan et du plan ASB. Il en résulte que la surface engendrée par l'intersection des plans mobiles est un cône oblique à base circulaire; les deux directions de sections circulaires sont les deux plans perpendiculaires aux arêtes SA et SB.

QUESTIONS A L'USAGE DES CANDIDATS

A L'ÉCOLE SAINT-CYR

Problèmes de mécanique.

Un parallélépipède rectangle pesant s'appuie par une de ses faces sur un plan horizontal ; il est en outre sollicité par une force horizontale située dans le plan vertical passant par son centre de gravité et perpendiculaire à l'une des faces latérales. Examiner si le corps glissera sur le plan horizontal, ou tournera autour de l'arête.

— Trois forces qui se font équilibre sont représentées, en grandeur et en direction, par les perpendiculaires abaissées d'un point sur les côtés d'un triangle. Trouver la position de ce point.

— Un poids P placé sur un plan incliné parfaitement poli, est relié à un poids Q par un fil passant sur une poulie située au sommet du plan incliné; étudier les lois du mouvement de ce système.

— Trouver le centre de gravité de la figure formée par un triangle équilatéral et un carré, la base du triangle coïncidant avec le côté du carré.

— Un projectile est lancé avec une vitesse v, faisant un angle α avec l'horizon. Trouver au bout de combien de temps il repassera dans le même plan horizontal.

— Déterminer avec quelle vitesse il faut lancer un projectile le long d'un plan incliné pour que le temps qu'il emploierait à parcourir la longueur du plan soit égal au temps qu'un mobile tombant librement du repos mettrait à parcourir la hauteur du même plan.

— Calculer l'inclinaison d'un plan, sachant que si l'on abandonne, du point le plus élevé, deux corps pesants, l'un sur le plan, l'autre verticalement, le temps employé par le premier pour parcourir le plan est n fois le temps employé par le second pour parcourir la hauteur du plan.

— Sous l'action d'une certaine force, un corps pesant 100 kilogrammes s'élève d'un mouvement uniforme suivant la ligne de plus grande pente d'un

plan incliné de 45° sur l'horizon. Trouver la grandeur de la force qui agit sur ce corps en la supposant : 1° parallèle à la longueur du plan ; 2° parallèle à la base du plan ; le coefficient de frottement est 0,30.

— Une tige homogène AB, de longueur l et de poids π, est mobile autour d'un point A ; au point C, tel que $AC = d$, on applique un poids P. On demande à quelle distance AD du point A il faut appliquer une force Q perpendiculaire à la tige pour qu'il y ait équilibre.

— Étant donnée une circonférence, on lui circonscrit un polygone quelconque ; si l'on considère le centre de gravité g du périmètre de ce polygone, le centre de gravité G de la surface et le centre O de la circonférence, les trois points O, G, g, sont en ligne droite. Trouver le rapport de OG à Og.

— En quel point de la surface totale d'un prisme triangulaire oblique faut-il suspendre ce corps par un fil de façon que, sous l'influence de la pesanteur, les arêtes latérales prennent une direction parallèle ou perpendiculaire à celle du fil ?

— Une tige AB, de poids P, de centre de gravité C, est mobile autour d'un de ses points O ; un fil AHK, attaché à l'extrémité A, passe sur une poulie très petite H, dont le rayon sera considéré comme nul, et qui est situé verticalement au-dessus du point O, puis retombe en HK le long de la verticale. On connaît $OH = h$; on demande quel poids il faut suspendre à l'extrémité K du fil pour qu'il y ait équilibre lorsque les deux parties du fil font un angle donné $AHK = \theta$.

— Trois hommes ont à transporter une plaque homogène et d'égale épaisseur, ayant la forme d'un parallélogramme ; l'un d'eux prend la plaque par un sommet ; on demande en quels points du contour les deux autres porteurs doivent la saisir pour que le poids soit également réparti entre les trois hommes.

— Une boîte cubique sans couvercle est suspendue par un des sommets de la base supérieure ; elle est vide, et ses parois sont d'épaisseur uniforme, mais négligeable ; trouver la position d'équilibre.

— Une plaque triangulaire homogène, pesante, et assimilable à un plan est suspendue par trois fils attachés aux trois sommets du triangle ; lorsqu'il y a équilibre, la plaque est horizontale. Trouver une relation entre les longueurs α, β, γ, des fils, et les côtés respectivement opposés dans le triangle.

— Si trois mobiles, placés aux sommets d'un triangle, partent en même temps et parcourent respectivement les trois côtés dans le même sens avec des vitesses proportionnelles à ces côtés, leur centre de gravité reste immobile.

— Déterminer la position d'équilibre d'un système de deux mobiles pesants égaux assujettis à rester sans frottement sur une circonférence, située dans un plan vertical, et sur une tige rigide susceptible de se mouvoir librement autour d'un point A pris sur le diamètre horizontal de la circonférence.

REMARQUES SUR LES FIGURES HOMOTHÉTIQUES

ET LES FIGURES INVERSES

Par MAURICE d'OCAGNE.

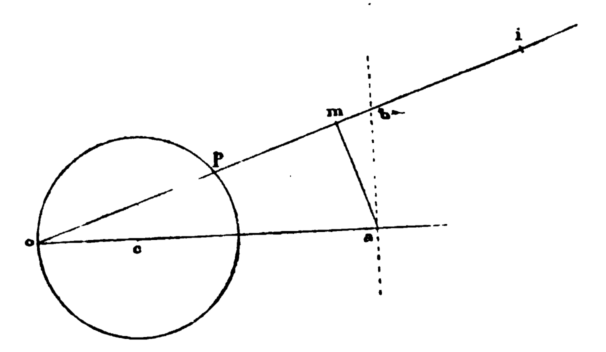
I. — Considérons deux figures, courbes ou surfaces, homothétiques par rapport au point o. Tirons par ce point une

sécante quelconque qui coupe les deux figures respectivement en m et p. Prenons sur cette sécante un point i tel

que
$$\frac{om}{pi} = h,$$
h étant une constante. Nous avons de plus
$$\frac{om}{op} = k.$$

Donc
$$\frac{op}{pi} = \frac{h}{k} \text{ ou } \frac{op}{op + pi} = \frac{h}{k + h},$$
c'est-à-dire
$$\frac{op}{oi} = \frac{h}{k + h}.$$

La figure décrite par le point i, lorsque la sécante pivote



autour du point o, est donc homothétique à la figure décrite par p et par suite à celle décrite par m.

II. — Considérons maintenant deux figures, courbes ou surfaces, inverses par rapport au point o. Une sécante quelconque menée par ce point coupe ces deux figures respectivement en m et p. Prenons sur cette sécante un point i tel que
$$om.pi = h.$$

Mais nous avons
$$om.op = k.$$

Donc
$$\frac{pi}{op} = \frac{h}{k}$$
ou
$$\frac{oi}{op} = \frac{h + k}{k}.$$

La figure décrite par le point i est donc homothétique,

par rapport à *o* à la figure que décrit le point *p* et, par suite, inverse par rapport à *o* de la figure que décrit le point *m*.

Pour faire ressortir l'utilité qui s'attache à ces remarques, je vais successivement les appliquer à un exemple très simple. *Autour de l'extrémité* o *du diamètre* oc *de la circonférence* c, *pivote une sécante* op *coupant cette circonférence en* p. *D'un point fixe* a *pris sur* oc, *on abaisse la perpendiculaire* am *sur la sécante et on porte sur cette sécante la longueur* mi = op : *trouver le lieu du point* i.

Première solution. — Le lieu du point *m* est la circonférence décrite sur *oa* comme diamètre ; cette circonférence est homothétique à la circonférence *c* par rapport au point *o*. Mais

$$\frac{mi}{op} = 1.$$

Donc, d'après la première remarque, le lieu du point *i* est homothétique à la circonférence *c* par rapport à *o* ; c'est, par suite, une circonférence passant par *o* et ayant son centre sur *oa*.

Deuxième solution. — Élevons à *oa*, en *a*, la perpendiculaire *ao* qui coupe la sécante mobile au point *b*. La droite *ab* peut être considérée comme inverse de la circonférence *c* par rapport à *o*. Mais

$$ob.pi = ob.om = oa^2,$$

qui est constant.

Donc, d'après la seconde remarque, le lieu du point *i* est homothétique de la circonférence *c* par rapport au point *o* ; nous sommes ramenés à la même conclusion que précédemment.

INTERSECTION
DE DEUX SURFACES DE RÉVOLUTION DU SECOND DEGRÉ, DONT LES AXES NE SONT PAS SITUÉS DANS UN MÊME PLAN

Par M. L. **Geoffroy**, répétiteur à l'Ecole Centrale, professeur au collège Chaptal.

On n'examine pas, à l'ordinaire, dans les cours de géométrie descriptive, la question qui fait l'objet de cette note; elle a été écartée des programmes officiels et, dans l'esprit des élèves, il y a là une sorte de lacune qu'ils attribuent volontiers à l'impuissance de la méthode graphique.

Dans les ouvrages destinés à l'enseignement, on se contente de considérer le problème actuel comme un cas particulier du problème général de l'intersection de deux surfaces du second degré. On choisit les plans de projection d'une manière convenable, et on prend des plans sécants auxiliaires, qui donnent dans l'une des surfaces (si cela est possible) des sections elliptiques se projetant suivant des cercles; les plans auxiliaires, déplacés parallèlement à eux-mêmes, donnent dans l'autre surface des sections semblables se projetant suivant des courbes homothétiques; on trace l'une de ces courbes avec le plus grand soin, et elle permet d'obtenir, par le déplacement des projections circulaires des sections de la première surface, tous les points de l'intersection des deux surfaces.

(Voir la *Géométrie descriptive* de Kiæs.)

Nous nous sommes proposé de chercher une solution directe du problème, pour le cas particulier de deux surfaces de révolution du second degré, dont les axes sont placés d'une manière quelconque l'un par rapport à l'autre.

Cette solution est fondée sur le théorème suivant.

Deux surfaces du second degré, circonscrites à une même troisième surface également du second degré, se coupent suivant deux courbes planes.

Considérons deux sphères inscrites respectivement dans chacune des surfaces de révolution données, et imaginons les deux cônes qui, ayant pour sommets les centres de similitude directe (S) ou inverse (T) des deux sphères considérées, sont circonscrits à ces sphères. Prenons l'un de ces cônes, S par exemple; il coupe chacune des surfaces de révolution suivant deux courbes planes, en raison du théorème que nous rappelons plus haut.

Désignons par A et B les courbes planes déterminées par le cône sur la première surface; et par C et D les courbes planes situées sur la seconde surface, les courbes A et C, par exemple, étant situées sur le cône S, auront deux points communs réels ou imaginaires. Ces deux points appartiendront à l'intersection cherchée ; ils sont d'ailleurs situés sur l'intersection des plans des courbes A et C. On pourra donc les construire en cherchant l'intersection de la droite commune à ces deux plans avec le cône S.

Chaque cône auxiliaire fournira huit points; car les plans A et B coupent C et D suivant quatre droites, qui rencontrent elles-mêmes le cône S en huit points réels ou imaginaires.

La question est ainsi ramenée au problème simple : Trouver l'intersection d'une droite et d'un cône de révolution.

Pour simplifier les constructions, on choisira le plan vertical, parallèle à la fois aux axes des deux surfaces, et on prendra le plan horizontal perpendiculaire à l'un des axes.

Le contour apparent du cône S s'obtient immédiatement, puisqu'il est formé par les tangentes communes aux contours apparents des deux sphères.

Pour obtenir les courbes planes communes à l'une quelconque des surfaces de révolution et au cône S, on ramènera l'axe de ce cône parallèlement au plan vertical, en le faisant tourner autour de l'axe de la surface de révolution considérée. Les courbes planes seront alors projetées verticalement suivant deux lignes droites; on aura ainsi les plans des deux courbes planes qu'on ramènera par une rotation contraire à la précédente dans leur position véritable.

Ayant effectué la même construction pour l'autre surface,

on n'aura plus qu'à construire les quatre droites suivant lesquelles le couple des plans A et B rencontre le couple C et puis D; on cherchera les intersections des quatre droites ainsi obtenues avec le cône de révolution.

Nous ferons remarquer que notre méthode, étant générale, s'applique au cas particulier de deux surfaces de révolution dont les axes se coupent.

En prenant le plan vertical parallèle au plan des deux axes et l'un des axes étant perpendiculaire au plan horizontal, on peut substituer à l'emploi de la sphère de rayon variable décrite du point de concours des axes comme centre (ce qui ne donne à chaque opération que deux points de l'intersection) celui du cône S, qui donne huit points de l'intersection. On obtient immédiatement ces points dans le cas actuel, car les courbes planes A, B, C, D, sont projetées verticalement suivant des lignes droites, et on reporte facilement sur le plan horizontal les points obtenus en projection verticale à l'aide des parallèles de la surface de révolution dont l'axe est vertical.

Enfin nous terminerons par cette dernière remarque, que les deux sphères inscrites étant absolument arbitraires, on peut simplifier les constructions, en laissant l'une d'elles fixe pendant tout le cours de l'exécution de l'épure.

BACCALAURÉAT

PARIS

Le côté de la base d'une pyramide hexagonale régulière est a; sa hauteur est h; exprimer, au moyen de a et de h, le cosinus de l'angle formé par deux faces latérales adjacentes.

— On donne les deux traces d'un plan et la projection horizontale p du pied P de la perpendiculaire MP menée du point M de l'espace sur ce plan; la longueur de cette perpendiculaire est l; trouver les projections du point M.

— Dans le demi-cercle ADA', on mène la corde BB' parallèle au diamètre AA', à une distance de ce diamètre égale à la moitié du rayon. Exprimer le volume du solide décrit par la rotation autour de AA' de la partie comprise entre les deux parallèles.

— On donne une circonférence et un diamètre horizontal AB. Trouver sur la circonférence un point M tel que, en abaissant une perpendiculaire MP sur

AB, on ait $MP + PA = m$, m étant une quantité donnée. Quelles sont les valeurs que doit avoir m pour que le problème ait 0, 1 ou 2 solutions?

— Dans une progression arithmétique composée de trois termes, on donne la somme des termes, $2a$, et la somme de leur quatrième puissance, b^4; calculer le terme du milieu et la raison de la progression.

— Deux droites situées chacune dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre étant données par leurs traces, on propose de trouver les projections de leur perpendiculaire commune.

— Sur le diamètre AB d'un cercle de rayon donné R, on porte une longueur $AC = x$. Au point C, on élève au diamètre une perpendiculaire qui rencontre en D la circonférence AMB, et on achève le rectangle ACDE. Puis, on fait tourner la figure autour de AB. On propose de déterminer x de façon que le rapport du volume engendré par le segment ACDM au volume engendré par le rectangle ACDE ait une valeur déterminée k. — Quelle est la plus petite valeur que puisse prendre le nombre k pour que le problème soit possible?

MARSEILLE

Dans un cercle ayant un rayon égal à 3^m, la corde AB sous-tend un arc de 30°; la corde BC sous-tend un arc de 60°. On demande la surface ABCMA comprise en les deux cordes et la circonférence.

— Résoudre un triangle rectangle dont on donne la bissectrice et la médiane issues d'un même sommet. *(Cas où ce sommet est le sommet de l'angle droit; cas où c'est le sommet d'un angle aigu;* ces deux cas différents ne sont pas indiqués dans l'énoncé, qui est ainsi incomplet.)

— Angle d'une droite parallèle au plan vertical, et d' un plan passantpar la ligne de terre et un point.

BESANÇON

— Étant donné un triangle isoscèle dont l'angle au sommet est A, on prend sur la base un point M, et on abaisse des perpendiculaires MP et MQ. 1° Exprimer la surface du quadrilatère APMQ; on désignera par A l'angle au sommet, par a la base, par p et q les distances MP et MQ; 2° déterminer la position du point M de telle sorte que la surface soit maxima ou minima. — Appliquer la première partie au cas où l'on a

$$A = 32^\circ\ 27'\ 14''$$
$$a = \sqrt{5}\ ;\ p = \sqrt{2}\ .$$

— On lance de bas en haut, avec une vitesse v, un corps pesant sur un plan incliné d'un angle α à l'horizon; ce corps s'arrête en un point M dont on demande la distance à l'origine. Trouver en outre le lieu décrit par le point M lorsque l'inclinaison α du plan varie de 0 à 90°.

— Trouver la limite vers laquelle tend l'expression

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 2} - x\sqrt{3}$$

quand x tend vers l'infini.

ÉCOLE DES MINEURS DE SAINT-ÉTIENNE, 1881

Mathématiques.

Calculer à un dix-millième près, le volume d'une sphère dont le rayon est $n\sqrt{2}$ (Chaque candidat prendra pour la valeur de n son numéro de passage).

— Résoudre et discuter

$$x^2 + y^2 = a^2$$
$$\log x + \log y = n$$

— On a un cône droit à base circulaire dont les génératrices sont indéfiniment prolongées des deux côtés du sommet, on le coupe par un plan perpendiculaire à l'axe. On demande de mener un second plan parallèle au premier, de façon que la surface latérale du solide compris entre les deux plans soit dans un rapport déterminé avec la somme des deux bases. Discuter.

Physique.

— Une machine pneumatique permet de faire le vide à 0^m,001 de mercure; à quel degré de vide arrivera-t-on en appliquant le perfectionnement de Babinet?

— Une sphère de rayon R, de densité $\frac{1}{1+\alpha}$, est plongée dans l'eau distillée à 4°. De quelle hauteur s'enfoncera-t-elle dans le liquide? (Chaque candidat prendra pour α son numéro de passage.)

— Une substance transparente est taillée en prisme d'angle de 60°. Un rayon lumineux traversant cette substance sous l'angle de déviation minima, subit une déviation de 39° 42′ 40″. Quel est l'indice de réfraction ?

— Une lentille biconvexe est taillée sous deux faces sphériques de 1 mètre de rayon. On constate qu'un point lumineux, situé dans l'axe à 8 mètres de la lunette, fait son image de l'autre côté à 1^m,10. Trouver l'indice de réfraction.

COLLÈGE ROYAL FRANÇAIS DE BERLIN

ÉPREUVES ÉCRITES POUR LES BACHELIERS

Pâques 1880

Trouver les quatres termes d'une proportion connaissant la différence des moyens, a; la différence des extrêmes, b; et la somme des carrés des quatre termes, c.

— Trouver les deux côtés de l'angle droit et la hauteur d'un triangle rectangle sachant que la somme de ces trois lignes est égale à b, et l'hypoténuse à a.

— Construction et résolution d'un triangle obliquangle, connaissant un

angle C, la somme s de ses deux côtés, et la différence d des hauteurs correspondantes.

— Trouver le rapport des aires des trois sphères inscrite, exinscrite et circonscrite à un octaèdre régulier.

Saint-Michel 1880

Résoudre
$$xy + xy^3 = 6$$
$$x + xy^2 + xy^4 = 9.$$

— Trouver le premier terme x, et la raison y, d'une proportion arithmétique connaissant le produit a, et la somme $5\ b$ de ses termes.

— Construire et résoudre un triangle obliquangle, connaissant le rayon ρ du cercle inscrit, l'angle A et le segment q du côté c adjacent à A et déterminé par la hauteur. Application :
$$\rho = 22{,}5;\ q = 11;\ A = 79°36'40''.$$

— Dans un vase en forme de cône droit équilatéral renversé, on a placé une sphère de rayon r, et versé assez d'eau pour recouvrir exactement la sphère. Quelle hauteur cette eau atteindra-t-elle dans le vase après qu'on aura retiré la sphère?

CONCOURS ACADÉMIQUES DIVERS

On donne un angle ABA'; on mène la bissectrice de l'angle supplémentaire CBA'; d'un point O de cette bissectrice on abaisse les perpendiculaires OD et OD' sur AC et A'B; on fait passer par les points O et B une série de cercles qui coupent les côtés de l'angle ABA' aux points P et P', Q et Q'....; démontrer que : 1° les cordes PP', QQ'... sont vues du point O sous un angle constant; 2° les perpendiculaires élevées au milieu des cordes PP', QQ'... passent par le point O; 3° les segments PQ, P'Q' sont égaux; 4° la droite DD' passe par le milieu des cordes PP'; 5° les différentes cordes sont tangentes à une même parabole dont le foyer est O et la tangente au sommet est DD'. Construire cette parabole et trouver les points de tangence des diverses cordes. *(Grenoble, 1867.)*

— Si dans une progression par différence, trois termes consécutifs a, b, c sont premiers absolus, la raison est divisible par 6, à moins que le premier terme ne soit 3; s'il y en a 5, la raison est divisible par 30, à moins que le premier terme ne soit 5; s'il y en a 7, la raison est divisible par 210, à moins que le premier terme ne soit 7. (On suppose que le premier terme de la progression n'est pas 1). *(Poitiers, 1869.)*

— Résoudre l'équation
$a \cos^2 x + (2a^2 - a + 1)\sin x - 3a + 1 = 0$ *(Montpellier, 1868)*

— Étant donné un cercle et un diamètre AB, on mène une corde quelconque AC, et on la prolonge d'une longueur CD = AC; on joint le point D au centre du cercle, et on mène BC; lieu des points d'intersection de BC et de DO. *(Montpellier, 1868.)*

— Les trois angles d'un triangle sont en progression arithmétique, la somme des carrés de leurs sinus est égale à 2; quelles relations y a-t-il entre les côtés? *(Montpellier, 1869.)*

— Étant données deux parallèles coupées par une sécante, inscrire entre ces deux droites deux cercles tangents extérieurement l'un à l'autre, et tels que l'un soit tangent à la première parallèle et à la sécante, et l'autre tangent à la seconde parallèle et à la sécante. Solution géométrique et solution analytique.

(Montpellier, 1875.)

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

CONCOURS DE 1881

Mathématiques spéciales.

On donne un ellipsoïde. On considère les droites D telles que si, par chacune d'elles, on mène des plans tangents à l'ellipsoïde, les normales aux points de contact M et M' soient dans un même plan. — 1° Démontrer que la droite D et la droite de contact MM' sont rectangulaires. — 2° Trouver le lieu des droites D qui passent par un point donné A. — 3° Ce lieu est un cône du second degré; trouver le lieu des positions du point A pour lesquelles ce cône est de révolution. — 4° Trouver l'enveloppe C des droites D qui sont contenues dans un plan donné P, et la surface S engendrée par C quand P se déplace parallèlement à un plan donné Q. — 5° Trouver pour quelles directions de Q la surface S est de révolution.

Mathématiques élémentaires.

Résoudre un triangle, connaissant le côté a, l'angle B, et la différence $b - h = l$ entre le côté b et la hauteur h issue du sommet A. Discuter.

Montrer que le problème peut être ramené à la recherche des points où le côté AB rencontre une parabole ayant pour foyer le sommet C du triangle et pour directrice une parallèle au côté BC. Discuter à nouveau le problème, et comparer les résultats des deux discussions.

Mécanique.

(Cette composition porte sur un sujet désigné à l'avance.)

Théorie. — Montrer que l'étude du mouvement d'un corps solide qui peut tourner librement autour d'un point fixe, et qui est soumis à l'action de forces qui sont connues pour chaque position du corps solide, dépend de l'intégration de six équations différentielles du premier ordre. Établir ces équations.

Application. — Effectuer cette intégration dans le cas où deux des axes principaux d'inertie du corps relatifs au point fixe sont égaux, et où aucune force extérieure n'agit sur lui.

AGRÉGATION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL

Algèbre et Trigonométrie.

Calculer avec toute l'exactitude des tables à sept décimales la valeur de l'angle u donné par l'équation

$$u - e \sin u = m. \qquad (1)$$

pour $m = 48''$, $e = 0{,}167$.

On en déduira le rayon r et l'angle v au moyen des relations

$$r = 1 - e \cos u = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos v}.$$

Nota. — Dans le calcul de l'équation (1), u devant être exprimé en parties du rayon, sera multiplié par 206265″.

Géométrie descriptive.

Si sur les cordes d'une ellipse, menées parallèlement à une direction donnée, comme diamètres, on décrit des circonférences, l'enveloppe de celles-ci sera une ellipse. Pour démontrer cette proposition, on considérera l'ellipse donnée comme la projection oblique sur un certain plan du contour d'une sphère. On fera une épure ou croquis de la figure à main levée.

Mécanique.

Théorie du pendule simple dans le vide, pour des oscillations extrêmement petites. Application.

BIBLIOGRAPHIE

Cours de géométrie descriptive, *deuxième volume, premier fascicule, par* **M. Jurisch**, *professeur à l'école Colbert. — Paris, librairie Delagrave.*

Nous avons, il y a un an, signalé à nos lecteurs l'apparition du premier volume de cet ouvrage; la seconde partie, qui vient de paraître, comprend les trièdres, les plans tangents, les sections planes du cône, et la méthode des plans cotés.

On voit que les deux volumes parus comprennent ainsi tout le programme de Saint-Cyr; et nous signalons avec plaisir l'extension donnée par l'auteur à la méthode des plans cotés; M. Jurisch a repris rapidement, par cette méthode, si importante dans la pratique, les principales questions qu'il a traitées avec plus de détails dans la méthode des deux projections; c'est ainsi par exemple qu'il a montré comment on peut mener les plans tangents au cône et au cylindre en projection cotée. Les indications suffiront aux élèves pour leur donner une idée bien précise de la méthode, et les engager à refaire en projection cotée un certain nombre d'épures qu'ils auront exécutées d'autre part à l'aide de deux plans de projection; c'est le meilleur moyen pour eux de reconnaître que les deux méthodes ne présentent pas plus de difficultés l'une que l'autre.

Après les sections planes du cône, l'auteur a mis les énoncés de cinquante problèmes, choisis pour la plupart dans les questions d'examen ou de concours pour les écoles; ce sont les meilleurs exercices que l'on puisse donner comme préparation à des élèves.

En terminant, nous pouvons dire que, grâce à cette méthode qui consiste à ne pas laisser passer une question de détail sans la signaler à ses lecteurs, M. Jurisch nous a donné, pour la préparation au baccalauréat et à l'école Saint-Cyr, un guide très précieux dans l'ensemble de ses deux volumes; les

candidats à l'École militaire auront appris les meilleures constructions pratiques pour l'exécution d'une épure; et nous croyons que, en étudiant sérieusement cet ouvrage, plus d'un élève prendra du goût pour l'étude de la géométrie descriptive, dont il aura pu apprécier les méthodes si simples et si générales.

A. M.

ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Concours de 1879

Solution par M. J. **Braun** élève du lycée Charlemagne (*).

On donne une conique rapportée à ses axes $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1$, *et un point* M *sur cette conique.*

1° *Par les extrémités d'un diamètre quelconque de la courbe et le point* M, *on fait passer un cercle. Prouver que le lieu décrit par le centre de ce cercle est une conique* K *passant par l'origine* O *des axes.*

2° *Si autour du point* O *on fait tourner deux droites rectangulaires, elles rencontrent la conique* K *en deux points. Prouver que le lieu des points de rencontre des tangentes menées en ces points, est la droite perpendiculaire au milieu du segment* OM.

3° *Par le point* O *on peut mener, indépendamment de la normale qui a son pied au point* O, *trois autres normales à la conique* K.

Dans le cas particulier où la conique donnée est une hyperbole équilatère ($A = 1$, $B = -1$), *montrer qu'une seule de ces normales est réelle.*

4° *Calculer les coordonnées de son pied.*

5° *Dans le cas général, trouver l'équation du cercle circonscrit au triangle formé par les pieds de ces trois normales.*

Dans ce qui va suivre, nous désignerons les coordonnées du point M par x_1 y_1.

PREMIÈRE PARTIE. — Soit $y = mx$ l'équation d'un diamètre de la conique. La deuxième corde d'intersection du cercle

---

(*) Aujourd'hui élève à l'École polytechnique.

avec cette conique passe par le point M, et elle est symétrique de la première par rapport aux axes ; son équation est donc $y - y_1 = - m\,(x - x_1)$.

L'équation d'une conique passant par les points d'intersection de la conique donnée et des deux droites précédentes est

$$(y - mx)\,[y - y_1 + m\,(x - x_1)] + \lambda\left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - 1\right) = 0$$

Pour que cette conique soit un cercle, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\lambda}{A} - m^2 = \frac{\lambda}{B} + 1$$

ou

$$\lambda = (1 + m^2)\,\frac{AB}{B - A}.$$

En portant cette valeur dans l'équation ci-dessus, ordonnant et simplifiant, l'équation générale du cercle devient

$$\frac{Am^2 + B}{B - A}\,(x^2 + y^2) + (mx - y)\,(mx_1 + y_1) - \frac{AB}{B - A}(1 + m^2) = 0,$$

Les coordonnées du centre de ce cercle sont données par les deux relations

$$\left.\begin{aligned} 2x\,\frac{Am^2 + B}{B - A} + m\,(mx_1 + y_1) &= 0 \\ 2y\,\frac{Am^2 + B}{B - A} - (mx_1 + y_1) &= 0 \end{aligned}\right\}\ \alpha$$

L'élimination de m entre ces deux équations donne le lieu du centre.

En divisant membre à membre on voit que $\frac{x}{y} = - m$.

Ce qui pouvait être prévu, car le centre du cercle se trouve sur la perpendiculaire en O au diamètre $y = mx$.

Remplaçant m par $-\frac{x}{y}$ dans la seconde des équations (α), elle devient

$$2y\left(A\frac{x^2}{y^2} + B\right) + (A - B)\left(-\frac{x}{y}x_1 + y_1\right) = 0$$

ou, en supprimant le facteur étranger $y = 0$,

$$2(Ax^2 + By^2) + (A - B)(yy_1 - xx_1) = 0. \qquad (1)$$

Cette équation représente une conique K ayant ses axes parallèles à ceux de la conique donnée et passant par l'origine. La tangente en ce point est $yy_1 = xx_1$. Par suite la normale a pour équation $yx_1 + xy_1 = 0$; cette droite est symétrique de la droite $\frac{y}{y_1} = \frac{x}{x_1}$ par rapport à Ox. Donc la normale OM' à la conique K au point O est symétrique de OM par rapport à Ox.

La conique K rencontre Ox au point D : $x = \frac{A - B}{2A} x_1$.

Elle rencontre Oy au point E : $y = -\frac{A - B}{2B} y_1$.

Les points D et E peuvent s'obtenir par une construction géométrique. En effet la droite DE a pour équation

$$Byx_1 - Axy_1 + \frac{A - B}{2} x_1 y_1 = 0. \qquad (\beta)$$

Cette droite est parallèle à la normale en M à la conique donnée, car cette normale est

$$\frac{Ax}{x_1} - \frac{By}{y_1} = A - B.$$

De plus, si l'on fait $x = \frac{x_1}{2}$, $y = \frac{y_1}{2}$, l'équation (β) étant satisfaite, on voit que DE passe par le milieu C de OM.

De ces deux remarques on déduit la construction des points DE.

Le centre I de la conique K a pour coordonnées

$$x = \frac{A - B}{4A} x_1, \quad y = -\frac{A - B}{4B} y_1. \qquad (\gamma)$$

Ce point I est le milieu du segment DE. Il s'ensuit que le point F, quatrième sommet du rectangle construit sur OD et OE, appartient également à la conique K, qui est maintenant déterminée, puisque l'on connait quatre points O, D E, F, et la tangente en O. On peut remarquer que le point F est le milieu du segment intercepté par les axes sur la normale en M à la conique donnée.

Nous allons montrer que la conique K est semblable à la conique donnée.

En effet, l'invariant absolu $\frac{(A+A')^2}{B^2-AA'}$ est ici, pour la conique donnée,

$$\frac{\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)^2}{-\frac{1}{AB}}=\frac{(A+B)^2}{-AB}$$

et pour la conique K $\frac{(A+B)^2}{-AB}$.

Donc ces deux coniques sont semblables.

D'ailleurs, si l'on transporte les axes parallèlement a eux-mêmes au point I, par les formules

$$x=X+\frac{A-B}{4A}x_1,\quad y=Y-\frac{A-B}{4B}y_1,$$

l'équation (1) devient

$$2(AX^2+BY^2)-\frac{1}{2}\frac{(A-B)^2}{4}\left(\frac{x_1^2}{A}+\frac{y_1^2}{B}\right)=0$$

ou $$AX^2+BY^2=\left(\frac{A-B}{4}\right)^2. \qquad (2)$$

Si maintenant on fait tourner la conique K de 90° autour du point I, son équation (2) deviendra, par la simple permutation de X en Y,

$$\frac{X^2}{A}+\frac{Y^2}{B}=\frac{(A-B)^2}{16AB}. \qquad (2\ bis)$$

Ce qui montre qu'après cette rotation la conique K est homothétique de la conique donnée. On déduit de là en particulier que :

Les asymptotes de la conique K *sont perpendiculaires à celles de la conique donnée.*

Enfin l'équation (2), étant indépendante de $x_1\, y_1$, montre que

Lorsque le point M *parcourt l'ellipse donnée, la conique* K *reste invariable de forme et de grandeur. Elle ne fait que se déplacer parallèlement à elle-même.*

Il s'ensuit que dans ce mouvement du point M, le point I, centre de la conique K, décrit lui-même la conique

$$Ax^2 + By^2 = \left(\frac{A - B}{4}\right)^2$$

égale à la conique K.

Deuxième partie. — D'après le théorème de Frégier, la droite qui joint les extrémités des deux rayons rectangulaires issus de O, passe par un point fixe situé sur la normale OM' en O. Comme OD et OE sont rectangulaires, il en résulte que le point fixe en question n'est autre que le point G, intersection de DE avec OM'.

Cela posé, il est évident que le lieu demandé est la polaire du point G par rapport à la conique K. C'est donc déjà une droite. Il s'agit de reconnaître qu'elle est perpendiculaire à OM et passe par le milieu C de ce segment.

Le point G étant défini par l'équation (β) qui représente DE et $\frac{y}{y_1} = -\frac{x}{x_1}$ qui représente OM', les coordonnées sont

$$x' = \frac{A - B}{2(A + B)}\, x_1 \text{ et } y' = -\frac{A - B}{2(A + B)}\, y_1. \qquad (\delta)$$

Par suite sa polaire par rapport à la conique K a pour équation

$$x(4Ax' - (A - B)\, x_1) + y\,(4By' + (A - B)\, y_1) + (A - B)(y'y_1 - x'x_1) = 0$$

ou bien

$$xx_1\left(\frac{2\,A}{A + B} - 1\right) + yy_1\left(\frac{-2\,B}{A + B} + 1\right) + (x_1^2 + y_1^2)\,\frac{A - B}{-2(A + B)} = 0$$

ou enfin
$$xx_1 + yy_1 = \frac{x_1^2 + y_1^2}{2}.$$

Cette droite est bien perpendiculaire à la droite OM $\left(\frac{y}{y_1} = \frac{x}{x_1}\right)$ et elle passe bien par le point C, dont les coordonnées sont $\frac{x_1}{2}$ et $\frac{y_1}{2}$.

Troisième partie. — Dans le cas où l'on a $A = 1$, $B = -1$, l'équation (1) devient

$$x^2 - y^2 + yy_1 - xx_1 = 0. \qquad (4)$$

La conique K est donc aussi une hyperbole équilatère; d'ailleurs il ne pouvait pas en être autrement, puisque la conique K et la conique donnée sont semblables.

Nous allons faire voir que si d'un point d'une hyperbole équilatère on cherche à abaisser des normales à la courbe, deux de ces normales sont toujours imaginaires.

Prenons, en effet, des axes parallèles aux asymptotes, et l'origine au point d'où l'on abaisse les normales.

L'équation de l'hyperbole sera de la forme

$$xy = ax + by. \qquad (\varepsilon)$$

L'hyperbole aux pieds des normales abaissées de l'origine aura pour équation

$$\frac{x}{y-a} = \frac{y}{x-b}$$

ou

$$x^2 - y^2 - bx + ay = 0. \qquad (\varphi)$$

Il s'agit de trouver les points communs aux deux courbes (ε) et (φ). Éliminons y entre ces deux équations, il vient

$$x^2 - \frac{a^2x^2}{(x-b)^2} - bx + \frac{a^2x}{x-b} = 0;$$

ou bien, en supprimant la solution $x = 0$ qui correspond à la normale qui a son pied en O, puis simplifiant l'équation :

$$(x-b)^3 = a^2b.$$

Cette équation n'a évidemment qu'une racine réelle, savoir :

$$x = b + \sqrt[3]{a^2b};$$

à laquelle correspond l'ordonnée

$$y = a + \sqrt[3]{ab^2}.$$ Ainsi

D'un point quelconque O *d'une hyperbole équilatère* $xy = ax + by$, *on ne peut abaisser qu'une normale réelle à la courbe, et les coordonnées de son pied sont*

$$x = b + \sqrt[3]{a^2b}, \quad y = a + \sqrt{ab^2}. \qquad (5)$$

Quatrième partie. — Le résultat précédent va nous servir à résoudre la question proposée pour l'hyperbole (4).

Faisons tourner les axes de 45° autour de O; les formules

de transformation sont

$$x = \frac{X - Y}{\sqrt{2}} \qquad y = \frac{X + Y}{\sqrt{2}} \qquad (\lambda)$$

et par suite l'équation (4) devient dans ce système

$$XY = \frac{y_1 - x_1}{2\sqrt{2}} X + \frac{y_1 + x_1}{2\sqrt{2}} Y. \qquad (4 \textit{ bis})$$

En appliquant à cette équation les formules (5), nous trouvons pour les coordonnées de la normale réelle

$$X = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[x_1 + y_1 + \sqrt[3]{(y_1 - x_1)^2 (y_1 + x_1)^2} \right]$$

$$Y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[y_1 - x_1 + \sqrt[3]{(y_1 - x_1)(y_1 + x_1)^2} \right]$$

Il faut maintenant revenir aux axes primitifs, ce qui se fait immédiatement au moyen des formules (λ). Les coordonnées cherchées sont alors définitivement

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1}{2} + \frac{1}{}\sqrt[3]{x_1^2 - y_1^2}\left[\sqrt{x_1 - y_1} + \sqrt[3]{x_1 + y_1}\right] \\ y &= \frac{y_1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt[3]{x_1^2 - y_1^2}\left[\sqrt[3]{x_1 - y_1} - \sqrt[3]{x_1 + y_1}\right] \end{aligned}\right\} (6)$$

Troisième et quatrième partie. — *Autre solution.* — On peut parvenir aux formules (6) par une autre méthode, sans effectuer aucune rotation d'axes.

L'hyperbole passant par les pieds des normales abaissées de l'origine sur l'hyperbole (4) a pour équation :

$$\frac{x}{2x - x_1} = \frac{y}{2y + y_1}$$

ou

$$4xy - xy_1 - yx_1 = 0. \qquad (7)$$

Eliminons y entre les équations (4) et (7), il vient

$$x^2 - \frac{x^2 y_1^2}{(4x - x_1)^2} + \frac{xy_1^2}{4x - x_1} - 2x_1 = 0$$

ou, en supprimant la solution $x = 0$,

$$(x - x_1)(4x - x_1)^2 - xy_1^2 + y_1^2 (4x - x_1) = 0.$$

Développant et simplifiant on a

$$16x^3 - 24x_1x^2 + 3x(3x_1^2 + y_1^2) - x_1(x_1^2 + y_1^2) = 0$$

Pour discuter et résoudre cette équation débarrassons-la

de son second terme en posant $x = z + \frac{x_1}{2}$; $\qquad (\mu)$

elle devient alors, après développement,

$$z^3 - \frac{3}{16} z\,(x_1^2 - y_1^2) - \frac{x_1}{2}\,\frac{x_1^2 - y_1^2}{16} = 0. \qquad (8)$$

Formons le caractère $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$. On a ici

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \left[\frac{x_1^2 - y_1^2}{16}\right]^2 \frac{x_1^2}{16} - \frac{(x_1^2 - y_1^2)^3}{16^3} = \frac{(y_1^2 - y_1^2)^2 p_1^2}{16^3}$$

quantité essentiellement positive. L'équation (8) n'a donc qu'une seule racine réelle ; par conséquent on trouve de nouveau qu'il n'y a qu'une normale réelle.

La formule de Cardan, appliquée à l'équation (8) donne

$$z = \sqrt[3]{\frac{x_1}{4}\,\frac{x_1^2 - y_1^2}{16} + \frac{y_1}{4}\,\frac{x_1^2 - y_1^2}{16}} + \sqrt[3]{\frac{x_1}{4}\,\frac{x_1^2 - y_1^2}{16} - \frac{y_1}{4}\,\frac{x_1^2 - y_1^2}{16}}$$

ou $\qquad z = \frac{1}{4}\sqrt{x_1^2 - y_1^2}\left(\sqrt{x_1 + y_1} + \sqrt{x_1 - y_1}\right)$

On en déduit, en vertu de la relation (μ),

$$x = \frac{x_1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt[3]{x_1^2 - y_1^2}\,[\sqrt[3]{x_1 + y_1} + \sqrt{x_1 - y_1}],$$

valeur conforme à celle déjà trouvée (6).

Quant à la valeur de y, on la déduirait de la précédente par la permutation des lettres x et y.

Cinquième partie. — Dans le cas général l'équation de l'hyperbole aux pieds des normales est

$$\frac{x}{4Ax - (A - B)x_1} = \frac{y}{4By + (A - B)y_1}$$

ou $\qquad 4xy = xy_1 + yx_1. \qquad$ (7 *bis*)

Cette équation, étant indépendante de A et de B, montre que l'hyperbole ne dépend que du point M et non de la conique donnée. On peut encore énoncer ce résultat sous la forme suivante :

Si une conique K *est circonscrite à un rectangle variable* ODFE, *dont deux côtés* OD *et* OE *sont appliqués sur* O *et* Oy,

et dont la diagonale DE *passe par un point fixe* C; *si, de plus, la normale à cette conique en* O *est symétrique de* OC, *alors les pieds des normales abaissées de* O *sur ces différentes coniques seront sur une même hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles à* Ox *et* Oy, *et passant par* O *et* C, *et ayant son centre au milieu de* OC.

Revenons maintenant au problème proposé. Il s'agit de faire une combinaison des équations (1) et (7 *bis*), de manière à supprimer la solution commune $x = 0$, $y = 0$.

Pour cela nous écrirons ces équations sous la forme

Conique K : $x(2Ax - (A - B)x_1) + y(2By + (A - B)y_1) = 0$

et Hyperbole $\dfrac{x}{x_1 - 2x} = \dfrac{y}{2y - y_1}$

Remplaçant dans la première x et y par les quantités proportionnelles $x_1 - 2x$ et $2y - y_1$, il vient

$$(x_1 - 2x)[2Ax + (B - A)x_1] + (2y - y_1)[2By + (A - B)y_1] = 0$$

ou bien $$4(By^2 - Ax^2) + 2xx_1(2A - B) + 2yy_1(A - 2B) + (B - A)(x_1^2 + y_1^2) = 0$$

Cette conique passe par les pieds des trois normales issues de O à la conique K, mais elle ne passe plus à l'origine.

Pour trouver l'équation du cercle demandé, écrivons la combinaison

$$4(By^2 - Ax^2) + 2xx_1(2A - B) + 2yy_1(A - 2B) + (B - A)(x_1^2 + y_1^2) + 2\lambda(Ax^2 + By^2) + \lambda(A - B)(yy_1 - xx_1) = 0$$

Pour que ce soit un cercle, il faut et il suffit que l'on ait $$2B + B\lambda = -2A + A\lambda$$

ou $$\lambda = 2\,\frac{A + B}{A - B}.$$

L'équation précédente devient alors

$$\frac{8AB}{A - B}(x^2 + y^2) + 2xx_1(A - 2B) + 2yy_1(2A - B) + (B - A)(x_1^2 + y_1^2) = 0$$

et la question est résolue.

EXAMENS ORAUX DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1881

Géométrie analytique.

On considère une hyperbole et une corde AB, perpendiculaire à l'axe transverse, par exemple; il existe deux cercles passant par les points A et B et tangents aux deux asymptotes. Démontrer que la distance des centres de ces cercles est constante, quelle que soit la corde principale AB considérée.

— Construire la courbe définie par les deux équations

$$y\ \frac{t}{1-t};\quad x=\frac{1+t}{(1-t)^2}.$$

— Lieu des milieux des cordes normales à une parabole.

— Construire $\qquad y^3 - xy + x = 0.$

— Asymptotes de $\rho^3(\sin\omega - 2\cos\omega) + \rho\cos\omega - 3 = 0.$

— Combien y a-t-il d'hyperboles équilatères passant par les points communs aux deux coniques $f=0$, $\varphi=0$; qu'arrive-t-il si les coniques sont, l'une et l'autre, des hyperboles équilatères? énoncer le théorème qui correspond à ce cas particulier remarquable.

— Surfaces qui correspondent à l'équation

$$x^2 + x^2 + z^2 + 2my(z+x) + 2zx = 1,$$

m étant un paramètre variable.

— Trouver le cône réciproque de

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 0.$$

— Calculer le paramètre de la parabole

$$(ax+by)^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

— Que représente l'équation $xy - z^2 = 0$?

— Construire $y = \sqrt{x} + \sqrt{x-3}$, les radicaux étant pris avec leur signe.

— Asymptotes de la courbe

$$(1-2\cos\omega)\rho^3 + 2\rho\sin\omega + 1 - 3\cos\omega = 0.$$

— Équation du second degré qui représente les tangentes menées à la parabole par un point donné.

— On donne la courbe $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{a'(x-d)(x-d')}$, a, b, c, a', d, d' sont des nombres réels et on suppose $d > d'$; cette courbe aura des asymptotes; disposition de la courbe par rapport à l'asymptote $x = d$.

— Quelle est la surface représentée par l'équation

$$xy + yz + xz + 1 = 0?$$

— Quelle est la surface représentée par l'équation

$$xy + xz - x^2 + 1 = 0?$$

— Théorie des asymptotes en coordonnées polaires.

— Construire la courbe représentée par l'équation

$$y^2 = \frac{x(x-1)(x-2)}{x-3}.$$

— Trouver l'équation du cylindre circonscrit à l'ellipsoïde. dont les génératrices sont parallèles à une direction donnée.

— Soient les deux équations homogènes

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0,$$
$$ax^3 + 3bx^2y + 3bxy^2 + dy^3 = 0,$$

représentant chacune un système de droites. Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que ces deux systèmes aient une droite commune.

— Ecrire l'équation générale des surfaces du second degré renfermant l'axe des z; démontrer que tout plan passant par l'axe des z est tangent à la surface.

— Que devient l'équation générale des surfaces du second degré quand on prend pour axe des x et des z deux génératrices du cône asymptote, et pour axe des y le diamètre conjugué du plan des xz?

— Lieu des points de rencontre des génératrices rectangulaires de l'hyperboloïde à une nappe.

— Lieu des centres des sections faites dans une surface du second ordre par des plans passant par un point donné.

— On donne l'hyperboloïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$; chercher l'équation des plans parallèles à l'axe des y qui coupent la surface suivant deux droites.

— On donne l'un des foyers d'une hyperbole et l'un des sommets du rectangle construit sur les axes; trouver l'équation de la courbe.

— On donne une tangente à une conique, son point de contact et les foyers; trouver l'équation de la courbe.

— Etant donné un cône ayant son sommet à l'origine. on demande la condition pour qu'on puisse placer sur ce cône un trièdre trirectangle.

— Lieu des sommets des angles droits dont les côtés sont normaux à l'ellipse.

— On a une conique et deux points; par ces deux points, on mène les tangentes. Trouver l'équation de la conique qui passe par les quatre points de contact et par un point donné.

— On donne dans une surface de second ordre trois génératrices et la direction d'un plan cyclique. Trouver l'équation de la surface.

— Étant donnée l'équation $\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = 2x$, trouver l'équation générale des plans qui coupent la surface suivant une seule droite.

— Lieu des foyers d'une ellipse dont on connaît un sommet situé sur le petit axe, et l'une des tangentes à l'extrémité d'un des diamètres conjugués égaux.

— On donne une ellipse; on mène la normale en un point M, et du centre on abaisse la perpendiculaire OP sur cette normale. Trouver le maximum et le minimum de OP, quand le point M décrit l'ellipse.

Algèbre.

Dérivée de $y = \text{arc sin} \sqrt{1 - \cos x}$.

— Arrangements de m lettres p à p; si l'on considère les arrangements de m lettres $(p - 1)$ à $(p - 1)$ et si, comme le veut la démonstration ordinaire, au lieu de placer les $m - p + 1$ lettres, successivement à la droite de l'arrangement A_m^{p-1} considéré, on le plaçait dans tous les intervalles, montrer que les arrangements ainsi formés se reproduiraient, et dire combien de fois chacun d'eux serait formé.

— Définition d'une fonction implicite. Dérivée d'une pareille fonction; que devient y' si, au point $x = a$, $y = b$, on a simultanément $f'_a(a, b) = 0$ $f'_b(a, b) = 0$? Pourquoi doit-on trouver y' par une équation du second degré?

— Définir le quotient de deux quantités imaginaires; démontrer qu'il y un système unique de solution.

— Chercher les racines de

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-2)^3}+\frac{1}{(x-3)^5}-1=0.$$

— Dérivée de $y=\text{arc tg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

— Dérivée de l'expression

$$y=\text{L}\,\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}+\text{arc tg}\,\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$$

— Dérivée de $y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x}}$

— Dérivée de $y=\text{arc tg}\,\frac{a+bx}{b-ax}$;

la dérivée est celle de arc tg x; pourrait-on le voir *à priori*?

— Quand une équation a toutes ses racines réelles, peut-on remplacer les fonctions de Sturm par d'autres plus simples?

— Abaisser le degré d'une équation, sachant qu'il existe une relation entre deux racines.

— Etant donnée l'équation $x^4-2x^3+ax-b=0$, on demande la relation à établir entre a et b pour que la différence des deux racines de cette équation soit égale à une quantité donnée.

Mathématiques élémentaires.

Les trois plans menés par les arêtes d'un trièdre perpendiculairement aux faces opposées se coupent suivant une même droite.

— Les plans qui passent par les arêtes d'un trièdre et les bissectrices des faces opposées se coupent suivant une même droite.

— On donne $\text{tg}\,\frac{x}{2}=z$; calculer x et $\cos x$.

— Définition de deux droites antiparallèles par rapport à un angle. Théorème fondamental.

— Chercher une expression de la somme

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots\ldots+\sin nx.$$

Etant donné un triangle sphérique dont les sommets sont situés sur un petit cercle et dont un des côtés passe par le pôle de ce petit cercle, on demande si l'angle opposé à ce côté est supérieur à un droit.

— Décomposer $(x^2+x+1)^2+1$ en un produit de deux facteurs réels du second degré.

— Entre quelles limites faut-il faire varier x pour que la fraction

$$\frac{4x^2-5x-1}{2x^2-5x+3}$$

soit plus grande que 1?

— Minimum de $\frac{x^4}{y^3}$, quand $x-y=\text{K}$.

— Si l'on retranche l'unité du carré d'un nombre premier, le reste est divisible par 24.

— Entre quelles limites faut-il faire varier x pour que l'inégalité.

$$\frac{3x^4 - 2x^2 + 22}{x^4 - 12x^2 + 35} > 2$$

soit satisfaite?

— Déterminer les côtés d'un triangle rectangle dont on connaît la surface et le rayon du centre inscrit.

Géométrie descriptive.

On donne un ellipsoïde de révolution à axe vertical, un point par ses projections, et on considère le cône ayant ce point pour sommet et circonscrit à l'ellipsoïde; trouver: 1° la trace horizontale de ce cône; 2° le genre de cette trace d'après la position du point; 3° déterminer les axes, et, dans le cas où cette section est du genre hyperbole, déterminer ses asymptotes.

— On donne un plan, par ses traces, et un point quelconque de l'espace, par ses projections; on suppose ce point lié invariablement au plan; on demande ce que devient le point lorsque l'on rabat le plan sur le plan horizontal.

— On donne deux droites dans le plan horizontal; ces droites sont les traces de deux plans; on donne en outre les angles de ces plans avec le plan horizontal; trouver l'angle des deux plans.

— On donne un triangle plan ABC; AB est une horizontale située à un décimètre du plan horizontal; on suppose que AB tourne autour de AC; quelle sera la surface engendrée? Section par un plan passant par BC, et faisant un angle de 45° avec le plan horizontal.

— On donne une droite (ab, $a'b'$) parallèle au plan vertical; $m'n'$ est la projection verticale d'une courbe, qui a pour projection horizontale ab; cette courbe, en tournant autour de AB, engendre une surface; trouver un point de l'intersection de cette surface avec un plan donné par ses traces.

— On donne un triangle ABC dans le plan horizontal. Les droites AB, AC sont les génératrices opposées d'un cône de révolution dont l'axe serait la bissectrice de l'angle CAB. On coupe le cône par un plan passant par CB et faisant un angle de 30° avec le plan horizontal; trouver un point de la section et la tangente en ce point.

— On donne une droite parallèle au plan vertical; en tournant autour de la ligne de terre, cette droite engendre un hyperboloïde. Connaissant la projection verticale d'un point de la surface, trouver sa projection horizontale. Plan tangent en ce point.

— On donne une droite par ses projections et un point de cette droite. Ce point est le sommet d'un cône de révolution dont l'axe est la droite donnée. Construire le contour apparent sur le plan horizontal.

— On donne une droite parallèle au plan vertical, et une droite quelconque. La droite de front, en tournant autour de l'autre droite, engendre un hyperboloïde. Trouver la normale en un point.

QUESTION 275

La somme de n *nombres positifs, entiers ou fractionnaires, multipliée par la somme de leurs inverses ne peut jamais être égale à* n^2, *excepté si les quantités sont égales.*

On sait que, par une identité due à Lagrange et facile à vérifier,

$$(a^2 + b^2 + c^2 + \dots)(A^2 + B^2 + C^2 + \dots) - (Aa + Bb + Cc + \dots)^2 = \Sigma(Ab - Ba)^2.$$

Le second membre ne peut être nul que si toutes ses parties positives sont séparément égales à zéro. Appliquant cette remarque à l'égalité proposée on aura,

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right) - n^2$$
$$= \Sigma\left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} - 2\right) = \Sigma\frac{(x_1 - x_2)^2}{x_1x_2}.$$

Les quantités $x_1x_2 \dots x_n$ étant supposées positives, on a donc $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n$.

NOTA. — Cette question a été résolue par MM. Gilly, étudiant à Montpellier; Dupuy, au lycée de Grenoble.

QUESTION 307

Solution par M. GILLY, élève à la Faculté de Montpellier.

---

a. *Former les dérivées successives de la fonction*

$$y = e^{\frac{a}{2}x^2}$$

Établir que la dérivée d'ordre n *est égale au produit de la fonction elle-même par un polynôme entier en* u, P_n, *du degré* n;

b. *Démontrer qu'entre les divers polynômes* P *existent les relations suivantes :*

$$P_n = P'_{n-1} + axP_{n-1} \qquad (\alpha)$$
$$P'_n = naP_{n-1} \qquad (\beta)$$
$$P_{n+1} = Pax_n + naP_{n-1} \qquad (\gamma)$$
$$P''_n + axP'_n - naP_n = 0. \qquad (\delta)$$

c. *Démontrer que si* a *est négatif, l'équation* P = o *a toutes ses racines réelles.*

d. *Former le polynôme* P *en se servant de la troisième relation.*

a. Donnons à x l'accroissement h, on a

$$e^{\frac{a}{2}(x+h)^2} = y + \frac{h}{1}y' + \frac{h^2}{1.2}y'' + \ldots + \frac{h^n}{1.2..n}y^n + \ldots$$

d'autre part

$$e^{\frac{a}{2}(x+h)^2} = e^{\frac{a}{2}x^2} \cdot e^{axh} \cdot e^{\frac{a}{2}h^2};$$

or

$$e^{ax} = 1 + \frac{ax}{1}h + \frac{(ax)^2}{1.2}h^2 + \ldots + \frac{(ax)^n}{1.2\ldots n}h^n + \ldots$$

$$e^{\frac{a}{2}h^2} = 1 + \frac{\frac{a}{2}}{1}h^2 + \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{1.2}h^4 + \ldots \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{1.2\ldots\frac{n}{2}}h^n + \ldots$$

faisant le produit des deux dernières égalités, on a pour le coefficient de h^n

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\left[(ax)^n + \frac{n(n-1)}{1}\left(\frac{a}{2}\right)(ax)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}\left(\frac{a}{2}\right)^2(ax)^{n-4} + \ldots\right]$$

donc identifiant cette expression avec le coefficient de h^n dans la première égalité

$$y^{(n)} = e^{\frac{a}{2}}\left[(ax)^n + \frac{n(n-1)}{1}\left(\frac{a}{2}\right)(ax)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}\left(\frac{a}{2}\right)^2(ax)^{n-4} + \ldots\right]$$

on a
$$y = e^{\frac{a}{2}x^2}$$

$$y = xe^{\frac{a}{2}x^2} \qquad (2)$$

$$y' = (a^2x^2 + a)e^{\frac{a}{2}x^2}$$

. . . .

. . . .

on est donc conduit à poser

$$y^{(n)} = P_n e^{\frac{a}{2}x^2}. \quad (3)$$

Pour justifier cette formule, supposons-la vraie pour n et démontrons-la exacte pour la valeur $n + 1$:

$$y^{n+1} = (axP_n + P'_n)e^{\frac{a}{2}x^2} \quad (4)$$

ou

$$y^{n+1} = P_{n+1}e^{\frac{a}{2}x^2}. \quad (5)$$

b. L'équation (2) s'écrit

$$y' = axy.$$

D'après le théorème de Leibnitz on sait que si u, v sont deux fonctions de x, la dérivée n^{me} du produit uv est égale à

$$uv^{(n)} + \frac{n}{1}u'v^{(n-1)} + \frac{n(x-1}{1.2}u''v^{(n-2)} + \dots + \frac{x}{1}u^{(n-1)}v' + u^n v$$

Appliquons cette formule à y', il vient

$$y^{(n+1)} = axy^n + \frac{n}{1}ay^{n-1}$$

qui s'écrit, d'après la formule symbolique (3),

$$P_{n+1} = axP_n + naP_{n-1} \text{ (formule } \gamma). \quad (6)$$

D'autre part, (4) et (5) donnent

$$P_{n+1} = axP_n + P'_n \quad . \quad (7)$$

ou

$$P_n = axP_{n-1} + P'_{n-1} \text{ (formule } \alpha).$$

Combinant (6) et (7), on en déduit

$$P'_n = naP_{n-1} \text{ (formule } \beta). \quad (8)$$

Prenons la dérivée de (8)

$$P''_n = naP'_{n-1} \quad (9)$$

or, d'après (8) $\quad P'_{n-1}, = (n-1)aP_{n-2}. \quad (10)$

Éliminons P'_{n-1} on a

$$P_n = n(n-1)a^2P_{n-2} \quad (11)$$

mais (6) donne

$$P_n = axP_{n-1} + (x-1)aP_{n-2}. \quad (12)$$

Entre (8), (11), (12), éliminons P_{n-1} et P_{n-2}, il vient

$$P''_n + axP'_n - naP_n = 0 \text{ (formule } \delta). \quad (13)$$

c. L'équation P_n a toutes ses racines réelles. En effet, y s'annule pour $x = +\infty$, $x = -\infty$, et est continue dans l'intervalle, donc y' s'annule pour une valeur α entre ces

limites. Donc y' s'annule pour $x = -\infty$, $x = \alpha$, $x = +\infty$, par suite P_1 s'annule pour $x = \alpha$.

y' étant continue dans chaque intervalle, y'' s'annulera pour $x = -\infty$, $x = \beta$, $x = \gamma$, $x = +\infty$, β et γ comprenant α. Donc P_2 s'annulera pour $x = \beta$ et $x = \gamma$.

En continuant ainsi de proche en proche on voit que P_n a ses n racines réelles.

On a
$$P_n = axP_{n-1} + naP_{n-2} \qquad (\alpha)$$
$$P_{n-1} = axP_{n-2} + (n-1)aP_{n-3}$$
$$P_{n-2} = axP_{n-3} + (n-2)aP_{n-4}$$
$$\vdots$$
$$P_3 = axP_2 + 3aP_1 .$$

Multipliant la première par ax, la seconde par $a^2x^2 + (n-1)a$ ... on obtient en ajoutant le tout

$$P_n = (ax)^n + \frac{n(n-1)}{1}\,\frac{a}{2}\,(ax)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 (ax)^{n-4} + \ldots$$

comme on l'avait trouvé directement.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Le Pont, du lycée Saint-Louis (classe de M. É. Lucas); Aubry, à Nancy; Vauthier, à Tarbes; Quiquet, à Lille.

QUESTION 311

Solution par M. P. Boulogne, élève au Lycée de Lille.

Par l'un des foyers d'une ellipse on mène deux cordes parallèles à deux diamètres conjugués et coupant la courbe en A, A' *d'une part, en* B, B' *d'autre part. Démontrer que* AA' + BB' *est constante.*

Soit m le coefficient angulaire de l'une des droites; son équation sera
$$y = m(x - c). \qquad (1)$$

Si x' et x'' sont les abscisses des points d'intersection de la droite avec l'ellipse, on aura

$$y' - y'' = m(x' - x'')$$

et par suite

$$AA' = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2} = (x' - x'')\sqrt{1 + m^2}$$

Éliminons y entre (1) et

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Nous aurons

$$x^2(b^2 + a^2m^2) - 2a^2m^2cx + a^2(m^2c^2 - b^2) = 0;$$

d'où
$$x' - x'' = \frac{2ab^2\sqrt{1 + m^2}}{b^2 + a^2m^2}.$$

dès lors
$$AA' = \frac{2ab^2(1 + m^2)}{b^2 + a^2m^2}$$

De même
$$BB' = \frac{2ab^2(1 + m'^2)}{b^2 + a^2m'^2} \qquad (2)$$

où m et m' sont liées par la relation $mm' = -\frac{b^2}{a^2}$.

On a donc

$$AA' + BB' = \frac{2ab^2(1 + m^2)}{b^2 + a^2m^2} + \frac{2ab^2(1 + m'^2)}{b^2 + a^2m'^2} = \frac{2(a^2 + b^2)}{a}$$

La longueur constante est dès lors égale à celle du grand axe, plus la longueur de la corde focale perpendiculaire à cet axe.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Quiquet, du lycée de Lille; Baron, Savary, du lycée Henri IV; Dupuy, à Grenoble.

QUESTIONS PROPOSÉES

Mathématiques élémentaires.

375. — Soit ABC un triangle; le couper par une transversale telle que, des six segments qui en résultent sur les trois côtés, trois, non contigus, soient égaux entre eux.

376. — L'arète d'un dièdre donné α est tangente à une sphère de rayon R. Quelle doit être, par rapport au plan diamétral de contact, la position de ce dièdre pour que la surface de sphère interceptée par le plan du dièdre soit maxima?

377. — Dans un trièdre SABC, la face BSC vaut 90 degrés et chacun des autres vaut 60 degrés. On porte sur SA une longueur arbitraire, et sur les autres arêtes des longueurs SB, SC, égales au plus grand segment de SA divisé en moyenne et extrême raison. Démontrer que le triangle ABC est rectangle.

378. — Trouver les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse a et la somme des carrés des bissectrices des angles aigus.

379. — Déterminer les trois côtés d'un triangle connaissant le périmètre $2p$, sachant que $bc = m^2$, et que les médianes correspondant aux côtés AB et AC sont à angle droit.

380. — On suppose que B n'est pas un carré parfait et on propose de mettre la quantité

$$z = \sqrt[4]{A + \sqrt{B}}$$

sous la forme d'une somme de deux radicaux carrés,

$$x = \sqrt{x} + \sqrt{q}.$$

Donner les conditions nécessaires pour que la transformation soit avantageuse, ce qui peut avoir lieu dans deux cas différents, savoir : 1° lorsque les quantités x et y sont de la forme $\alpha + \sqrt{\beta}$;
2° lorsque ces quantités sont des nombres rationnels. On appliquera la formule d'identité trouvée aux deux exemples numériques

$$z = \sqrt[4]{6 + \sqrt{20}}; \qquad z = \sqrt{7 + \sqrt{48}}$$

et l'on vérifiera les résultats numériques ainsi obtenus.

381. — Soient a, b, c, les trois arêtes du sommet d'un tétraèdre; on demande de mener un plan qui détache un tétraèdre dont le volume soit le $\frac{1}{8}$ du volume du tétraèdre donné et qui coupe SA, SB, SC aux points X, Y, Z, de telle sorte que l'on ait

$$\frac{SX}{AX} = \frac{BY}{SY} = \frac{CZ}{SZ}.$$

Mathématiques spéciales.

382. — Si les extrémités d'une droite de longueur constante glissent sur deux droites qui se coupent, un point de cette droite décrit une ellipse ; démontrer que l'aire de cette ellipse est indépendante de l'angle des deux droites.

(Steiner.)

383. — Si trois points d'une droite glissent sur trois plans qui se coupent, on sait, par le théorème de Dupin, qu'un quatrième point de cette droite décrit un ellipsoïde. Démontrer que le volume de cet ellipsoïde est indépendant de l'angle des plans. *(Ed. Lucas.)*

384. — Trouver la somme des produits trois à trois des termes de la progression arithmétique

$$\div\, a \,.\, a + r \,.\, a + 2r \,\ldots\, a + (n-1)r.$$

385. — Sommer les suites

$$C_n^1 + 2^3 C_n^2 + 3^3 C_n^3 + \ldots + (n-1)^3 C_n^{n-1} + n^3 C_n^n.$$

$$1 + C_3^2 C_n^1 + C_4^2 C_n^2 + \ldots + C_{n+1}^2 C_n^{n-1} + C_{n+2}^2 C_n^n.$$

$$2^n + C_n^1 C_{n-1}^1\, 2^{n-2} + C_n^2 C_{n-2}^2\, 2^{n-4}$$
$$+ \ldots + C_n^p C_{n-p}^p\, 2^{n-2p} + \ldots$$

C_n^p indiquant le nombre des combinaisons de n objets p à p.

386. — Trouver le nombre de manières dont on peut distribuer p objets distincts entre q personnes, de telle sorte que chacune d'elles ait un objet au moins.

387. — Lieu des foyers des paraboles qui rencontrent en deux points fixés A et B une droite donnée, et qui sont normales en A à cette droite. On propose de vérifier géométriquement le résultat trouvé.

388. — Les axes d'une ellipse sont dirigés suivant deux droites rectangulaires données Ox, Oy. Soit M le point de cette ellipse où le cercle osculateur a la même surface que l'ellipse ; soit μ le centre de ce cercle ; 1° la distance du centre de ce cercle osculateur au centre de l'ellipse est égale à la demi-différence des axes ; 2° si la somme des axes de l'ellipse reste constante, le lieu de M est l'enveloppe d'une droite de longueur constante qui glisse sur les deux

droites Ox, Oy, et le lieu de μ est la rosace à quatre branches, lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipse sur une droite de longueur constante qui glisse sur les bissectrices des angles des axes.

(E. Lemoine.)

CORRESPONDANCE

M. Burat-Dubois nous prie de rectifier une erreur qui s'est glissée dans sa note sur la détermination du maximum et du minimum de la fraction du second degré. A la huitième ligne de la page 11, il faut lire : *ce sera la même chose*, au lieu de : *ce sera le contraire*. En effet, si l'on a $ab' - ba' < o$, la valeur $z = -\sqrt{m}$ donne bien un minimum, tandis qu'elle donne un maximum si l'on a $ab' - ba' > o$. C'est à cette partie du calcul que se rapporte le mot: *contraire*. Mais dans le cas de $ab' - ba' < o$, on a : $\sqrt{m} = \frac{\sqrt{k}}{ba' - ab'}$, car, avant d'extraire la racine carrée de l'expression $\frac{k}{(ab' - ba')^2}$, il faut la remplacer par l'expression égale $\frac{k}{(ba' - ab')^2}$; on a donc dans le cas du minimum :

$$x = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} + z = -\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} - \frac{\sqrt{k}}{ba' - ab'} = \frac{-(ac' - ca') + \sqrt{k}}{ab' - ba'}$$

ce qui est la même chose que dans le cas où l'on a $ab' - ba' > o$.

Il en résulté que le tableau qui donne le résumé *(page 15 de la note)*, doit être, pour la première partie, modifié comme il suit :

$$k > o,\ ab' - ba' \lessgtr o \left\{ \begin{array}{l} \text{maximum pour } x = \dfrac{-(ac' - ca') - \sqrt{k}}{ab' - ba'} \\ \text{minimum pour } x = \dfrac{-(ac' - ca') + \sqrt{k}}{ab' - ba'} \end{array} \right.$$

Cette erreur se trouve également dans l'algèbre de M. Lauvernay, et il est facile d'en trouver la raison ; c'est que M. Lauvernay désigne par x' la plus petite racine, et par x'' la plus grande racine de l'équation

$$(ab' - ba')\,x^2 + 2\,(ac' - ca')\,x + bc' - cb' = o$$

et que, si $ab' - ba' < o$, la plus petite racine est celle qui contient le signe + devant le radical, et non pas l'autre; de sorte que le maximum a lieu pour la même valeur que dans le cas de $ab' - ba'$ positif.

Le Rédacteur-Gérant,

J. KŒHLER.

PARIS — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 19960-4.

MAXIMA ET MINIMA

DE LA FONCTION RATIONNELLE DU SECOND DEGRÉ

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

Par J. Bourget.

Dans mon *Traité d'Algèbre*, j'ai étudié cette question en m'appuyant sur l'involution et je suis arrivé à une règle simple, qui permet de dire *a priori* ce que l'on doit trouver, aussitôt que les deux termes de la fraction sont décomposés en facteurs du premier degré.

Dans la note que je soumets aux lecteurs du journal, j'établis quelques lemmes préliminaires qui me dispensent de la théorie de l'involution et me permettent d'arriver rapidement aux mêmes résultats.

Lemme I. — Posons

$$P = b^2 - 4ac \qquad R = b'^2 - 4a'c'$$
$$Q = bb' - 2ac - 2a'c'.$$

On vérifie facilement l'identité suivante :

$$(ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') \qquad (1)$$
$$= \frac{1}{4}(Q^2 - PR).$$

Lemme II. — Si $Q^2 - PR > 0$, P et R peuvent être positifs, nuls ou négatifs ; mais si $Q^2 - PR < 0$, P et R sont nécessairement positifs tous deux, ou négatifs tous deux en même temps.

Lemme III. — On a identiquement :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0$$

Le premier déterminant donne en le développant :

$$a(bc' - cb') + b(ca' - ac') + c(ab' - ba') = 0.$$

Le second donne

$$a'(bc' - cb') + b'(ca' - ac') + c'(ab' - ba') = o.$$

On déduit de là les deux identités :

$$\frac{c}{a} + \frac{b}{a}\,\frac{ca' - ac'}{ab' - ba'} + \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'} = o \qquad (2)$$

$$\frac{c'}{a'} + \frac{b'}{a'}\,\frac{ca' - ac'}{ab' - ba'} + \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'} = o \qquad (3)$$

en supposant a, a', $ab' - ba'$ différents de zéro.

Lemme IV. — Soient les deux équations du second degré :

$$ax^2 + bx + c = o \qquad (4)$$

$$a'x^2 + b'x + c' = o ; \qquad (5)$$

admettons que ces équations n'aient pas de racine commune (voir notre *Algèbre*, p. 327), alors le déterminant $(ab' - ba')$ est différent de zéro.

De plus :

$$(ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') = 1/4\,(Q^2 - PR)$$

est différent de zéro, donc $Q^2 - PR$ est différent de zéro.

Lemme V. — Les relations (2) et (3) donnent, en nommant α, α' les racines de l'équation (4) et β, β' les racines de l'équation (5) :

$$\alpha\alpha' - (\alpha + \alpha')\,\frac{ca' - ac'}{ab' - ba'} + \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'} = o$$

$$\beta\beta' - (\beta + \beta')\,\frac{ca' - ac'}{ab' - ba'} + \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'} = o$$

ou bien

$$\left(\alpha - \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}\right)\left(\alpha' - \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}\right) = \left(\frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}\right)^2 - \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}$$

$$\left(\beta - \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}\right)\left(\beta' - \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}\right) = \left(\frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}\right)^2 - \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}$$

ou bien

$$\left(\alpha - \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}\right)\left(\alpha' - \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}\right) = \frac{Q^2 - PR}{4\,(ab' - ba')^2} \qquad (6)$$

$$\left(\beta - \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}\right)\left(\beta' - \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}\right) = \frac{Q^2 - PR}{4(ab' - ba')^2}. \quad (7)$$

Prenons le cas particulier où α, α', β, β' sont réels ; c'est-à-dire le cas où $P > o \qquad R > o$
et convenons de porter sur une droite à partir d'un point O fixe, les racines α, α', β, β', dans un sens ou dans l'autre suivant leurs signes. Soit I le point correspondant au nombre $\frac{ca' - ac'}{ab' - ab'}$; soient A, A' les points correspondants aux racines α, α', et B, B' les points correspondants aux racines β, β', les parenthèses des premiers membres de (6) et (7) représenteront, en valeurs absolues, les longueurs IA, IA', IB, IB'.

1° Si $Q^2 - PR > o$, les parenthèses auront le même signe, donc A et A' seront du même côté du point I ; il en sera de même de B et B'. D'ailleurs, comme le produit IA . IA' est égal au produit IB . IB', si IB est supérieur à IA, IB' sera inférieur à IA'; donc dans ce cas :

Ou bien les points B et B' sont dans l'intervalle des points A et A';

Ou bien les points A, A' sont dans l'intervalle BB';

Ou bien les deux points A, A' sont d'un côté du point T et les deux points B, B' de l'autre côté.

2° Si $Q^2 - PR < o$, P et R sont nécessairement de même signe, donc les racines des équations (4) et (5) sont toutes réelles, ou toutes imaginaires. Admettons qu'elles soient réelles. Les parenthèses des relations (6) et (7) auront des signes contraires, donc le point I sera dans l'intervalle AA' et aussi dans l'intervalle BB'.

Comme le produit IA . IA' est égal au produit IB . IB', si B est plus voisin de I que le point A, le point B' sera plus éloigné de I que le point A'; donc les deux segments AA', BB' empiéteront l'un sur l'autre.

Ces préliminaires posés, il est facile de résoudre le problème suivant :

Problème. — *Trouver les maxima et les minima de la fonction rationnelle du second degré*

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}. \qquad (8)$$

Nous supposons que les six coefficients sont réels et que les deux équations

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a'x^2 + b'x + c' = 0$$

n'ont pas de racines communes, que par conséquent

$$(ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb')$$

ou

$$Q^2 - PR$$

sont différents du zéro, et qu'en même temps le déterminant

$$ab' - ba'$$

est différent de zéro.

Les deux coefficients a et a' ne sont pas nuls à la fois, sans quoi la fraction serait le rapport de deux binômes du premier degré et le problème changerait. L'un des coefficients a ou a' peut être nul, nous examinerons à part ce cas particulier; nous supposerons d'abord qu'ils ne sont nuls ni l'un ni l'autre.

Résolvons l'équation (8) par rapport à x, nous aurons

$$x = \frac{-(b'y - b) \pm \sqrt{Ry^2 - 2Qy + P}}{2(a'y - a)}. \qquad (9)$$

Distinguons maintenant plusieurs cas:

Premier cas : $R \gtrless 0, \quad Q^2 - PR > 0.$

Le trinôme placé sous le radical de (9) a ses racines réelles et inégales, on peut donc le mettre sous la forme

$$R(y - y')(y - y'') \ldots y' < y''.$$

Pour que x soit réel, R étant positif, il faut que y soit en dehors de l'intervalle des racines y' et y'', donc y' est un maximum d'une série de valeurs possibles et y'' un minimum d'une autre série de valeurs. — Si $R < 0$, il faut pour la réalité de x que y soit compris dans l'intervalle des deux racines, donc y' est un minimum d'une série de valeurs, y'' est un maximum de cette même série. — Dans tous les cas, il y a un maximum et un minimum.

Deuxième cas : $R > 0, \quad Q^2 - PR < 0.$

Dans ce cas, les racines du trinôme en y étant imaginaires et le premier terme étant positif, le trinôme est positif quel

que soit x, y n'est assujetti à aucune condition pour la réalité de x, il n'y a ni maximum ni minimum de y.

C'est le cas où les racines des deux termes sont réelles, car R et P sont nécessairement de même signe, et où les segments AA', BB', déterminés par ces racines sur un axe, empiètent l'un sur l'autre (*).

Remarque. — On ne peut pas supposer à la fois

$$R < 0, \quad Q^2 - PR < 0.$$

En effet, on peut mettre le trinôme en y sous la forme

$$(b'y - b)^2 - 4(a'y - a)(c'y - c).$$

Faisons successivement dans ce trinôme :

$$y = -\infty, \frac{a}{a'}, \frac{c}{c'}, +\infty;$$

ce trinôme, à cause de son premier terme $Ry^2 < 0$, prendra successivement les signes

$$- \quad + \quad + \quad -$$

donc il a nécessairement deux racines réelles, qui comprennent les nombres $\frac{a}{a'}$, $\frac{c}{c'}$, donc $Q^2 - PR$ est nécessairement positif. (Cette remarque est due à M. Pichenot.)

Troisième cas: $R = 0$.

Le trinôme sous le radical devient

$$-2Qy + P = -2Q\left(y - \frac{P}{2Q}\right).$$

On ne peut pas supposer que Q est nul, car on aurait dans cette hypothèse $Q^2 - PR = 0$, ce qui ne peut pas être. Donc suivant le signe de Q, y aura pour maximum ou pour minimum $\frac{P}{2Q}$.

Remarque. — Les maxima ou les minima que nous déterminons ainsi soit des maxima ou des minima *absolus;* ils correspondent sont à des valeurs finies de x, soit à des valeurs infinies. Mais nous avons fait voir ailleurs dans le

---

(*) Nous rappellerons à nos lecteurs que, dans une note publiée dans le Journal (tome II, p. 19) nous sommes arrivé, par de simples considérations géométriques, à une conclusion identique à celle de M. Bourget (A. M).

journal, que pour cette fonction y continue et uniforme, les maxima ou les minima absolus sont aussi des maxima et des minima *relatifs*, à la condition que l'on considère $x = \pm \infty$ comme répondant au même point de l'axe des x. La méthode *indirecte* que nous avons employée ne conduit donc pas à des résultats contradictoires avec ceux que donnerait la méthode *directe*, fondée sur la définition classique des maxima et des minima.

Cette méthode indirecte permet de prévoir immédiatement ce que l'on trouvera à la vue seule des deux termes de la fraction décomposés en facteurs du 1er degré, et l'on peut énoncer le théorème suivant, que nous avons démontré dans notre *Algèbre*, en nous appuyant sur l'involution.

Théorème. — *1° La fonction* $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$, *quand* x *varie de* $-\infty$ *à* $+\infty$, *n'a ni maximum ni minimum, si les racines du numérateur et du dénominateur sont réelles et si les segments* AA', BB' *qu'elles déterminent sur un axe, empiètent l'un sur l'autre.*

2° Dans le cas où le dénominateur de la fonction a ses racines égales, la fonction a un maximum ou un minimum.

3° Dans tous les autres cas, elle a un maximum et un minimum.

Cas particuliers. — Les cas particuliers où a ou bien a' seraient nuls, peuvent être regardés comme rentrant dans le cas général, en disant que dans cette hypothèse le trinôme correspondant a une racine réelle infinie.

Remarque. — Nous ne parlons pas des valeurs infinies de y, qui peuvent être considérées comme des maxima ou des minima de y, si le dénominateur de la fraction a ses racines égales, comme l'a remarqué M. Burat-Dubois.

Nous engageons le lecteur à consulter sur le même sujet les articles suivants parus dans le *Journal de Mathématiques* :

Note d'algèbre (Remarque sur la fraction du second degré), par M. Pichenot, t. II, p. 135; — *Note d'algèbre* (Étude des variations de la fraction du second degré), par M. Fajon. t. II, p. 358.

QUESTIONS D'EXAMEN

n *étant un nombre impair, le produit*

$$n(n^2 + 2)(n^2 + 7)$$

est divisible par 24.

Il suffit de démontrer que ce produit est divisible par 3 et par 8. Or, déjà, si n n'est pas divisible par 3, n^2 est un multiple de 3, augmenté de 1 ; donc $n^2 + 2$ est divisible par 3.

De plus le carré d'un nombre impair est toujours un multiple de 8, augmenté de 1 ; donc $n^2 + 7$ est un multiple de 8.

La proposition est donc démontrée.

Étant donnés un point et une circonférence, mener par le point une sécante telle que la partie extérieure soit à la partie intérieure dans un rapport donné $\frac{m}{n}$.

(Le lecteur est prié de faire la figure.)

Je suppose le problème résolu; soit A le point donné, AB la partie extérieure, BC la partie intérieure de la sécante. Je mène le diamètre APQ passant par le point A ; puis je joins le point C au point Q, et par le point B, je mène BQ' parallèle à CQ jusqu'à la rencontre avec le diamètre; j'ai

$$\frac{AQ'}{AQ} = \frac{AB}{AC} = \frac{m}{m+n}.$$

Donc le point Q' est connu ; je verrais de même que si je mène la droite CP et sa parallèle BP', le point P' où celle-ci rencontre le diamètre est déterminé, de plus l'angle P'BQ' est droit, donc le point B est sur une circonférence ayant P'Q' comme diamètre ; il est facile de trouver le centre et le rayon de cette circonférence ; le centre se trouve au point O' sur la ligne AO, tel que l'on ait

$$\frac{AO'}{AO} = \frac{m}{m+n}.$$

On en déduit facilement

$$\frac{OO'}{AO} = \frac{n}{m+n}.$$

D'autre part, le rayon R' de cette circonférence sera donné par la proportion

$$\frac{R'}{R} = \frac{m}{m+n}.$$

Nous pouvons d'après cela chercher comment, pour chaque valeur du rapport $\frac{m}{n}$, doit être placé le point A pour que le problème soit possible, étant donnée une circonférence particulière. En effet, la dernière proportion nous donne

$$\frac{R - R'}{R} = \frac{n}{m+n}$$

$$\frac{R + R'}{R} = \frac{2m+n}{m+n}.$$

Or, on doit avoir

$$R - R' < OO' < R + R'$$

ou

$$R\frac{n}{m+n} < AO.\frac{n}{m+n} < R.\frac{2m+n}{m+n}.$$

La première inégalité est toujours vérifiée si le point A est extérieur à la circonférence ; il reste donc

$$\frac{AO}{R} < \frac{2m+n}{n};$$

telle est la relation à laquelle doit satisfaire AO pour que le problème soit possible.

En supposant que les deux équations du second degré

$$x^2 + px + q = 0$$
$$x^2 + p'x + q' = 0$$

ont une racine commune, on demande de former l'équation du second degré qui admet pour racines les racines non communes des deux équations données.

Appelons x_1 et x_2 les racines de la première équation ;
x_1 et x_3 les racines de la seconde.

Nous avons $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 x_2 = q$
$x_1 + x_3 = -p'$ $x_1 x_3 = q'$.

Nous en tirons facilement

$$x_1 = \frac{q - q'}{p' - p};$$

et par suite
$$x_2 = \frac{q(p' - p)}{q - q'}$$

$$x_3 = \frac{q'(p' - p)}{q - q'}.$$

Donc
$$x_2 + x_3 = \frac{(q + q')(p' - p)}{q - q'};$$

$$x_2 x_3 = \frac{qq'(p' - p)^2}{(q - q')^2}.$$

Par suite, l'équation cherchée est

$$(q - q')^2 X^2 + (q^2 - q'^2)(p - p') X + qq'(p - p')^2 = 0.$$

Résoudre un triangle, connaissant un angle A, *la bissectrice* α *et la hauteur* h *partant du sommet de l'angle.*

Il est facile de voir que l'angle de la bissectrice et de la hauteur est égal à la demi-différence des angles à la base. En effet l'angle que fait la hauteur avec le plus grand côté c est égal à $\frac{A}{2} + p$, en appelant p l'angle de la bissectrice et de la hauteur ; par suite on a

$$\frac{\pi}{2} - B = \frac{A}{2} + p;$$

donc $2p = \pi - 2B - A = C - B$;

d'autre part on a $\sin p = \frac{h}{\alpha}$;

il sera donc facile de déterminer l'angle aigu p, et par suite on aura les angles B et C; on est donc ramené à résoudre un triangle dont on connaît les angles et la hauteur, problème que l'on sait résoudre.

Résoudre un triangle, connaissant un angle A, *la bissectrice* α *et la médiane* m *issue du même sommet.*

On a d'abord $2(b^2 + c^2) = 4m^2 + a^2$,

ou, puisque $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,

on en tire $b^2 + c^2 = 4\,m^2 - 2bc \cos A$;

puis $a^2 = 4\,m^2 - 4bc \cos A$;

enfin, entre la bissectrice et les côtés, on a la relation

$$bc = l^2 + \frac{a^2\, bc}{(b+c)^2},$$

ce qui peut s'écrire

$$bc = l^2 + \frac{2bc\,(m^2 - bc \cos A)}{2m^2 + bc\,(1 - \cos A)}.$$

On en déduit bc par l'équation suivante du second degré :

$$b^2c^2 \cos^2 \frac{A}{2} - bcl^2 \sin^2 \frac{A}{2} - 2m^2l^2 = 0.$$

Cette équation a ses racines réelles ; on ne doit prendre que la racine positive, et même pour qu'elle soit acceptable. il faut que l'on ait $b^2 + c^2 - 2bc > 0$;

or, on a $b^2 + c^2 - 2bc = 4m^2 - 4bc \cos^2 \frac{A}{2}$.

En remplaçant bc par la racine positive de l'équation obtenue plus haut, on trouve comme condition

$$2m^2 - l^2 \sin^2 \frac{A}{2} - \sqrt{l^4 \sin^4 \frac{A}{2} + 4m^2\, l^2 \cos^2 \frac{A}{2}} > 0$$

qui, après réduction, donne

$$m > l.$$

Cette condition étant remplie, il est facile de voir que les valeurs que l'on en tire pour a, b, c, sont les côtés d'un triangle ; il suffit que l'on ait

$$(b - c)^2 < a^2 < (b + c)^2.$$

Or on a

$$(b - c)^2 = 4m^2 - 2bc(1 + \cos A) = 4m^2 - 4bc \cos^2 \frac{A}{2}$$

$$(b + c)^2 = 4m^2 + 2bc(1 - \cos A) = 4m^2 + 4bc \sin^2 \frac{A}{2}$$

et $a^2 = 4m^2 - 4bc \cos A = 4m^2 + 4bc \sin^2 \frac{A}{2} - 4\,bc \cos^2 \frac{A}{2}$.

On voit alors immédiatement que la double inégalité précédente est vérifiée.

QUESTION 267

Solution par M. CHRÉTIEN, élève au Lycée du Havre.

On donne dans un plan deux circonférences qui se coupent en A, et un point B. On demande de décrire, de B comme centre, une circonférence telle que deux des points C et D où elle coupe les deux premières, soient en ligne droite avec le point A.

En outre, on suppose que le point B parcourt la plus grande des deux circonférences; par chacune de ses positions, on mène une parallèle à la direction correspondante ACD. Démontrer que cette parallèle est constamment tangente à une ellipse fixe, que l'on propose de déterminer.

PREMIÈRE PARTIE. — Soient C et D les deux points où la circonférence cherchée coupe les deux circonférences données O et O'; I étant le milieu de CD joignons les points O et O' aux points A et I, et abaissons les perpendiculaires OE, OF sur CD. Nous avons

$$OI^2 = OA^2 + IA^2 - 2IA.AE$$

$$O'I^2 = O'A^2 + IA^2 + 2IA.AF:$$

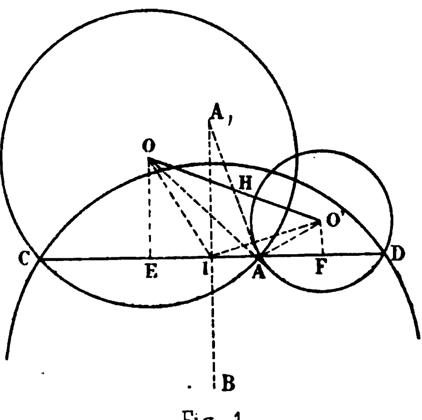


Fig. 1.

Donc, en ajoutant, et remarquant, d'après les positions des points I, A, E, F sur la droite CD, que l'on a

$$AE = IF = IA + AF,$$

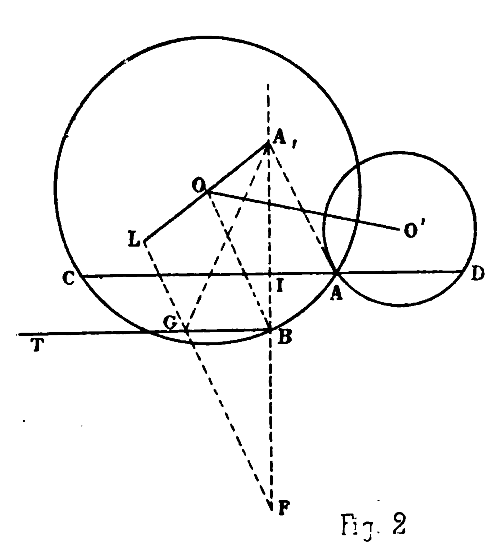
il vient

$$OI^2 + O'I^2 = OA^2 + O'A^2.$$

Donc le lieu du point I est une circonférence ayant pour centre le milieu H de OO', et passant par le point A. Si nous prenons l'extrémité A_1 du diamètre AH, il est facile de voir

que la ligne BIA_1 est une ligne droite, d'où nous tirons la construction suivante : Nous joignons le point B au symétrique A_1 de A par rapport au milieu OH de OO', et du point A nous menons une perpendiculaire sur BA_1 ; cette perpendiculaire rencontre les circonférences aux points C et D qui appartiennent à la circonférence cherchée.

Deuxième partie. — B étant sur la plus grande circonférence, menons à CAD par le point B, la parallèle BT; soit F le symétrique de A_1 par rapport à BT; menons par ce point F la parallèle à OB: elle rencontre BT en G, et A_1O en L; ce dernier point est fixe, puisque $A_1O = OL$; on voit facilement que $A_1G + LG = LF = 2OB$, et que les angles A_1GB, LGT sont égaux; donc le point G décrit une ellipse ayant pour foyers A_1 et L, pour grand axe le diamètre de la grande circonférence qui passe par les points précédents, et de plus cette ellipse est tangente à BT. C.Q.F.D.



QUESTION 304

Solution par M. Henri Bourget, du Collège d'Aix.

On donne deux cercles O *et* O', *et on mène une sécante* SAA' *par un des centres de similitude. Par les points antihomologues* A *et* A', *on mène les rayons* OA *et* O'A' *qui se coupent en* I, *de*

même les tangentes respectives AH, A'H *qui se coupent en* H. *On joint* SH *et* S'I, *S' étant le second centre de similitude. On demande le lieu du point de rencontre des droites* SH *et* S'I. *Si l'on prend pour centre d'inversion le point* S *et pour module d'inversion un module tel que chaque circonférence se change dans l'autre, on demande quelle est la figure inverse de l'axe radical des deux cercles.* (Desmons.)

1° Commençons par faire la remarque suivante : si l'on a (*fig. 1*) un cercle O dans lequel on inscrit un quadrilatère dont les diagonales sont l'une le diamètre HI, l'autre la corde AA' perpendiculaire à ce diamètre, et si l'on prend sur AA' ou sur son prolongement un point S que l'on joint aux points I et H, on voit que les droites MI, NH, LS sont les trois hauteurs du triangle IHS; et que le point D est le conjugué harmonique de S par rapport à A et A', puisqu'il appartient à la polaire du point S.

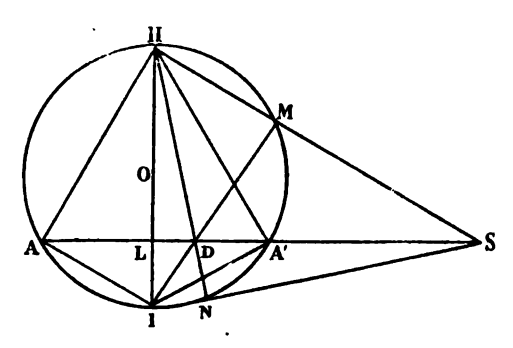


Fig 1

Cela posé, considérons le problème proposé (*fig. 2*).

Parmi les sécantes qu'on peut mener du point S, menons la ligne SO. Dans ce cas on voit aisément que le point S est le point de rencontre de SH et de IS'; le point S est donc un point du lieu. Il en est de même du point S'.

Nous allons démontrer que pour un point quelconque M du lieu, l'angle SMS' est droit, le lieu sera donc une circonférence décrite sur SS' comme diamètre.

Pour cela, rappelons-nous d'abord que les tangentes en des points antihomologues se coupent sur l'axe radical HR des deux cercles O et O', et que par suite le quadrilatère inscriptible AIA'H a ses côtés égaux deux à deux, et que le faisceau (I, OS'O'S) est harmonique :

Par suite, le point D est conjugué harmonique de S par rapport à AA'; donc en considérant le quadrilatère inscriptible AIA'H, nous voyons d'après notre remarque première que l'angle en M est droit, ce qu'il fallait démontrer.

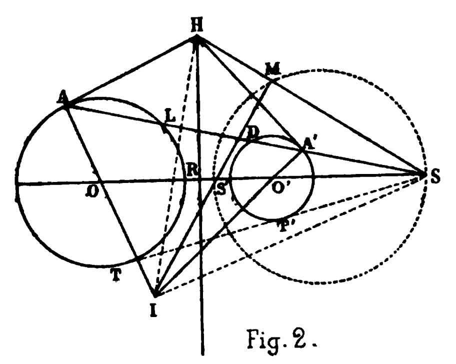


Fig. 2.

2° Dans la transformation proposée. STT' se transforme en elle-même, et les points T et T' l'un dans l'autre. Le module d'inversion doit donc être $\sqrt{ST \,.\, ST'}$, la moyenne géométrique des puissances du point S par rapport aux cercles O, O'.

Dans la figure transformée, l'axe radical rencontrant la ligne du centre en R se transformera en une circonférence décrite sur SR' comme diamètre, SR' étant déterminé par la relation
$$SR \,.\, SR' = ST \,.\, ST'.$$
Ce cercle sera donc facile à construire.

QUESTION 338

Solution par M. Rivard, élève au Lycée du Mans.

Soient ABC *un triangle;* AD, BE, CF, *les hauteurs abaissées respectivement sur les côtés* BC, CA, AB; O *le point d'intersection de ces hauteurs. Sur* AB, *on prend un point* G *tel que* GC = CA: *sur* AC *un point* H *tel que* BH = BA; *on mène* DK *parallèle à* ED, GK *parallèle à* FD; CG *et* DF *se coupent en* m; BH *et* DE *se coupent en* n. *Cela posé, on demande de démontrer:*

1° *Que les six points* B, G, O, H, C, K, *sont sur une même circonférence;*

2° *Que les cinq points* O, M, D, C, E, *sont sur une même circonférence; il en est de même des cinq points* O, n, D, B, F;

3° *Que* Om *est perpendiculaire sur* CG, *et* On *sur* BH;

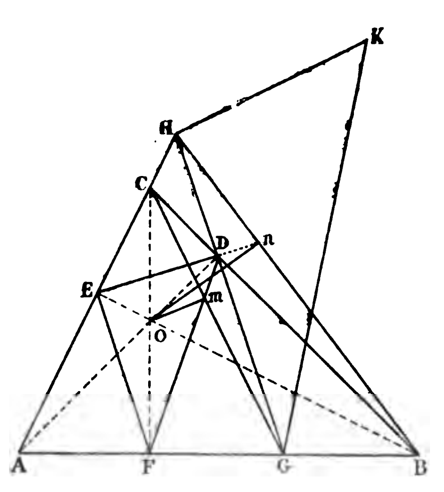
4° *Que* O *est le centre du cercle inscrit dans* DEF, *triangle qui est le quart du triangle semblable* KGH, *et aussi le centre du cercle circonscrit à* AGH;

5° *Que les quatre points* E, O, n, H, *sont sur une même circonférence, ainsi que les quatre points* F, O, m, G.

1° L'angle CGB est supplémentaire de l'angle CGA, qui, par construction, est égal à l'angle BCA: l'angle COB est égal à l'angle EOF; or dans le quadrilatère inscriptible EOFA, on a

EOF + EAF = 2dr;

donc le quadrilatère BGOC est inscriptible. L'angle AHB étant, par construction, égal à l'angle CAB, est supplémentaire de COB, et la circonférence BGOC passe par le point H. Enfin, l'angle HKG est par construction égal à EDF. Or, le quadrilatère inscriptible donne ADF = ACF, et puisque AD et CF sont les bissectrices de EDF et de ACG, les angles HKG et HCG sont supplémentaires, et le point K se trouve sur la circonférence BGOCH.



2° On a déjà vu que ADF = FCG. Par suite les quatre points, O, *m*, D,C sont sur une même circonférence; mais on sait que la circonférence qui passe pas les points O, D, C passe par le point E. On démontrerait de même que les cinq points O, *n*, D, B, F sont sur une même circonférence.

3° Dans la circonférence O*m*DCE, on a C*m*O = CDO = 1dr. On voit de même que O*n*B = 1dr.

4° On sait que les hauteurs du triangle ABC sont les bissectrices des angles du triangle DEF; le point O est donc

le centre du cercle inscrit dans ce triangle. Les points E, F, étant les milieux des côtés AG et AH du triangle AGH, les triangles EDF, HGK, qui ont les côtés respectivement parallèles, sont semblables, et le rapport des surfaces est $\frac{1}{4}$. De plus, le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle AGH.

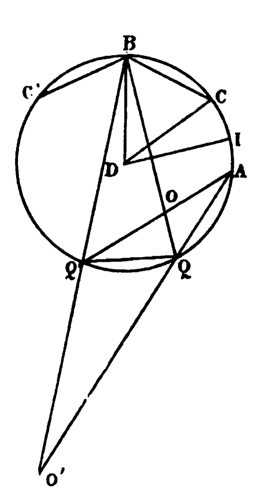
5° Dans le quadrilatère E$O$$n$H, les angles opposés HEO, HnO sont droits ; le quadrilatère est donc inscriptible. Il en est de même du quadrilatère FOmG.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Vitte, Lapareillé, Baron, au lycée Henri IV; Fiévet, à Lille; Baudouin, à Beauvais; H. Bourget, à Aix; William Hoover, à Dayton (États-Unis d'Amérique); Montérou, au lycée Louis-le-Grand; Giroud, à Grenoble; Leclair, à Passy; Provost, au Mans; Perrier, à Lons-le-Saulnier; Gino-Loria, à Mantoue; Lévy et Tinel, à Rouen; Joly, à Tarbes.

QUESTION 339

Solution par M. Joly, élève du Lycée de Tarbes.

Dans un cercle, on mène à partir d'un point B *sur la circonférence, deux cordes fixes et égales* BC, BC′, *puis on prend un point* A *fixe sur la circonférence; une corde* PQ *se meut en restant toujours égale à* BC. *On joint le point* B *au point* P *et le point* A *au point* Q ; *ces deux lignes se coupent en* O ; *de même les lignes* AP et BQ *se coupent en* O′. *Trouver le lieu géométrique du point* O *et le lieu géométrique de* O′.



Soit I le milieu de l'arc CA, et D le centre du cercle.

L'angle BOA a pour mesure arc BC + arc $\frac{CA}{2}$ il est donc constant, et le lieu du point O est un segment décrit sur AB comme corde, et capable de l'angle BDI.

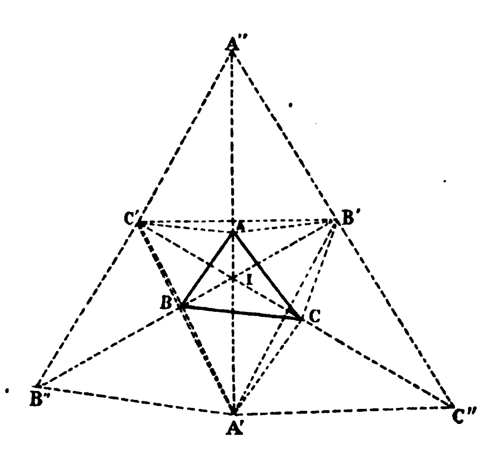
On verrait de même que le lieu du point O′ est un segment décrit sur AB comme corde, et capable de l'angle CDI.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. H. Bourget, à Aix; Baudouin, à Beauvais; Vitte, Baron, au lycée Henri IV; La Chesnais, au lycée Saint-Louis; Provost, au lycée du Mans; Barthe, à Tarbes; Bertin, à Vesoul; Henry, à Bréchaincourt.

QUESTION 340

Solution par M. TINEL, élève au Lycée Corneille à Rouen.

Connaissant les sommets des trois triangles équilatéraux construits sur les côtés d'un triangle, déterminer géométriquement ce triangle.



Supposons le problème résolu, et soit ABC le triangle cherché; soient A′, B′, C′ les sommets des triangles équilatéraux donnés. On sait (DESBOVES, *Questions de géométrie*, p. 156) que ces droites sont égales, se coupent en un point I, et que l'on a

$$AIC = CIB = BIA = 120^\circ.$$

Le quadrilatère A′BIC étant inscriptible, et le triangle A′BC étant équilatéral, on sait aussi (DESBOVES, *loc. cit.* p. 154) que l'on a $IA' = IB + IC$.

On a de même $IB' = IC + IA,$

$$IC' = IA + IB.$$

Construisons sur A′B′, A′C′, B′C′ extérieurement au triangle A′B′C′ des triangles équilatéraux dont les sommets res-

pectifs soient C″, B″, A″. Il est facile de voir que les droites A′A″, B′B″, C′C″, passent par le point I, et aussi respectivement par les points A, B, C; de plus, on a, pour la même raison que précédemment,

$$A''I = IB' + IC' = IC + IB + 2AI\ ,$$

On en tire facilement, puisque

$$A''I = AA'' + AI$$

et que $$IC + IB = IA',$$

la relation $$AA'' = IA' + AI = AA'.$$

Donc le point A est le milieu de A′A″. On déduit de là la construction simple suivante :

Sur les côtés du triangle A′B′C′, *on construit extérieurement des triangles équilatéraux; on joint le sommet libre de chacun de ces triangles équilatéraux au sommet opposé du triangle* A′B′C′. *Les milieux des trois lignes ainsi menées sont les sommets du triangle* ABC *cherché.*

Nota. La même question a été résolue par MM. Bonieux, à Riom; H. Bourget, à Aix.

M. William Hoower, à Dayton (États-Unis d'Amérique), a envoyé une solution par le calcul, dans laquelle il détermine la valeur des côtés du triangle cherché, en fonction des côtés du triangle formé par les trois points donnés.

QUESTION 341

Solution par M. Baudouin, élève au Collège de Beauvais.

Calculer la base et le côté d'un triangle isoscèle, connaissant la médiane et la hauteur issues d'un des sommets de la base.

J'appelle x l'un des côtés égaux, y la base, h la hauteur et m la médiane données; j'ai les relations suivantes :

$$x^2 + y^2 = 2m^2 + \frac{x^2}{2},\ \text{et}\ hx = y\sqrt{x^2 - \frac{y^2}{4}},$$

ou $$x^2 + 2y^2 = 4m^2;\ 2hx = y\sqrt{4x^2 - y^2}.$$

Si nous élevons la seconde au carré, et que nous remplacions x^2 par sa valeur $4m^2 - 2y^2$, nous arrivons à l'équation bicarrée

$$9y^4 - 8y^2(h^2 + 2m^2) + 16h^2m^2 = 0,$$

qui permet de trouver y, et par suite x.

La condition de réalité des racines se réduit, puisque h et m sont positifs, à la condition suivante :

$$h^2 + 2m^2 > 3mh,$$

ce qui peut s'écrire

$$(m - h)^2 + m(m - h) > 0,$$

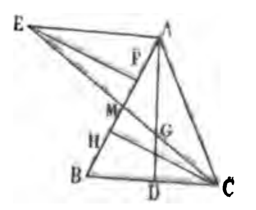
ou

$$(m - h)(2m - h) > 0;$$

cette dernière se réduit à $m > h$, condition évidente, d'après les données.

Solution géométrique par M. Joly, du Lycée de Tarbes.

Supposons le problème résolu ; menons AE parallèle à BC, jusqu'à sa rencontre avec CM prolongée ; abaissons EF perpendiculaire sur AB ; soit G le centre de gravité de ABC. On a évidemment EF = CH. Donc AB est une tangente commune intérieure aux deux circonférences égales ayant pour centres E et C, et pour rayon h, la distance des centres étant $2m$. La direction AB est donc connue ; ensuite, nous aurons le point A par l'intersection de la droite précédente et de la circonférence décrite sur $EG = \frac{4}{3}m$ comme diamètre. Il est facile d'achever le triangle.



Nota. — Ont résolu la même question : MM. H. Bourget, à Aix ; Hellot, Tinel, à Rouen ; Flévet, à Lille ; Henry, à Bréchaincourt ; Dupuy, à Grenoble ; Baron, au lycée Henri IV ; La Chesnais, au lycée Saint-Louis ; Barthe, à Tarbes ; W. Hoover, à Dayton (États-Unis) ; Perrier, à Lons-le-Saulnier ; Bertin, à Vesoul ; Leclair à Passy.

EXAMENS ORAUX DE SAINT-CYR, 1881

Étudier les variations de l'expression

$$\frac{2x - 3}{x^2 + 4},$$

notamment pour certaines valeurs de x telles que $x = \frac{3}{2}$, $x > \frac{3}{2}$, etc.

— Variations de la fonction $\frac{x^2 + 4}{x^2 - 1}$.

— Variations de la fraction $\frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$; cette fraction a-t-elle un maximum et un minimum?

— Étant donné $\frac{\sin x}{\sin (a - x)} = m$, trouver $\operatorname{tg} x$.

— Résoudre $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x = \sin x$.

— Que devient l'expression $\frac{\sin a - \sin b}{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}$, quand a tend vers b?

— Rendre calculable par logarithmes

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x.$$

— Simplifier

$$\cos a \cos (b - c) + \cos b \cos (c - a) + \cos c \cos (a - b).$$

— Connaissant la directrice et deux tangentes d'une parabole, trouver le foyer.

— Même problème en remplaçant les deux tangentes par deux points de la courbe.

— On donne une droite AB et un point P. Lieu des projections du point P sur tous les plans qui passent par AB.

— On joint un point A à un point B quelconque d'une droite xy. On construit un carré ABCD sur AB, et on demande le lieu des points C et D quand le point B se déplace sur xy.

— Sur le diamètre AB d'un cercle O on prend un point C, à droite de O, et l'on demande le lieu des points M, également distants de C et de la circonférence.

— On donne la directrice et le foyer d'une parabole; trouver les points de rencontre d'une droite et de la courbe.

— Mener un cercle passant par deux points, et tangent à une droite donnée.

— Construire $$x = \frac{a\sqrt{5}\ \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

— Construire $$x = \frac{a}{2 - \sqrt{3}}.$$

— Connaissant le foyer et la directrice d'une parabole, trouver les points de la courbe qui sont sur une parallèle à la directrice, et les tangentes en ces points.

— Construire un carré équivalent à un décagone régulier.

— Construire $x = R\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$

— Construire $x = a\sqrt{7}.$

— On prolonge le diamètre d'un cercle d'une longueur égale au rayon. On mène la tangente par le point obtenu. Calculer la surface engendrée par l'arc compris entre le diamètre et le point de contact quand la figure tourne autour du diamètre. Rapport de cette surface à celle de la sphère; surface engendrée par la tangente.

— Étant donnés un cercle et un point, mener par le point une sécante telle que le rapport des deux arcs interceptés soit égal à $\frac{3}{7}$. Valeur de la corde interceptée. Valeur de son apothème.

— On détermine un plan par les projections de trois de ses points. Trouver l'angle de la ligne de terre avec ce plan.

— On se donne trois points non en ligne droite dans un plan perpendicu-

laire au plan horizontal ; ces trois points sont sur une circonférence directrice d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la ligne de terre. Mener à ce cylindre un plan tangent par un point donné extérieur.

— On donne les projections de trois points non en ligne droite ; ce sont les sommets de la base d'un prisme triangulaire dont la direction des arêtes est donnée par les angles que fait l'une d'elles avec les côtés adjacents de la base. Trouver les projections et la section droite du prisme.

— On donne un point dans un plan quelconque ; ce point est le centre d'un cercle rayon donné, situé dans ce plan ; le cercle est la base d'un cône dont le sommet est sur la ligne de terre. On demande de mener à ce cône un plan tangent passant par la ligne de terre.

— On donne un cercle O sur un plan horizontal coté 8 ; ce cercle est la directrice d'un cylindre dont on donne une génératrice par sa projection horizontale et la cote 15 d'un de ses points. Mener un plan tangent par un point extérieur coté 13.

— Construire une pyramide triangulaire dont on connaît la base sur le plan horizontal, et les trois arêtes latérales. Chercher l'un des dièdres latéraux, et un des dièdres à la base.

— On suppose qu'un pendule vertical porte une boule de 50 grammes. Quelle force horizontale faut-il appliquer à cette boule pour que le pendule fasse avec l'horizon un angle de 60 degrés ?

— Un poids de 45 kilog. est soumis pendant 3 secondes à une force de 25 kilog. Quelle est la vitesse de ce corps au bout des 3 secondes ?

— Avec quelle vitesse faut-il lancer un corps sous une inclinaison de 60 degrés pour qu'il tombe à une distance donnée du point de départ ?

— On donne un cylindre de hauteur h et de densité d ; ce cylindre est surmonté d'une demi-sphère de rayon r égal à celui du cylindre, et de densité d'. Trouver le centre de gravité du système. Quelle doit être la hauteur du cylindre pour que le centre de gravité soit au centre de la demi-sphère ?

— Une barre AB, de $1^m,50$, pesant 150 kilog., est appuyée en A et B. Quelle sera la pression supportée en A et B si l'on applique au point C tel que AC = 60 centimètres, un poids de 100 kilog. ?

QUESTIONS D'EXAMEN

Un hyperboloïde étant donné par ses trois directrices rectilignes, reconnaître s'il est de révolution.

Lorsqu'un hyperboloïde est de révolution, tout plan tangent est perpendiculaire au plan du méridien passant par le point de contact ; de plus, tout plan tangent coupe la surface suivant deux droites faisant un angle constant, et le plan méridien suivant la bissectrice de l'angle de ces deux droites ; enfin le plan méridien passe par l'axe et par suite contient le centre.

Cela posé, pour reconnaître si la surface est de révolution,

je commencerai par déterminer son centre; ce point est le centre du parallélépipède dont trois arêtes s'appuient sur les trois directrices données.

Puis, prenant une position quelconque de la génératrice, je détermine les trois plans qu'elle forme avec les droites données; du centre, j'abaisse sur chacun de ces plans une perpendiculaire; le pied de cette perpendiculaire sera sur la bissectrice de l'angle de la génératrice avec la directrice correspondante, si la surface est de révolution; enfin, je mène par chaque bissectrice et la perpendiculaire un plan; si ces trois plans se coupent suivant une droite, la surface est de révolution.

On donne un cercle et deux génératrices de même système d'un hyperboloïde, déterminer le centre et les axes de la surface ainsi que les deux sections circulaires qui passent par un point donné.

On sait que, dans un hyperboloïde, deux génératrices de même système ne sont jamais dans un même plan, et que si deux génératrices de même système qui sont dans un même plan, sont parallèles, leur plan passe par le centre de la surface.

Par conséquent, si par la génératrice A je mène un plan parallèle à la génératrice B, et si je prends son intersection *b* avec la circonférence donnée, le plan mené par B et *b* est un plan diamétral; de même, si je mène par B un plan parallèle à A, et si je prends son intersection *a* avec la circonférence, le plan mené par A et *a* est encore un plan diamétral; donc l'intersection de ces deux plans est un diamètre qui rencontre A et B ; c'est donc un diamètre réel. Je puis donc facilement déterminer le centre; soit O ce centre.

Si, par le centre O, je mène un plan parallèle au plan du cercle, ce plan contient un des axes de la surface. Pour avoir cet axe, je prends la droite qui passe par les centres et je la projette sur le plan du cercle diamétral; il me suffit dans ce plan de mener une perpendiculaire à la projection précédente, j'aurai un axe en grandeur et en position.

De plus, le plan qui projette la droite des centres des

deux cercles sur le plan de l'un d'eux, est un plan principal; il coupe la surface suivant une hyperbole dont nous connaissons assez d'éléments pour en déterminer facilement les axes en grandeur et en position. En effet ce plan principal coupe A en un point *m* et si nous projetons A sur ce plan, la projection est tangente à l'hyperbole de section; nous connaissons donc un premier système de diamètres conjugués, dont l'un est connu en grandeur et position, l'autre en position seulement; de même, la génératrice B nous donnera un second système de diamètres conjugués; et, puisque le produit des segments interceptés sur une tangente par un système de diamètres conjugués est égal au carré de diamètre parallèle à la tangente, nous aurons facilement les asymptotes, et par suite les axes.

Enfin nous aurons très simplement la seconde direction de plans circulaires, en prenant le second plan cyclique qui passe par le centre. Il sera donc extrêmement facile de mener les deux plans circulaires qui passent par un point donné de la surface.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Concours de 1879.

Solution par M. J. Braun, élève du Lycée Charlemagne (*).

Étant donné un tétraèdre OABC, *défini par l'angle trièdre* O, *et par les longueurs* 4a, 4b, 4c, *des arêtes* OA, OB, OC, *on joint les milieux des arêtes opposées, et ces trois droites se coupent en un point* ω.

1° *Démontrer que l'ellipsoïde qui admet ces droites pour diamètres conjugués, est tangent aux six arêtes du tétraèdre.*

2° *Trouver l'équation de cet ellipsoïde et de l'hyperboloïde engendré par une droite s'appuyant sur les trois droites* A′, B′, C′ *qui passent par les milieux de* OA, OB, OC, *et sont parallèles à* OB, OC, OA.

(*) Aujourd'hui élève à l'École polytechnique.

Trouver l'intersection des deux surfaces.

3° *En appelant* HK *une droite s'appuyant sur* A', B' *et* C', *cette droite rencontre l'ellipsoïde en deux points* H *et* K *par chacun desquels on mène un plan parallèle au plan tangent à l'ellipsoïde en l'autre point.*

Démontrer que ces plans passent par le centre de l'ellipsoïde, et trouver le lieu décrit par leur intersection.

SOLUTION ANALYTIQUE

Nous prendrons pour axes de coordonnées les droites $\omega\alpha$, $\omega\beta$, $\omega\gamma$, qui passent par les milieux de OA, OB, OC et nous poserons $\omega\alpha = a'$, $\omega\beta = b'$, $\omega\gamma = c'$. Ces longueurs peuvent être facilement calculées en fonction des angles AOB, BOC, COA, dont nous désignerons les cosinus ν, λ, μ et qui définissent le trièdre O.

En effet si l'on prend un instant pour axes les droites OA, OB, OC, les coordonnées de α seront $(2a, 0, 0)$, celles de α', point symétrique de α par rapport à ω: $(0, 2b, 2c)$. Par suite:

$$\alpha\alpha'^2 = 4a'^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 2\lambda.\ 2b.\ 2c$$
$$- 2\mu.\ 2c.\ 2a. - 2\nu.\ 2a.\ 2b.$$

ou bien $a'^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\lambda bc - 2\mu ca - 2\nu ab,$
de même $b'^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\mu ca - 2\nu ab - 2\lambda bc$
et $c'^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\nu ab - 2\lambda bc - 2\mu ca.$

Ainsi les longueurs a', b' c' peuvent être considérées comme données.

PREMIÈRE PARTIE. — Cela posé, l'équation de l'ellipsoïde, dans le système d'axes adopté est évidemment

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1. \qquad (1)$$

Démontrons, par exemple, qu'il est tangent à l'arête BC. Cette arête est définie par les équations

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{x}{a'} + \dfrac{y}{b'} + \dfrac{z}{c'} = -1 & \text{qui représente le plan ABC} \\ -\dfrac{x}{a'} + \dfrac{y}{b'} + \dfrac{z}{c'} = 1 & \text{— \quad — \quad OBC} \end{array}\right\} (2)$$

D'autre part, le plan tangent à l'ellipsoïde, au point α'

dont les coordonnées sont ($-a'$, 0, 0) a pour équation $\frac{x}{a'} = -1$, et si l'on retranche les deux équations (2), on trouve précisément $\frac{x}{a'} = -1$.

Le plan tangent en α' passe donc par BC, qui, par suite, est tangent à l'ellipsoïde.

Deuxième partie. — L'hyperboloïde a évidemment pour centre le point ω, et il admet comme génératrices les trois droites A'_1, B'_1, C'_1 symétriques de A', B', C' par rapport au centre ω.

Cela posé, soit

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 1$$

l'équation de cet hyperboloïde. Coupons-le par le plan des xy.

La section doit se composer des deux droites B' et B'_1 qui ont pour équations (dans ce plan des xy)

$$-\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1$$

et

$$\frac{x}{a'} - \frac{y}{b'} = 1.$$

On doit donc avoir

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy \equiv \left(\frac{x}{a'} - \frac{y}{b'}\right)^2.$$

Par suite $A = \frac{1}{a'^2}$, $A' = \frac{1}{b'^2}$, $B'' = -\frac{1}{a'b'}$,

on trouverait de même

$$A'' = \frac{1}{c'^2},\ B = -\frac{1}{b'c'},\ B' = -\frac{1}{c'a'}.$$

L'équation de l'hyperboloïde demandé est donc

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} - \frac{2yz}{b'c'} - \frac{2zx}{a'c'} - \frac{2xy}{a'b'} = 1. \quad (3)$$

Il s'agit maintenant de trouver l'intersection des surfaces (1) et (3). On peut remplacer pour cela (3) par la combinaison (1) — (3), ce qui donne

$$\frac{yz}{b'c'} + \frac{zx}{c'a'} + \frac{xy}{a'b'} = 0. \quad (4)$$

C'est un cône du second degré ayant pour sommet l'ori

gine ω, et admettant pour arêtes les droites $\omega\alpha$, $\omega\beta$, $\omega\gamma$ (axes des coordonnées).

Pour achever de définir géométriquement ce cône, il suffit de connaître les plans tangents le long des génératrices $\omega\alpha$, $\omega\beta$, $\omega\gamma$.

Cherchons par exemple le plan tangent en α (a', o, o); il a pour équation
$$\frac{y}{b'} + \frac{z}{c'} = 0$$
et cette équation est la somme des équations (2). Donc le plan tangent au cône le long de la génératrice $\alpha\omega\alpha'$ n'est autre que le plan ωBC.

De même ωCA et ωAB sont les plans tangents le long des génératrices $\beta\omega\beta'$ et $\gamma\omega\gamma'$.

Revenons maintenant à l'intersection de (1) et de (4).

Si l'on multiplie (4) par 2, et qu'on y ajoute (1), on obtient
$$\left(\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} + \frac{z}{c'}\right)^2 = 1$$
qui se décompose en deux autres, savoir
$$\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} + \frac{z}{c'} = 1$$
et
$$\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} + \frac{z}{c'} = -1.$$

Ces équations sont celles des deux plans $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$.

L'intersection cherchée peut donc être considérée comme celle du cône (4) par ces deux plans. Le plan $\alpha'\beta'\gamma'$ coupe le cône suivant une ellipse passant par α', β', γ' et tangente aux côtés de triangle ABC; le plan $\alpha\beta\gamma$ donne une ellipse symétrique de la première par rapport à ω.

Finalement, l'intersection de l'ellipsoïde et de l'hyperboloïde se compose de deux ellipses, complètement déterminées.

Troisième partie. — On peut écrire l'équation de l'hyperboloïde (3) sous la forme
$$\left(\frac{x}{a'} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c'}\right)^2 - \frac{4yz}{b'c'} = 1$$
ou
$$\left(\frac{x}{a'} - \frac{y}{b'} - \frac{z}{c'}\right)^2 - \left(\frac{y}{b'} + \frac{z}{c'}\right)^2$$

$$= 1 - \left(\frac{y}{b'} - \frac{z}{c'}\right)^2$$

ou enfin
$$\frac{x}{a'}\left(\frac{x}{a'} - \frac{2y}{b'} - \frac{2z}{c'}\right)$$
$$= \left(1 + \frac{y}{b'} - \frac{z}{c'}\right)\left(1 - \frac{y}{b'} + \frac{z}{c'}\right). \quad (5)$$

Écrivons les deux équations

$$(6) \quad \begin{cases} \dfrac{x}{a'} = \lambda\left(1 + \dfrac{y}{b'} - \dfrac{z}{c'}\right) \\ \lambda\left(\dfrac{x}{a'} - \dfrac{2y}{b'} - \dfrac{2z}{c'}\right) = 1 - \dfrac{y}{b'} + \dfrac{2}{c'} \end{cases}$$

Ces équations représentent une droite. Si l'on élimine le paramètre variable λ entre elles, on obtient l'équation de l'hyperboloïde (5). La droite (6) est donc une des génératrices de l'hyperboloïde ; d'autre part elle n'appartient pas au système des trois génératrices A', B', C', car il est facile de vérifier qu'elle rencontre C', par exemple.

Dès lors nous pouvons conclure que (6) sont les équations générales qui représentent les droites HK de l'énoncé.

Pour chercher l'intersection d'une de ces droites avec l'ellipsoïde, il suffit évidemment de prendre son intersection par le plan $\alpha\beta\gamma$, puis par le plan $\alpha'\beta'\gamma'$.

Pour le plan $\alpha\beta\gamma$, on a à résoudre les trois équations

$$(7) \quad \begin{cases} \dfrac{x}{a'} - \lambda\dfrac{y}{b'} + \lambda\dfrac{z}{c'} = \lambda \\ \lambda\dfrac{x}{a'} + (1 - 2\lambda)\dfrac{y}{b'} - (1 - 2\lambda)\dfrac{z}{c'} = 1 \\ \dfrac{x}{a'} + \dfrac{y}{b'} + \dfrac{z}{c'} = 1 \end{cases}$$

Appliquant à ces équations la règle de Cramer, on trouve pour les coordonnées du point H, les valeurs

$$\frac{x_1}{a'} = \frac{2\lambda(\lambda + 1)}{3\lambda^2 + 1}, \quad \frac{y_1}{b'} = \frac{1 - \lambda^2}{3\lambda^2 + 1}, \quad \frac{z_1}{c'} = \frac{2\lambda(\lambda - 1)}{3\lambda^2 + 1} \quad (H)$$

En remplaçant la dernière des équations (7) par $\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} + \frac{z}{c'} = -1$ on obtient les coordonnées du point K

$$\frac{x_1}{a'_1} = \frac{2\lambda(1-\lambda)}{3\lambda^2+1}, \quad \frac{y^2}{b'} = \frac{-2\lambda(\lambda+1)}{3\lambda^2+1}, \quad \frac{z_1}{c'} = \frac{\lambda^2-1}{3\lambda^2+1} \quad (K)$$

Le plan tangent au point H à l'ellipsoïde (1) est donc

$$2\lambda(\lambda+1)\frac{x}{a'} + (1-\lambda^2)\frac{y}{b'} + 2\lambda(\lambda-1)\frac{z}{c'} = 3\lambda^2+1$$

et le plan mené par K, parallèlement à ce plan tangent, sera

$$2\lambda(\lambda+1)\left[\frac{x}{a'} - \frac{2\lambda(1-\lambda)}{3\lambda^2+1}\right] + (1-\lambda^2)\left[\frac{y}{b'} + \frac{2\lambda(\lambda+1)}{3\lambda^2+1}\right]$$
$$+ 2\lambda(\lambda-1)\left[\frac{z}{c'} + \frac{1-\lambda^2}{3\lambda^2+1}\right] = 0$$

ou bien $2\lambda(\lambda+1)\dfrac{x}{a'} + (1-\lambda^2)\dfrac{y}{b'} + 2\lambda(\lambda-1)\dfrac{z}{c'} = 0$

De même le plan mené par H, parallèlement au plan tangent en K, sera

$$2\lambda\left(\lambda-1\right)\frac{x}{a'} + 2\lambda\left(\lambda+1\right)\frac{y}{b'} + \left(\lambda^2-1\right)\frac{z}{c'} = 0.$$

On voit que ces deux plans passent bien par l'origine.

Pour trouver le lieu décrit par leur intersection. il suffit d'éliminer λ entre ces deux équations.

Ordonnons-les par rapport à λ; elles deviennent

$$\lambda^2\left(\frac{x}{a'} + \frac{2z}{c'} - \frac{y}{b'}\right) + 2\lambda\left(\frac{x}{a'} - \frac{z}{c'}\right) + \frac{y}{b'} = 0$$

$$\lambda^2\left(\frac{x}{a'} + \frac{2y}{b'} - \frac{z}{c'}\right) + 2\lambda\left(\frac{y}{b'} - \frac{x}{a'}\right) + \frac{z}{c'} = 0$$

L'application d'une règle bien connue donne alors :

$$\left[\frac{z}{c'}\left(\frac{2x}{a'} + \frac{2z}{c'} - \frac{y}{b'}\right) - \frac{y}{b'}\left(\frac{2x}{a'} + \frac{2y}{b'} - \frac{z}{c'}\right)\right]^2$$
$$4\left[\left(\frac{y}{b'} - \frac{x}{a'}\right)\left(\frac{2x}{a'} + \frac{2z}{c'} - \frac{y}{b'}\right) - \left(\frac{x}{a'} - \frac{z}{c'}\right)\left(\frac{2x}{a'} + \frac{2y}{b'} - \frac{z}{c'}\right)\right]$$
$$\times\left[\left(\frac{x}{a'} - \frac{z}{c'}\right)\frac{z}{c'} - \frac{y}{b'}\left(\frac{y}{b'} - \frac{x}{a'}\right)\right]$$

ou bien

$$\left[\frac{z}{c'}\left(\frac{x}{a'} + \frac{z}{c'}\right) - \frac{y}{b'}\left(\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'}\right)\right]^2$$
$$= \left[\frac{z}{c'}\left(\frac{x}{a'} - \frac{z}{c'}\right) - \frac{y}{b'}\left(\frac{y}{b'} - \frac{x}{a'}\right)\right]$$

$$\times\left[\frac{z}{c'}\left(\frac{x}{a'}-\frac{z}{c'}\right)-\frac{y}{b'}\left(\frac{y}{b'}-\frac{x}{a'}\right)+\frac{4yz}{b'c'}-\frac{4x^2}{a'^2}\right]$$

ou encore

$$\left[\left(\frac{y}{b'}\right)^2-\frac{x}{a'}\frac{z}{c'}\right]\left[\left(\frac{z}{c'}\right)^2-\frac{x}{a'}\frac{y}{b'}\right]$$
$$+\left[\left(\frac{z}{c'}\right)^2-\frac{x}{a'}\frac{y}{b'}\right]\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2-\frac{y}{b'}\frac{z}{c'}\right]$$
$$+\left[\left(\frac{x}{a'}\right)^2-\frac{y}{b'}\frac{z}{c'}\right]\left[\left(\frac{y}{b'}\right)^2-\frac{x}{a'}\frac{z}{c'}\right]=0$$

ou

$$\left(\frac{x}{a'}\frac{y}{b'}\right)^2+\left(\frac{y}{b'}\frac{z}{c'}\right)^2-\frac{x^2}{a'^2}\left(\frac{x}{a'}\frac{y}{b'}+\frac{x}{a'}\frac{z}{c'}\right)$$
$$-\frac{y^2}{b'^2}\left(\frac{x}{a'}\frac{y}{b'}+\frac{y}{b'}\frac{z}{c'}\right)-\frac{z^2}{c'^2}\left(\frac{x}{a'}\frac{z}{c'}+\frac{y}{b'}\frac{z}{c'}\right)$$
$$+\frac{x^2}{a'^2}\frac{y}{b'}\frac{z}{c'}+\frac{y^2}{b'^2}\frac{z}{c'}\frac{x}{a'}+\frac{z^2}{c'^2}\frac{x}{a'}\frac{y}{b'}=0$$

ou

$$\left[\frac{xy}{a'b'}+\frac{yz}{b'c'}+\frac{zx}{c'a'}\right]^2$$
$$-\left(\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}\right)\left(\frac{xy}{a'b'}+\frac{yc}{b'c'}+\frac{zx}{c'a'}\right)=0$$

Cette équation se décompose en deux :

1°
$$\frac{xy}{a'b'}+\frac{yz}{b'c'}+\frac{zx}{c'a'}=0,$$

c'est le cône (4) ;

2°
$$\frac{z^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}-\frac{xy}{a'b'}-\frac{yz}{b'c'}-\frac{2x}{c'a'}=0$$

qui peut s'écrire

$$\left(\frac{x}{a'}-\frac{y}{b'}\right)^2+\left(\frac{y}{b'}-\frac{z}{c'}\right)^2+\left(\frac{z}{c'}-\frac{x}{a'}\right)=0$$

et par conséquent $\frac{x}{a'}=\frac{y}{b'}=\frac{z}{c'}$.

C'est la diagonale du parallélépipède construit sur $\omega\alpha$, $\omega\beta$, $\omega\gamma$.

En résumé, le véritable lieu décrit par l'intersection des plans ωH et ωK est le cône du second degré, qui a pour sommet l'origine et pour directrice la courbe d'intersection de l'ellipsoïde et de l'hyperboloïde.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Première partie. — Le plan tangent à l'ellipsoïde au point α' est parallèle au plan $\beta\gamma\omega$, qui est le plan diamétral conjugué de la direction $\omega\alpha'$. Or BC étant parallèle à $\beta\gamma$, l'est aussi au plan $\beta\gamma\omega$; donc BC est contenue dans le plan tangent en α' et par suite elle est tangente à l'ellipsoïde.

Même démonstration pour les cinq autres arêtes.

Deuxième partie. — Coupons l'ellipsoïde par le plan ABC : la section est une ellipse Σ, passant par α',β',γ', et tangente à BC, CA et AB.

Coupons l'hyperboloïde par le même plan sécant, la section sera une conique Σ' passant par α',β',γ'. Cherchons la tangente en α'.

Pour l'obtenir, il faut considérer le plan tangent à l'hyperboloïde en α', lequel est déterminé par la génératrice F, et par la deuxième génératrice A', qui passent par α' ; ce plan tangent n'est donc autre que OBC ; son intersection avec le plan sécant est BC, et par suite BC est la tangente en α' à la conique Σ'.

Donc Σ' coïncide avec Σ et cette conique forme une première partie de l'intersection.

Quant à la seconde partie, elle est évidemment symétrique de la première par rapport à ω. On retrouve le résultat déjà obtenu.

Troisième partie. — Considérons une position HK de la génératrice mobile ; et soient R et K les traces de cette droite sur les plans $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$; je dis que αH et γ'K sont parallèles. En effet, HK et A' déterminent un plan, dont les intersections αH, γ'K par deux plans parallèles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ doivent être parallèles entre elles.

Prenons le point h symétrique de H par rapport à ω ; h sera sur l'ellipse Σ, et αh sera parallèle à α'H ; les plans tangents en h et H sont parallèles, et tout plan passant par K et ω passe aussi en h.

En résumé la question proposée revient à la suivante :

Étant donnés trois diamètres conjugués ωα', ωβ', ωγ' d'un ellipsoïde, dans le plan α'β'γ', on mène deux parallèles γ'k, α'h; démontrer que le plan mené par chacun des points h et k, parallèlement au plan tangent à l'ellipsoïde en l'autre point, va passer par le centre ω, et trouver le lieu décrit par l'intersection de ces deux plans.

Menons β'L parallèle à γ'k et α'h, et considérons le plan diamétral conjugué de la direction α'h et sa trace σT sur le plan de l'ellipse Σ.

Il est clair que les plans tangents à l'ellipsoïde, en α' et en *h*, se coupent suivant une droite TD' située dans ce plan diamétral; et TD' sera parallèle à la trace ωD du plan ωβ'γ' sur le plan diamétral ωσT. Or β'γ' et KL coupent σT au même point D; la droite ωD parallèle à TD' appartient donc au plan ωKL.

Mais α'β'γ' est un triangle de surface maxima inscrit dans l'ellipse Σ, car la tangente en α' est parallèle à β'γ', etc... De plus surf. *hk*L = surf. α'β'γ'.

Donc *hk*L est aussi un triangle inscrit de surface maxima, et la tangente *h*T, en *h*, est parallèle à KL.

De là il résulte que le plan mené par K parallèlement au plan tangent à l'ellipsoïde en *h*, n'est autre que ωKL; de même l'autre plan de l'énoncé est ω*h*L. Ces deux plans passent bien par le centre ω de l'ellipsoïde, et leur intersection ωL décrit le cône du second degré ayant pour sommet ω et pour base l'ellipse Σ.

Nous retrouvons ainsi le résultat déjà obtenu analytiquement.

QUESTION 321

Solution par M. Baron, élève au Lycée Henri VI.

Établir pour des valeurs entières et positives de p *et de* n *quel que soit* x, *l'identité*

$$(x-1)^{p+1}\left(1^p x + 2^p x^2 + \ldots + n^p x^n\right\}$$

$$= \beta_1 x^{n+p+1} + \beta_2 x^{n+p} + \ldots$$

$$+ \beta_{p+1} x^{n+1} + \alpha^p x^p + \alpha^{p-1} x^{p-1} + \ldots \alpha_1 x \qquad (1)$$

les coefficients α, β *étant indépendants de* x *et donnés par les égalités*

$$\beta_1 = n^p$$

$$\beta_2 = (n-1)^p - C^1_{p+1} n^p$$

. . . .

$$\beta_{p+1} = (n-p)^p - C'_{p+1}(n-p+1)^p + \ldots + (-1)^p C^p_{p+1} n^p.$$

$$\alpha_1 = (-1)^{p+1} 1^p$$

$$\alpha_2 = (-1)^{p+1}.\ 2^p + (-1)^p C^1_{p+1} 1^p$$

$$\alpha_3 = (-1)^{p+1}.\ 3^p + (-1)^p C'_{p+1}.\ 2^p + (-1)^{p-1} C^2_{p+1}.\ 1^p$$

. . . .

$$\alpha_p = (-1)^{p+1} p^p + \ldots\ldots + (-1)^2 C^{p-1}_{p+1} 1^p$$

Pour établir cette identité développons $(x-1)^{p+1}$ par la formule du binôme, il vient

$$(x-1)^{p+1} = x^{p+1} + C^1_{p+1} x^p + C^2_{p+1} x^{p-1}$$

$$+ (-1)^3 C^3_{p+1} x^{p-2} \ldots + (-1)^p C^p_{p+1} x + (-1)^{p+1} C^{p+1}_{p+1}$$

Puis pour mettre en évidence les coefficients β, il suffit d'ordonner les deux termes du produit indiqué dans (1) par rapport aux puissances décroissantes de x et d'effectuer ce produit.

$$x^{p+1} - C^1_{p+1} x^p + C^2_{p+1} x^{p-1} + (-1)^3 C^3_{p+1} x^{p-2} + \ldots$$

$$+ (-1)^p C^p_{p+1} x + (-1)^{p+1} C^{p+1}_{p+1}$$

$$\underline{n^p x^n + (n-1)^p x^{n-1} + (n-2)^p x^{n-2} + \ldots + 2^p x^2 + 1^p . x}$$

$$x^p x^{n+p+1} + (n-1).\alpha \;\Big|\; x^{n+1} + (n-2)^p$$

$$- C^1_{p+2} n^p \;\Big|\; + (-1)^1 C^1_{p+1} (n-1)^p x^{n+p}$$

$$+ (-1)^2 C^2_{p+1} n^p$$

$$\left| \begin{array}{l} x^{n+p-1} + \ldots + (n-p)^p \\ \quad - C^1_{p+1}(n-p+1)^p \\ \quad + C^2_{p+1}(n-p+2)^p \\ \quad \vdots \\ \quad + (-1)^{p-1} C^{p-1}_{p+1}(n-1)^p \\ \quad + (-1)^p C^p_{p+1} n^p \end{array} \right| \; x^{n+1} + \ldots$$

La loi de formation des coefficients β est évidente.

Pour un coefficient quelconque β_i on aura l'expression

$$\beta i = (n - i - 1)^p + (-1)^1 C^1_{p+1}(n - 1)_p$$
$$+ (-1)^2 C^2_{p+1}(n - i + 1)^p + \ldots + (-1)^{i-1} C^{i-1}_{p+1} x^p.$$

Pour montrer l'identité des coefficients α avec ceux énoncés ci-dessus, ordonnons en sens inverse et effectuons le produit

$$(-1)^{p+1} C^{p+1}_{p+1} + (-1)^p C^p_{p+1} x + (-1)^{p-1} C^{p-1}_{p+1} x^2$$
$$+ \ldots + (-1)^2 C^2_{p+1} x^{p-1} + (-1)' C'_{p+1} x^p + x^p +$$
$$1^p x + 2^p x^2 + 3^p x^3 + \ldots \quad \ldots + (n-1)^p x^{n-1} + n^p x^n$$

$$1^p(-1)^{p+1} C^{p+1}_{p+1} \;\Big|\; x + 2^p(-1)^{p+1} + 1^p(-1)^p C_{p+1}$$

$$\Big|\; x + 3^p(-1)^{p+1} + 2^p(-1)^p C^p_{p+1} + 1^p(-1)^{p-1} C^{p-1}_{p+1} \;\Big|\; x^3 + \ldots \; (-1)^{p+1} p^p$$
$$+ (-1)^p (p-1) C_{p+p1} x^2$$
$$+ (-1)^{p-1} (p-2)^p C^{p-1}_{p+1}$$
$$+ (-1)^2 1^p C^2_{p+1}$$

La loi de formation des quantités α est aussi évidente.

Un coefficient quelconque α_j aura pour expression

$$\alpha_j = j^p(-1)^{p+1} + (j-1)^p(-1)^p C^p_{p+1}$$
$$+ (j-2)_p(-1)^{p-1} C^{p-1}_{p+1} + \ldots + 2^p(-1)^{p-j+2} C^{p-j+2}_{p+1}$$
$$+ 1^p(-1)^{p-j+2} C^{p-j+2}$$

QUESTIONS D'EXAMEN

Étant donné un point C *de la parabole* $y^2 = 2px$, *on abaisse de ce point les deux normales* CA *et* CB *autres que celle qui passe en* C; *on demande l'équation de la corde* AB *qui joint leurs pieds.*

Cette question peut être résolue par bien des méthodes différentes; nous indiquerons le procédé suivant qui nous semble le plus simple:

α, β étant les coordonnées d'un point du plan, l'équation qui donne les ordonnées des pieds des normales abaissées de ce point sur la parabole est

$$y^3 - 2py(\alpha - p) - 2p^2\beta = 0.$$

Si le point (α, β) est sur la courbe, cette équation admet nécessairement la solution $y = \beta$ qui correspond à la nor-

male menée au point lui-même, et par conséquent, en divisant par $y - \beta$, l'équation qui reste

$$y^2 + \beta y + 2p^2 = 0$$

établit une relation entre les ordonnées des pieds A et B des deux autres normales abaissées du point considéré.

Mais entre les coordonnées de ces pieds on a aussi l'équation

$$y^2 - 2px = 0.$$

Toute relation déduite de la combinaison de ces deux équations représentera un lieu passant par les points A et B; or, si on les retranche membre à membre, il vient l'équation

$$\beta y + 2px + 2p^2 = 0$$

qui, étant du premier degré, représente une ligne droite: cette droite passe en A et B; elle est donc la corde cherchée.

Observons qu'elle ne renferme le paramètre qu'au premier degré; donc, *quand le point* C *se déplace sur la courbe, la corde* AB *passe par un point fixe dont les coordonnées sont* $y = 0$ *et* $x = -p$, *c.-à-d. par le point qui est symétrique du sommet par rapport à la directrice.*

L'application de la même méthode conduit à la démonstration de la propriété suivante :

Si d'un point d'une normale à la parabole on abaisse les deux autres normales à la courbe, la corde qui joint leurs pieds conserve une direction fixe quand le point parcourt la normale donnée.

Soient, en effet, $(x'y')$ le pied de la normale fixe considérée, et $(\alpha\beta)$ un point quelconque de cette normale; l'équation

$$y^3 - 2py(\alpha - p) - 2p^2\beta = 0$$

doit admettre une première solution y', et en supprimant cette solution, il reste l'équation

$$y^2 + yy' + y'^2 - 2p\alpha + 2p^2 = 0$$

qui, combinée avec l'équation

$$y^2 = 2px$$

de la parabole, fournit l'équation de la corde qui joint les pieds des deux autres normales.

Cette corde a donc pour équation

$$2px + yy' + y'^2 - 2p\alpha + 2p^2 = 0.$$

Son coefficient angulaire est $-\frac{2p}{y'}$, lequel est constant pour une valeur donnée de y', c.-à-d. quand la première normale est fixe; c'est ce qu'il fallait démontrer.

Il faut observer que y' et x' satisfaisant à la relation $y'^2 = 2px'$, le coefficient angulaire m de la direction fixe peut s'écrire sous la forme

$$m = -\frac{2p}{y'} = -\frac{y'^2}{x'y'} = -\frac{y'}{x'}.$$

Cette forme montre que *la direction fixe est la symétrique de la direction de la droite qui joint le sommet de la parabole au pied de la normale fixe.*

Ce résultat peut également être mis en évidence par un raisonnement géométrique très simple.

Autour d'un point quelconque P *pris dans le plan d'une conique, on fait tourner une sécante* PAB; *par les points de rencontre* A *et* B *de cette sécante avec la courbe, on mène les normales* AM *et* BM *à cette courbe; trouver le lieu des points de rencontre* M *de ces normales.*

Cette question présente de réelles difficultés quand on l'aborde directement pour une conique quelconque; voici un procédé, fondé sur la considération de l'équation en λ, au moyen duquel elle se résout, au contraire, assez facilement.

$$f(x, y) = 0 \qquad (1)$$

étant l'équation de la conique en coordonnées rectangulaires, la normale en un point (x, y) de cette courbe a pour équation

$$\frac{Y - y}{f'_y} = \frac{X - x}{f'_x}.$$

Pour que cette normale passe au point (α, β) il faut que l'on ait

$$\frac{\beta - y}{f'_y} = \frac{\alpha - x}{f'_x}. \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2), considérées simultanément déterminent les coordonnées des pieds des normales que l'on peut abaisser sur la courbe d'un point (α, β) de son plan. Ces points sont donc à l'intersection de la conique proposée (1) et de la courbe représentée par (2), laquelle est une hyper-

bole équilatère passant au point (α, β). Les coniques (1) et (2) ont trois couples de sécantes communes, de l'un desquels la droite PAB fait partie ; si donc on exprime que l'équation $(\beta - y) f'_x - (\alpha - x) f'_y + \lambda f(x, y) = 0$ (3) est un système de deux droites, c'est-à-dire si l'on écrit que λ satisfait à l'équation en λ, $\varphi(\lambda) = 0$ (4), il suffira d'écrire que la courbe (3) passe au point $P(x_0, y_0)$ pour que le point (α, β) soit l'intersection de deux normales menées à la conique (1) par les points où elle est coupée par la sécante PAB. Éliminant alors λ entre les deux équations $(\beta - y_0) f'_{x_0} - (\alpha - x_0) f'_{y_0} + \lambda f(x_0 y_0) = 0$ et $\varphi(\lambda) = 0$, on aura l'équation du lieu des points (α, β). Or la première de ces équations fournit λ par une relation du premier degré ; donc l'élimination est toujours facile.

Pour éclaircir ce qui précède, nous appliquerons la méthode au cas, souvent demandé, où le point fixe P est un foyer de la conique. Soit donc, par exemple, l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \qquad (1)$$

L'hyperbole équilatère qui renferme les pieds des normales issues d'un point (α, β) a pour équation

$$c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0 \qquad (2)$$

L'équation générale des coniques passant par les rencontres des courbes (1) et (2) est

$$c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0. \quad (3)$$

Pour que cette équation représente un système de deux droites, il faut qu'on ait

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda}{a^2} & \frac{c^2}{2} & \frac{b^2\beta}{2} \\ \frac{c^2}{2} & \frac{\lambda}{b^2} & -\frac{a^2\alpha}{2} \\ \frac{b^2\beta}{2} & -\frac{a^2\alpha}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$4\lambda^3 + \lambda a^2b^2(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4) + a^4b^4c^2\alpha\beta = 0 \quad (4)$$

En vertu de cette condition (4), l'équation (3) représente

un système de deux droites. Pour que l'une de ces droites passe au point fixe ($x = c$, $y = 0$), il faut que l'équation (3) soit vérifiée par les coordonnées de ce point, c'est-à-dire que l'on ait

$$b^2\beta c + \lambda\left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right) = 0. \qquad (5)$$

Entre les équations (4) et (5) éliminant λ, on aura entre α et β l'équation du lieu.

On tire de (5) $a^2b^2\beta c + \lambda(c^2 - a^2) = 0$,

d'où

$$\lambda = \frac{a^2b^2\beta c}{b^2} = a^2\beta c.$$

Reportant cette valeur de λ dans (4), il vient

$$4a^4\beta^2c^2 + a^2\beta c \,.\, a^2b^2(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4) + a^4b^4c^2\alpha\beta = 0.$$

Remplaçant α par x, β par y, et réduisant, il reste

$$4a^2c^2y^2 + b^2(a^2x^2 + b^2y^2 - c^4) + b^4cx = 0,$$

équation qui peut s'écrire encore

$$y^2(b^4 + 4a^2c^2) + a^2b^2x^2 + b^4cx - b^2c^4 = 0$$

ou

$$y^2(b^4 + 4a^2c^2) + b^2a^2\left(x + \frac{b^2c}{2a^2}\right)^2 = \frac{b^2c^2}{4a^2}(b^4 + 4a^2c^2).$$

En posant $x + \dfrac{b^2c}{2a^2} = x'$, c'est-à-dire en transportant les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes au point de l'axe des x dont l'abscisse est $-\dfrac{b^2c}{2a^2}$, l'équation du lieu prend la forme

$$\frac{y^2}{\dfrac{b^2c^2}{4a^2}} + \frac{x'^2}{\dfrac{c^2}{4a^4}(b^4 + 4a^2c^2)} = 1,$$

qui représente une ellipse ayant pour demi-axes

$$\frac{c}{2a^2}\sqrt{b^4 + 4a^2c^2} \quad \text{et} \quad \frac{bc}{2a}.$$

Le calcul se fait absolument de la même manière pour l'hyperbole et pour la parabole.

On considère toutes les paraboles ayant une tangente commune et passant par deux points fixes donnés sur une perpendiculaire à cette tangente, et on demande le lieu de leurs foyers.

La recherche de ce lieu est un exemple de l'avantage qu'il y a souvent, dans les questions de ce genre, à employer l'équation focale, en conduisant convenablement les calculs. Les méthodes générales ordinairement usitées pour la détermination des lieux de foyers (tangentes isotropes, identification, soit directe, soit par la considération du carré parfait, etc.) ne réussissent pas dans le cas où il s'agit, ou conduisent à des calculs excessivement laborieux.

Prenons pour axe des x la tangente donnée, et pour axe des y la perpendiculaire qui renferme les deux points fixes. Prenons l'équation focale sous la forme

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (x \cos \varphi + y \sin \varphi - p)^2$$

l'excentricité étant égale à l'unité, puisque les courbes considérées sont des paraboles.

L'axe des x étant tangent, le symétrique du foyer par rapport à cette droite est sur la directrice ; les coordonnées de ce point étant α et $-\beta$, on a donc

$$\alpha \cos \varphi - \beta \sin \varphi - p = 0. \qquad (1)$$

L'équation aux y des points d'intersection de la courbe avec l'axe des y étant

$$\alpha^2 + (y - \beta)^2 = (y \sin \varphi - p)^2$$

ou $\quad y^2 \cos^2 \varphi - 2y(\beta - p \sin \varphi) + \alpha^2 + \beta^2 - p^2 = 0,$

si l'on désigne par b et b' les ordonnées des deux points fixes donnés, qui sont les racines de cette équation, on aura

$$\frac{2(\beta - p \sin \varphi)}{\cos^2 \varphi} = b + b', \qquad (2)$$

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2 - p^2}{\cos^2 \varphi} = bb'. \qquad (3)$$

Entre les relations (1), (2) et (3), éliminant p et l'angle φ, on aura l'équation du lieu des foyers.

Divisant (2) par (3), il vient

$$\frac{\beta - p \sin \varphi}{\alpha^2 + \beta^2 - p^2} = \frac{b + b'}{2bb'}, \qquad (4)$$

équation qui remplace, par exemple, l'équation (2).

Remplaçant p dans (4) et dans (3) par sa valeur tirée de (1), il vient

$$\beta - \sin\varphi\,(\alpha\cos\varphi - \beta\sin\varphi) = \frac{b+b'}{2bb'}(\alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi)^2$$

puis $$(\alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi)^2 = bb'\cos^2\varphi,$$

d'où $$\frac{(\alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi)^2}{bb'} = \cos^2\varphi.$$

Donc

$$\beta - \sin\varphi\,(\alpha\cos\varphi - \beta\sin\varphi) = \frac{b+b'}{2}\cos^2\varphi.$$

De la relation $(\alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi)^2 = bb'\cos^2\varphi$, on tire (en prenant le signe $+$)

$$\alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi = \cos\varphi\sqrt{bb'},$$

d'où $$\alpha\sin\varphi = \cos\varphi\left(\sqrt{bb'} - \beta\right),$$

ce qui donne $$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{bb'} - \beta} = \frac{\cos\varphi}{\alpha}.$$

L'autre équation peut être rendue homogène en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ en l'écrivant ainsi :

$$\beta(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) - \alpha\sin\varphi\cos\varphi + \beta\sin^2\varphi = \frac{b+b'}{2}\cos^2\varphi$$

ou

$$2\beta\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\left(\beta - \frac{b+b'}{2}\right) - \alpha\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

En y remplaçant $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ par les quantités qui leur sont proportionnelles, il vient

$$2y\left(\sqrt{bb'} - y\right)^2 + x^2\left(y - \frac{b+b'}{2}\right) - x^2\left(\sqrt{bb'} - y\right) = 0$$

Telle est l'équation du lieu. On peut l'écrire

$$2y^3 - 4y^2\sqrt{bb'} + 2ybb' + 2x^2y - x^2\left(\frac{b+b'}{2} + \sqrt{bb'}\right) = 0$$

En posant $k^2 = bb'$, il vient

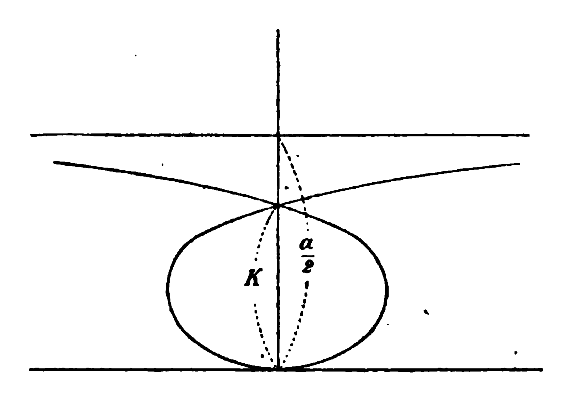
$$x^2\left(2y - \frac{b+b'}{2} - k\right) + 2y^3 - 4y^2k + 2k^2y = 0,$$

Posant encore $\frac{b+b'}{2} + k = a$, c'est-à-dire $\left(\sqrt{b} + \sqrt{b'}\right)^2 = 2a$, on a

$$x^2(a - 2y) = 2y\,(y^2 - 2ky + k^2) = 2y\,(y - k)^2.$$

d'où $$x = \pm(y - k)\sqrt{\frac{2y}{a - 2y}}.$$

équation facile à construire, et représentant une courbe de la forme suivante :



En prenant le signe — dans la relation

$$(\alpha \sin\varphi + \beta \cos\varphi)^2 = bb' \cos^2 \varphi$$

et faisant le même calcul, on trouve l'équation

$$x^2 [(\sqrt{b} - \sqrt{b'})^2 y] = 4y(y + k)^2,$$

qui représente une autre courbe analogue à la précédente, et qui forme avec elle le lieu complet des foyers.

Étant donnée l'équation focale des coniques, on demande de déterminer en fonctions des coefficients de cette équation les longueurs des axes de la conique qu'elle représente.

α, β, étant les coordonnées d'un foyer d'une conique, et $lx + my + n = 0$ l'équation de la directrice correspondante, par rapport à deux axes rectangulaires quelconques, l'équation de la conique est

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (lx + my + n)^2.$$

L'excentricité de cette conique est $\sqrt{l^2 + m^2}$. La distance du foyer à la directrice correspondante est

$$\frac{l\alpha + m\beta + n}{\sqrt{l^2 + m^2}}.$$

Supposons qu'il s'agisse d'une ellipse. La distance du

foyer à la directrice, qui est comptée sur l'axe focal, est égale à $\frac{a^2}{c} - c$, c'est-à-dire à $\frac{a^2 - c^2}{c}$.

On a donc les trois relations : $\frac{c}{a} = e$, $\frac{a^2 - c^2}{c} = \delta$, et $a^2 - b^2 = c^2$, en désignant par e l'excentricité de la courbe, et par δ la distance du foyer à la directrice correspondante. On en tire

$c = ae$, d'où $\frac{a^2 - a^2e^2}{ae} = \delta$, c'est-à-dire $\frac{a(1 - e^2)}{e} = \delta$, d'où

$$a = \frac{e\delta}{1 - e^2}.$$

Par suite $\quad a^2 - b^2 = e^2a^2$, d'où $b^2 = a^2(1 - e^2)$

$$= \frac{e^2\delta^2}{(1 - e^2)^2}(1 - e)^2 = \frac{e^2\delta^2}{1 - e^2}.$$

Donc enfin

$$b^2 = \frac{(l^2 + m^2)}{1 - l^2 - m^2} \cdot \frac{(l\alpha + m\beta + n)^2}{l^2 + m^2} = \frac{(l\alpha + m\beta + n)^2}{1 - l^2 - m^2}$$

$$a^2 = \frac{e^2\delta^2}{(1 - e^2)^2} = \frac{b^2}{1 - e^2} = \frac{(l\alpha + m\beta + n)^2}{(1 - l^2 - m^2)^2}$$

et
$$c^2 = \frac{(l\alpha + m\beta + n)^2 (l^2 + m^2)}{(1 - l^2 - m^2)^2}.$$

Si l'on prend l'équation de la conique sous la forme $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = e^2(x \cos\varphi + y \sin\varphi - p)^2$, ces formules deviennent

$$b^2 = \frac{e^2(\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi - p)^2}{1 - e^2} \quad a^2 = \frac{e^2(\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi - p)^2}{(1 - e^2)^2}$$

$$c^2 = \frac{e^4(\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi - p)^2}{(1 - e^2)^2}.$$

Dans le cas de l'hyperbole, les notations étant les mêmes que précédemment, les formules sont

$$a = \frac{e\delta}{e^2 - 1} \quad b = \frac{e\delta}{\sqrt{e^2 - 1}} \quad c = \frac{e^2\delta}{e^2 - 1}.$$

Les expressions que nous venons d'établir sont surtout utiles lorsque, dans une question, il entre comme données un

foyer ou une directrice, en même temps que la longueur de l'un des axes ou la distance focale.

Soit, par exemple, à trouver *le lieu des sommets des ellipses ayant un foyer, un point et le petit axe (en longueur) communs.*

Prenons pour axe des x la droite qui joint le foyer au point donné, le foyer pour origine, et pour axe des y, la perpendiculaire à cette droite. Soit d l'abscisse du point donné.

L'équation de la courbe est $x^2 + y^2 = (lx + my + n)^2$. (1)

Le point donné étant sur la courbe, on a la condition

$$d^2 = (ld + n)^2 \qquad (2)$$

b étant la longueur donnée du petit axe, on a, par la formule établie plus haut,

$$b^2 = \frac{n^2}{1 - l^2 - m^2}. \qquad (3)$$

Les sommets de l'axe focal sont à l'intersection de la courbe avec l'axe focal, lequel est la perpendiculaire abaissée du foyer sur la directrice, et dont l'équation est, par conséquent

$$mx - ly = 0. \qquad (4)$$

Si, entre les équations (1), (2), (3) et (4) on élimine l, m, n, on aura l'équation du lieu.

Le calcul se fait plus commodément en employant la forme $\quad x^2 + y^2 = e^2 (x \cos\varphi + y \sin\varphi - p)^2$.

Les équations (2), (3) et (4) deviennent alors

$$d^2 = e^2 (d \cos\varphi - p)^2 ; \; b^2 = \frac{p^2 e^2}{1 - e^2} ; \; x \sin\varphi - y \cos\varphi = 0$$

On en tire

$$\frac{x^2 + y^2}{d^2} = \left(\frac{x \cos\varphi + y \sin\varphi - p}{d \cos\varphi - p}\right)^2$$

et

$$\frac{d^2}{b^2} = \frac{(d \cos\varphi - p)^2}{p^2 + b^2}.$$

Éliminons p entre ces deux équations. On a

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{d} = \frac{x \cos\varphi + y \sin\varphi - p}{d \cos\varphi - p},$$

d'où

$$p = \frac{d \cos\varphi \sqrt{x^2 + y^2} - d(x \cos\varphi + y \sin\varphi)}{\sqrt{x^2 + y^2} - d}$$

Par conséquent

$$\frac{d^2}{b^2}=\frac{d^2(\delta\cos\varphi+x\cos\varphi+y\sin\varphi)^2}{b^2(\sqrt{x^2+y^2}-d)^2+[d\cos\varphi\sqrt{x^2+y^2}-d(x\cos\varphi+y\sin\varphi)]}$$

ou

$$b^2(\sqrt{x^2+y^2}-d)^2+d^2\{\cos\varphi\sqrt{x^2+y^2}-x\cos\varphi-y\sin\varphi\}$$
$$=b^2(d\cos\varphi+x\cos\varphi+y\sin\varphi)^2.$$

Rendons cette équation homogène en sin φ et cos φ en multipliant le premier terme par $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi$, et écrivons la quatrième équation sous la forme $\frac{\sin\varphi}{y}=\frac{\cos\varphi}{x}$; l'élimination s'achèvera en remplaçant respectivement sin φ et cos φ par y et x.

Il vient alors

$$b^2(\sqrt{x^2+y^2}-d)^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)+$$
$$d^2\cos\varphi\{\sqrt{x^2+y^2}$$
$$-x\cos\varphi-y\sin\varphi\}$$
$$=b^2\{d\cos\varphi+x\cos\varphi+y\sin\varphi\}$$

et par suite l'équation du lieu sera

$$b^2(\sqrt{x^2+y^2}-d)^2(x^2+y^2)+d^2\{x\sqrt{x^2+y^2}-(x^2+y^2)\}^2$$
$$b=^2\{dx+x^2+y^2\}^2$$

Il ne reste plus qu'à rendre cette équation rationnelle, et à construire la courbe qu'elle représente. On peut aussi, pour cela, passer aux coordonnées polaires, ce qui donne

$$b^2(\rho-d)^2\rho^2+d^2\{\rho^2\cos\omega=\rho^2\}^2=b^2(d\rho\cos\omega+\rho^2)^2$$

ou $\quad b^2(\rho-d)^2+d^2\rho^2(1-\cos\omega)^2=b^2(d\cos\omega+\rho)^2;$

c'est-à-dire

$$d^2\rho^2(1-\cos\omega)^2-2b^2d\rho(1+\cos\omega)+b^2d^2\sin^2\omega=0$$

ou $\quad d\rho^2(1-\cos\omega)^2-2b^2\rho(1+\cos\omega)+b^2d\sin^2\omega=0.$

Nous laissons au lecteur le soin de construire cette courbe.

On obtiendrait de la même manière le lieu des sommets réels des hyperboles ayant un foyer commun, un point commun et même longueur de l'axe non transverse.

QUESTIONS PROPOSÉES

Mathématiques élémentaires.

389. — On considère un cercle Δ et un diamètre AB de ce cercle; ayant pris sur AB, entre les points A et B, un point fixe C, on trace, du même côté du diamètre, deux droites rencontrant le cercle aux points D, E. On suppose ces droites mobiles, mais à chaque instant symétriques par rapport à la perpendiculaire CZ au diamètre AB; enfin on mène aux points D,E, les tangentes au cercle Δ, tangentes qui se rencontrent au point F. On propose de démontrer les propriétés suivantes de la figure ainsi formée :

1° Le quadrilatère CDEF est inscriptible.

2° Le lieu centre du cercle circonscrit à ce quadrilatère est une droite.

3° Le lieu décrit par le point F est une droite.

4° La droite DE passe par un point fixe.

5° Le triangle CDE est maximum quand il est rectangle.

6° Le lieu décrit par le point de concours des droites AD, BE est une droite.

N. B. — *On insérera, de préférence, la rédaction qui, à la solution demandée, ajoutera le plus de remarques intéressantes sur la figure qui est considérée dans cet énoncé.* (De Lonchamps.)

390. — Dans un parallélogramme ABCD, on mène, par un sommet A une sécante qui coupe BC en E, et DC en F. Démontrer que, quelle que soit la direction de la sécante, on a

$$BE \times DF = \text{const.}$$

391. — Calculer les éléments d'un trapèze inscrit dans un cercle connaissant un angle et la surface.

392. — Deux cercles étant donnés, et ω étant un centre de similitude inverse, une droite AC tourne autour de ω; on mène les tangentes en A et C, qui ne sont pas des points homologues, trouver le lieu du point de rencontre de ces tangentes.

393. — On considère un triangle ABC, et sur la base BC

de ce triangle, on prend un point M; par ce point on fait passer un cercle Δ tangent à AB au point B, et un cercle Δ' tangent à AC au point C. On demande de démontrer :

1° Que si le point M est le point de contact du cercle inscrit au triangle, les deux cercles Δ et Δ' ont une tangente commune parallèle à BC et égale à la moitié de BC;

2° Que si le point M est le milieu de BC, les deux cercles Δ et Δ' sont vus du point A sous le même angle;

3° Que si le point M est le symétrique du pied de la hauteur par rapport au milieu de BC, la ligne des centres est parallèle à BC;

4° Que si le point M est le symétrique du pied de la bissectrice par rapport au milieu de BC, les deux cercles sont égaux.

Étudiant en particulier cette dernière figure, on fera voir qu'elle jouit des propriétés suivantes :

I. Les deux cercles Δ, Δ' se coupent sur la bissectrice de l'angle BAC.

II. Les deux cercles se coupent sous un angle égal à l'angle BAC.

III. Si par le point M on mène des cordes parallèles aux côtés du triangle, savoir : dans Δ une corde parallèle à AC et dans Δ' une corde parallèle à AB, ces cordes sont égales et leur longueur commune est AC—AB.

(G. de Longchamps.)

Mathématiques spéciales.

394. — On considère une ellipse rapportée à ses axes, et deux points A, B, sur cette courbe. La tangente en A rencontre l'axe Ox en un point α, et la normale en A rencontre le même axe Ox en un point α'; soient de même β, β' les points analogues relatifs au point B et à l'axe Oy. Démontrer : 1° que la droite $\alpha'\beta'$ passe par le point de rencontre de la parallèle à Oy menée par le point A et de la parallèle à Ox menée par le point B; 2° que la droite $\alpha'\beta'$ est perpendiculaire sur la droite $\alpha\beta$. (G. L.)

395. — Par un point P (α,β), extérieur à une ellipse, on mène les deux tangentes PA et PB à cette ellipse. Par le point I, intersection des normales menées en A et B, on

mène les deux autres normales IC et ID; enfin, aux points C et D, qui sont les pieds sur la courbe de ces deux dernières normales, on mène les tangentes CM, DM, qui se rencontrent en M. On demande : 1° d'exprimer les coordonnées du point M en fonction de celles du point P; 2° de trouver l'équation du lieu du point M quand le point P se déplace de façon que les premières normales AI et BI fassent entre elles un angle droit.

396. — Étant donnée une conique, autour d'un point fixe P de son plan, on fait tourner une sécante PDD', et on joint un foyer F aux points D et D' où cette droite rencontre la courbe. Démontrer que l'on a

$$\operatorname{tg} \frac{PFD}{2} . \operatorname{tg} \frac{PFD'}{2} = \text{const.}$$

397. — Étant donnés trois points dans un plan, on considère toutes les hyperboles équilatères passant par ces trois points, et de l'un des points donnés on mène des perpendiculaires sur les asymptotes de toutes ces hyperboles; on demande le lieu des pieds de ces perpendiculaires.

398. — Étant données deux paraboles situées, l'une dans le plan des zx, l'autre dans le plan des yz, et ayant deux points communs situés sur oz, on demande de trouver le lieu des centres des surfaces du second degré qui contiennent ces deux paraboles. Séparer sur ce lieu les portions qui répondent aux divers genres de surfaces qui peuvent contenir les deux paraboles données.

BIBLIOGRAPHIE

Notions sommaires et élémentaires de mécanique rationnelle, *à l'usage des candidats à l'École forestière, à l'École navale, au Baccalauréat ès sciences, etc., par* M. **Pimet**, *capitaine d'artillerie, inspecteur des études à l'École polytechnique. — Paris, librairie Garnier frères.*

Voici donc un traité élémentaire de mécanique qui commence d'une manière logique! La première partie de ce petit ouvrage contient l'étude de la cinématique, et, sans cependant employer le calcul infinitésimal, arrive à nous donner des notions précises sur la manière dont on passe de l'espace à la vitesse, et inversement. L'étude des mouvements simultanés amène l'auteur à des consi-

dérations très élémentaires et du reste fort courtes sur le mouvement curviligne en général, et sur l'accélération totale et ses deux composantes.

Après avoir ainsi étudié le mouvement en lui-même, l'auteur aborde la statique, faisant dériver la composition des forces instantanées, les seules que l'on considère dans cette partie du cours, de la composition des vitesses; puis, après avoir étudié les moments en général, il s'occupe du principe du travail virtuel. C'est au moyen de ce principe, si fécond, que l'auteur peut présenter simplement et rigoureusement les conditions d'équilibre dans les différents cas utiles à considérer; ce principe servira plus loin à l'auteur pour étudier les conditions d'équilibre des machines simples. Mais avant de considérer les machines, M. Pinet s'est occupé de la détermination de l'équilibre d'un polygone funiculaire. Enfin, la statique est terminée par l'étude des résistances passives.

La dynamique contient les relations entre les forces et leur accélération sur les corps; l'auteur, à ce sujet, indique rapidement comment on peut déterminer les équations d'un mouvement. Puis, après avoir défini la quantité de mouvement et la force vive, il énonce le théorème de d'Alembert, et le théorème général des forces vives. Enfin l'ouvrage se termine par l'étude du travail, par l'importante question de la transmission du travail dans les machines, et par l'impossibilité du mouvement perpétuel.

Nous avons tenu à donner de ce petit ouvrage une analyse détaillée, par suite des qualités précieuses qui nous ont frappé dans ces notions sommaires; nous croyons pouvoir assurer que ceux de nos lecteurs qui voudront bien lire les deux cents pages dont se compose ce livre, trouveront qu'il ouvre une nouvelle voie à l'enseignement de la mécanique dans les classes de mathématiques élémentaires, et que cette voie nouvelle contient un perfectionnement sérieux dans la manière de présenter cette partie du programme. A. M.

Traité de géométrie descriptive. — *Deuxième partie comprenant les cônes et cylindres, la sphère et les surfaces du second degré, par M.* **Javary**. — *Paris, librairie Delagrave.*

Lors de l'apparition de la première partie de cet ouvrage nous avons signalé les qualités remarquables que nous y avons reconnues, au point de vue de la préparation à l'École polytechnique. Nous avons exprimé notre pensée en disant que l'ouvrage de M. Javary donnait satisfaction au désir exprimé par M. Mannheim dans la préface de son cours de l'école, que les élèves fussent bien au courant des éléments de la science qu'ils auront à étudier à fond plus tard. La seconde partie, qui parait aujourd'hui, vient confirmer notre opinion. M. Javary ne laisse de côté aucun détail, ne passe à côté d'aucune difficulté sans la signaler; il a étudié les particularités les plus intéressantes que présente chaque problème, et donne même l'étude de certaines questions importantes, sur lesquelles on ne fait que passer dans les cours en général. Nous allons le prouver facilement en analysant les divers chapitres dont se compose l'ouvrage.

La seconde partie du traité s'ouvre par des généralités sur les courbes et les surfaces; puis l'auteur étudie les plans tangents au cône et au cylindre, dans les différents cas, en considérant même le cas où l'on a deux surfaces distinctes, auxquelles on veut mener des plans tangents communs, ou des plans tangents parallèles; puis il passe à la sphère, à ses plans tangents, à ses sections planes et à l'intersection de deux sphères. — Signalons, en passant, un chapitre intéressant, où l'on considère la sphère comme surface auxiliaire.

Dans un autre chapitre, M. Javary considère les sections planes des cônes et des cylindres, et les développements de ces surfaces; l'auteur discute avec

beaucoup de détail les particularités que présente la transformée; puis il considère les plans diamétraux du cône et du cylindre, et les points singuliers à l'infini.

Les chapitres suivants contiennent ce qui est relatif à l'intersection de deux cylindres, de deux cônes, d'un cylindre et d'un cône. Les divers cas pouvant donner naissance à des branches infinies sont examinés, et accompagnés non seulement d'épures, mais encore de figures représentant soit ce qui reste de l'un des corps lorsque l'autre est enlevé, soit le solide commun; cette partie fort intéressante sera très instructive pour les élèves; c'est en effet l'un des points qui les embarrassent beaucoup dans les examens.

Dans les deux chapitres suivants, l'auteur étudie l'intersection de la sphère avec le cône ou le cylindre, et les principales propriétés des surfaces de révolution, ainsi que les plans tangents, les sections planes, et même les intersections par des cônes ou des cylindres.

Dans chacun de ces chapitres, on trouve, en passant, des énoncés de problèmes à résoudre qui constituent d'intéressants exercices et permettront aux élèves de voir mieux encore en cherchant par eux-mêmes, ce que l'auteur leur a développé précédemment.

Mais la partie la plus intéressante de l'ouvrage est celle qui termine le volume, et dans laquelle M. Javary s'occupe des surfaces du second ordre qu'elles soient de révolution ou à trois axes inégaux. Son étude même de l'hyperboloïde de révolution et du paraboloïde hyperbolique est plus complète qu'on ne la fait habituellement. Le grand charme de cette partie, à laquelle M. Javary a donné une certaine importance, puisqu'il lui consacre 240 pages, est que les élèves studieux pourront comparer ainsi, pour les surfaces du second ordre qui font partie du cours de géométrie analytique, les démonstrations géométriques à celles données par le calcul, et que, par l'examen des épures qui accompagnent le texte, ils pourront se représenter les surfaces qu'ils doivent étudier, ainsi que quelques-unes des courbes que peut présenter leur intersection; car l'ouvrage est terminé précisément par une étude de l'intersection de deux surfaces du second degré quelconques, au moins avec des dispositions particulières.

Nous pouvons, après avoir fait connaître ainsi les parties abordées par M. Javary dans ce nouvel ouvrage, qui complète son cours de géométrie descriptive pour l'École polytechnique, dire que l'impression que nous avait produite le premier volume n'a pas été détruite, loin de là; nous disions, en terminant l'analyse de cette première partie, que cet ouvrage prendrait, dès le début, sa place parmi les très bons ouvrages destinés à l'enseignement scientifique; notre opinion n'est nullement modifiée, et nous croyons que tout candidat à l'École polytechnique, vraiment désireux d'acquérir des notions solides sur la géométrie descriptive, et sur les surfaces du second degré, devra consulter l'ouvrage complet de M. Javary. A. M.

Le Rédacteur-Gérant.
J. KŒHLER.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 21726-1.

ÉTUDE ÉLEMENTAIRE

SUR LES MAXIMA ET MINIMA DE LA FRACTION DU SECOND DEGRÉ

Par M. **Aug. Morel.**

Les notes de M. Burat-Dubois sur les maxima et les minima (*), l'analyse que nous avons faite de ces notes, et de récents articles de M. Bourget sur ce travail ont ramené l'attention sur cette intéressante question, et nous nous proposons ici de présenter l'étude de la variation de la fraction du second degré sous une forme qui nous paraît mettre cette question à l'abri de toute objection. Ce petit article est rédigé après un entretien que nous avons eu, à ce sujet, avec M. de Longchamps et d'après quelques notes qu'il nous a communiquées. Nous avons aussi consulté avec fruit l'*Algèbre* de M. Lauvernay, que nous citons dans cet article.

1. — Nous rappellerons d'abord la définition des maxima et des minima, et nous dirons, avec la plupart des auteurs: qu'une fonction y, d'une variable indépendante x, passe par un maximum y', pour la valeur $x = x'$ de cette variable, si y' est plus grand que toutes les valeurs de y qui correspondent aux valeurs de la variable indépendante comprise entre $x' - \varepsilon$ et $x' + \varepsilon$, ε pouvant être pris aussi petit que l'on voudra. Cette définition ne suppose pas que y' soit fini; mais elle exige que x' soit fini; nous expliquerons tout à l'heure comment on peut considérer un maximum pour une valeur infinie de x. Cette définition suppose aussi que la fonction y soit BIEN DÉTERMINÉE DANS LE VOISINAGE DE x', c'est-à-dire que *aux valeurs de* x *choisies dans l'intervalle des*

(*) Note sur les questions de maximum et de minimum, — Règle pour déterminer le maximum et le minimum de la fraction $\dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$. Juillet 1881, *Pau, imprimerie Vignancourt.* — Réponse.

deux nombres x′ — ε *et* x′ = ε, *corresponde pour* y *une valeur toujours réelle*, ET UNIQUE, du moins dans le voisinage de y′. La fraction du second degré est d'ailleurs une fraction *bien déterminée pour toutes les valeurs de* x.

Nous supposons, dans ce qui va suivre, que les élèves ont été habitués à la représentation des fonctions de deux variables par la méthode des coordonnées rectangulaires, qu'on leur a défini la *fonction entière*, et démontré le principe fondamental : *si* $z = A + Bh + \ldots + Lh^m$,

z *étant une fonction entière de* h, A, B, … L *étant des constantes, ou des variables ayant dans tous les cas une limite finie, celle de* A *n'étant pas nulle, pour* h *très petit,* z *a le signe de son premier terme* A.

2. — Cela posé, soit $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$;

donnons à x une valeur $x + h$; appelons $y + k$ la valeur correspondante de y, nous aurons par un calcul évident (*):

$$k = h\,\frac{\delta x^2 - 2\delta' x + \delta'' + h(\delta x - \delta')}{(a'x^2 + b'x + c')\,[a'(x+h)^2 + b'(x+h) + c']}.$$

L'étude de la variation, celle du signe de k, en d'autres termes, dépend uniquement du signe du numérateur, le dénominateur étant, comme on le voit, un trinôme du second degré en k, et le terme indépendant de h étant

$$(a'x^2 + b'x + c')^2,$$

c'est-à-dire une quantité positive, si nous supposons que le nombre x dont il va être question n'est pas racine de l'équation $\quad a'x^2 + b'x + c' = 0,$

cas particulier que nous considérerons d'ailleurs tout à l'heure; h pouvant être supposé positif, le signe du numérateur dépend du signe de

$$\delta x^2 - 2\delta' x + \delta'' + h(\delta x - \delta'),$$

ou, pour h très petit, du signe du trinôme

$$T = \delta x^2 - 2\delta' x + \delta''.$$

3. — Nous poserons ici

$$\Delta = \delta'^2 - \delta\delta'',$$

(*) Nous posons pour abréger l'écriture : $\delta = ab' - ba'$; $\delta' = ca' - ac'$; $\delta'' = bc' - cb'$. (V. *Alg.* Lauvernay, p. 281.)

et nous ferons d'abord remarquer que le problème qui nous **occupe** est sans objet dans l'hypothèse de $\Delta = o$; en effet, **dans** ce cas particulier, on sait que les deux équations

$$ax^2 + bx + c = o$$
$$a'x^2 + b'x + c' = o$$

ont une racine commune α, et, suppression faite du facteur binôme $(x - \alpha)$ aux deux termes, on obtient la fonction

$$y = \frac{Ax + B}{A'x + B'};$$

on sait, et il est facile de le vérifier, que cette fonction est toujours croissante ou toujours décroissante suivant le signe de $AB' - BA'$; elle serait constante si l'on avait $AB' = BA'$. Ainsi, et dans tout ce qui va suivre, il est bien entendu que Δ *n'est pas nul.*

On doit donc distinguer, dans le *cas général* (et nous appelons ainsi celui où δ *n'est pas nul),* deux cas seulement.

1° $\Delta < o$; l'équation $T = o$ a ses racines imaginaires; le trinôme T conserve donc, quel que soit x, le signe de son premier terme; par suite k conserve toujours le même signe et la fonction varie toujours dans le même sens; la fonction n'a donc ni maximum, ni minimum; ou, si l'on préfère, les maxima sont *imaginaires.*

2° $\Delta > o$; l'équation $T = o$ a ses racines réelles, distinctes et finies; y admet un maximum et un minimum; la valeur correspondante de y n'est pas infinie, sauf dans un cas particulier, comme nous allons l'indiquer.

4. — *Dans l'hypothèse* $\Delta > o$, *il y a, pour des valeurs finies de* x, *un maximum et un minimum; les valeurs correspondantes de* y *ne sont jamais infinies en même temps; l'une de ces valeurs tout au plus peut être infinie; on peut dire que la courbe qui figure la fonction donnée présente à l'infini dans la direction* Oy *un point maximum, et ce cas singulier est caractérisé par ce fait que* LE DÉNOMINATEUR DE y EST UN CARRÉ PARFAIT.

En effet, pour qu'une des racines x de l'équation

$$\delta x^2 - 2\delta' x + \delta'' = o$$

donne pour y une valeur infinie, il est *nécessaire* que le dé-

nominateur de y s'annule pour cette valeur de x; d'ailleurs, y étant une fraction non simplifiable (puisque Δ n'est pas nul), si le dénominateur s'annule, le numérateur ne peut pas s'annuler en même temps, et la condition est *suffisante*. Cherchons donc si l'on peut avoir, pour une même valeur de x,

$$\delta x^2 - 2\delta' x + \delta'' = 0$$
$$a'x^2 + b'x + c' = 0$$

Il est alors nécessaire et suffisant que l'on ait

$$(\delta c' - a'\delta'')^2 + (\delta b' + 2a'\delta')(2\delta' c' + b'\delta'') = 0$$

ou, par une transformation très simple, qui a pour but de mettre en évidence le facteur $b'^2 - 4a'c'$:

$$(b'^2 - 4a'c')(\delta\delta'' - \delta'^2) + (a'\delta'' + b'\delta' + c'\delta)^2 = 0.$$

Il est du reste facile de voir que l'on a identiquement

$$a'\delta'' + b'\delta' + c'\delta = 0;$$

donc la relation devient

$$\Delta(b'^2 - 4a'c') = 0$$

et puisque Δ n'est pas nul, par hypothèse, on a enfin

$$b'^2 - 4a'c' = 0.$$

Ainsi, et dans le cas seulement où le dénominateur de y est carré parfait, il y a un point maximum à l'infini dans la direction Oy.

Ajoutons que les deux points maxima ne peuvent pas être tous les deux à la fois à l'infini dans la direction Oy: car il faut d'abord que le dénominateur de y soit carré parfait, et ce dénominateur ne peut alors s'annuler que pour *une seule valeur de* x; il faudrait donc que les racines de l'équation $\delta x^2 - 2\delta' x + \delta'' = 0$ fussent égales, ce qui donne comme condition $\delta'^2 - \delta\delta'' = 0$, ou $\Delta = 0$; et nous avons rejeté, une fois pour toutes, cette hypothèse.

5. — Il nous reste à examiner le cas particulier que nous avons réservé, celui où $\delta = 0$; la fonction qu'il faut discuter alors est $- 2\delta' x + \delta'' - h\delta'$, et l'on peut observer que δ' est différent de zéro; autrement comme on a $\Delta = \delta'^2 - \delta\delta''$, on en déduirait $\Delta = 0$, ce qui, encore une fois, ne peut être admis.

C'est ici que paraît se manifester la divergence d'opinion sur la manière d'interpréter ce cas particulier de $\delta = 0$.

Certains auteurs (Lauverney, p. 283; Burat-Dubois, brochure, p. 7) veulent qu'il n'y ait qu'un maximum ou un minimum; d'autres (Burat, *Algèbre*, p. 491; Bourget, *Journ. Math. 1881.*, p. 442) veulent qu'il y ait un maximum ET un minimum. M. Burat-Dubois donne à entendre que si l'on admettait le minimum pour x infiniment grand, il y aurait un maximum et deux minima; car il est impossible d'admettre, dit-il, que le minimum qui correspond à $x = -\infty$ soit le même que celui qui correspond à $x = +\infty$. Nous croyons qu'il y a, dans cette phrase, une interprétation défectueuse de la notion des valeurs infinies pour x, de même que nous n'admettons pas, *a priori* que $x = +\infty$ et $x = -\infty$ représentent le même point. Nous n'admettons pas que l'on fasse $x = \infty$; mais nous faisons *tendre* x *vers l'infini*, et par suite nous ne partageons pas l'avis de l'auteur, que la fonction prenne des valeurs différentes pour $x = +\infty$ ou pour $x = -\infty$.

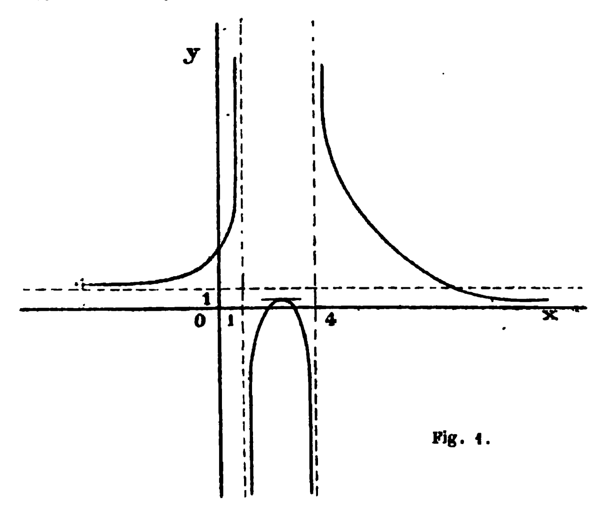


Fig. 1.

Pour mieux préciser notre pensée, nous allons prendre une fraction numérique dans laquelle δ soit égal à zéro;

par exemple celle considérée par M. Bourget (*Journ.* p. 442).

$$y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4};$$

ici, on a évidemment $\delta = 0$, et l'on est bien dans le cas particulier considéré.

Écrivons cette relation comme il suit :

$$x^2(y - 1) - 5x(y - 1) + 4y - 6 = 0, \qquad \text{(A)}$$

et considérons l'équation

$$x^2(y - 1) - 5x(y - b) + 4y - 6 = 0, \qquad \text{(B)}$$

dans laquelle b est très voisin de 1; la courbe qui correspond à cette équation a la forme ci-jointe (*fig. 1*).

Elle coupe la droite $y = 1$ en un seul point, donné par l'expression $x = \frac{-2}{5(1 - b)}$

et si b est plus grand que 1, ce point est à droite de Oy.

Nous sommes ici dans le cas général; il n'y a plus ni difficulté ni divergence dans l'interprétation des résultats; on ne peut que constater la présence d'un point maximum entre les parallèles $x = 1$, $x = 4$, et d'un point minimum pour une valeur de x supérieure à $\frac{2}{5(b - 1)}$, valeur qui est extrêmement grande et dépasse toute limite *si* b *diminue et tend vers* 1.

Si l'on suit la déformation de la figure, déformation qui accompagne cette variation de b, on voit que *le point minimum existe toujours, mais qu'il s'éloigne à l'infini vers la droite.* Si l'on supposait $b < 1$, mais croissant et se rapprochant de 1, on aurait une conclusion identique ; le point minimum serait seulement placé très loin de l'axe des y, l'ordonnée de ce point étant très voisine de 1, et tendant vers 1, *x étant négatif, mais très grand en valeur absolue;* la courbe qui correspond à l'hypothèse $b = 1$ a d'ailleurs la forme suivante (*fig. 2*), et nous croyons conforme à l'esprit mathématique de dire que *la fonction a un point maximum pour* $x = \frac{5}{2}$ *et un point minimum rejeté à l'infini dans les deux directions* ox *ou* ox', *à volonté;* mais nous croyons, quoique n'admettant pas cette manière de voir, qu'on peut dire aussi, comme l'ont avancé

certains auteurs, qu'il n'y a, dans ce cas, qu'un maximum C'est ainsi que, si l'on considère une équation du second degré

$$Ax^2 + Bx + C = o,$$

si l'on suppose $A = o$, l'équation n'admet plus *qu'une racine*,

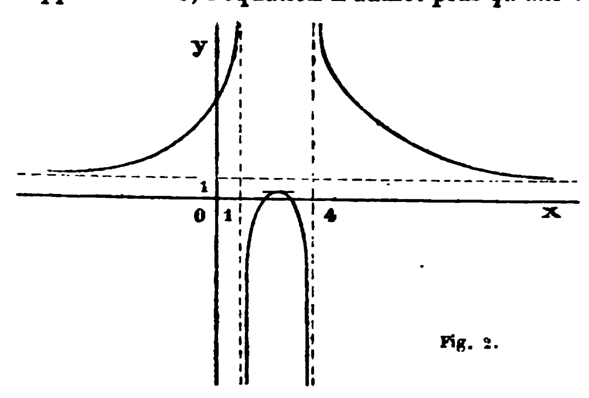


Fig. 2.

parce qu'elle se réduit à $Bx + C = o$; mais si l'on suppose A différent de zéro, *mais tendant vers zéro*, alors l'équation a toujours deux racines, dont l'une tend vers l'infini.

6. — Il nous reste à examiner si les deux points limites peuvent s'éloigner l'un et l'autre à l'infini. Et d'abord, il n'est pas possible, nous l'avons fait déjà remarquer, qu'ils soient tous les deux à l'infini dans la direction Oy ; ils ne peuvent pas, non plus, être tous les deux à l'infini dans la direction Ox, car l'équation

$$\delta x^2 - 2\delta' x + \delta'' = o \qquad (1)$$

ne peut avoir deux racines infinies que si l'on a simultanément $\delta = o$, $\delta' = o$, d'où l'on tire $\Delta = o$, ce qui n'est pas, par hypothèse.

Une seule question peut donc se poser: *Est-il possible que les deux points maximum et minimum s'éloignent l'un et l'autre à l'infini, l'un dans la direction* Ox, *l'autre dans la direction* Oy ?

Pour cela, il faut d'abord que l'on ait $\delta = o$, et, puisque δ' n'est pas nul, on tire de l'équation (1)

$$x = \frac{\delta''}{2\delta'}.$$

Il faut et il suffit que cette valeur finie de x donne pour y une valeur infinie, c'est-à-dire que le nombre $x' = \frac{\delta''}{2\delta'}$ soit racine de l'équation

$$a'x^2 + b'x + c' = 0.$$

On peut observer ici que la relation identique

$$a'\delta'' + b'\delta'' + c'\delta = 0$$

devient en supposant $\delta = 0$

$$a'\delta'' + b'\delta' = 0.$$

Donc $$x' = \frac{b'}{2a'},$$

ou $$2ax' + b' = 0.$$

Mais, puisque l'on a

$$a'x'^2 + b'x' + c' = 0,$$

on en tire $$b'^2 - 4a'c' = 0.$$

Donc il est nécessaire et suffisant que le dénominateur soit carré parfait.

D'après cela, tous les exemples numériques correspondant à la forme $$y = \frac{ax^2 + bx + c}{(2ax + b)^2}$$

où a, b, c sont quelconques, mais a est différent de zéro, donneront cette singularité d'un point maximum ou minimum à l'infini vers Ox, et d'un autre à l'infini vers Oy.

En résumé, étant donnée la fraction du second degré

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'},$$

on calcule les trois nombres

$$\delta = ab' - ba',$$
$$\Delta = (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb'),$$
$$K = b'^2 - 4a'c';$$

si le nombre Δ est nul, on est averti que la fraction donnée est simplifiable; si au contraire Δ n'est pas nul, le tableau suivant indique les différents cas qui pourront se présenter :

Cas général $\delta \lessgtr 0$	$\Delta > 0$	Les deux points limites sont à distance finie.
	$\Delta < 0$	Il n'y a pas de point limite réel.

Cas particulier $\delta = 0$ $\left\{ \begin{array}{ll} K \lessgtr 0 & \text{Un des points est à distance finie, l'autre à l'infini dans la direction } Ox. \\ K = 0 & \text{Les deux points limites sont à l'infini ; l'un dans la direction } Ox, \text{ l'autre dans la direction } Oy. \end{array} \right.$

En résumé: il y a toujours, dans le sens algébrique de ce mot, deux points maxima ou minima dans la fonction $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$, si l'on veut convenir que ces points sont réels, imaginaires ou rejetés à l'infini dans les différents cas que nous venons de définir.

THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE (*)

Par M. **Laurens**, professeur honoraire.

Soit un triangle ABC, *coupé par la transversale* A″B″C″. *On prend sur les trois côtés des points* α, α'; β, β'; γ, γ' *tels que*

$$C''\gamma^2 = C''\gamma'^2 = C''A \,.\, C''B$$
$$B''\beta^2 = B''\beta'^2 = B''A \,.\, B''C$$
$$A''\alpha^2 = A''\alpha'^2 = A''B \,.\, A''C$$

on obtient six points qui sont trois à trois en ligne droite, et trois à trois tels qu'en les joignant aux sommets opposés du triangle les trois droites concourent au même point.

En effet, si C″, B″, A″ sont les milieux des segments dont les extrémités divisent harmoniquement AC, BC, AC, on sait que l'on a $\dfrac{A\gamma^2}{B\gamma^2} = \dfrac{A\gamma'^2}{B\gamma'^2} = \dfrac{C''A}{C''B}$;

de même $\dfrac{A\beta^2}{C\beta^2} = \dfrac{A\beta'^2}{C\beta'^2} = \dfrac{B''A}{B''C}$;

$$\frac{B\alpha^2}{C\alpha^2} = \frac{B\alpha'^2}{C\alpha'^2} = \frac{A''B}{A''C}.$$

(*) Théorème proposé par M. G. de Longchamps (Voir le *Journal*, page 436).

Concevons trois circonférences ayant pour centres A, B, C et dont les rayons R, R′, R″ soient tels que

$$\frac{R^2}{R'^2} = \frac{C''A}{C''B}\,; \quad \frac{R'^2}{R''^2} = \frac{A''B}{A''C}.$$

La transversale A″B″C″ donnant

$$\frac{C''A}{C''B} \cdot \frac{A''B}{A''C} = \frac{B''A}{B''C}$$

on aura
$$\frac{R^2}{R''^2} = \frac{B''A}{B''C}.$$

Alors, les points γ et γ' divisant AB dans le rapport $\sqrt{\frac{C''A}{C''B}}$ ou $\frac{R}{R'}$, sont les centres de similitude des deux cercles R et R′; de même β et β', γ et γ' sont les centres de similitude des cercles R′ et R″, R et R″.

Or, on sait que les six centres de similitude de trois cercles pris deux à deux, sont trois à trois tels que les droites qui joignent ces points aux centres opposés concourent au même point, et aussi trois à trois en ligne droite, ce qui démontre le théorème.

EXAMENS ORAUX DE SAINT-CYR 1881

Une balle de sureau de poids P, suspendue par un fil au point fixe A, est repoussée par une boule O électrisée placée sur la verticale du point A; elle est en équilibre lorsque le fil fait un angle α avec la verticale; on demande l'intensité de la force de répulsion sachant que cette force varie en raison inverse du carré de la distance.

— On fait monter un corps pesant 500 kilog. le long d'un plan incliné de 30° à l'aide d'une corde qui s'enroule sur une poulie dont le rayon est de 20 centimètres et qui est mise en mouvement par une manivelle dont la longueur est de $1^m,50$. Quelle est la force qu'il faut appliquer au bras de la manivelle pour maintenir le corps en équilibre?

— On donne les projections de deux droites qui se coupent, et les projections d'un point quelconque. On demande le symétrique de ce point par rapport au plan des deux droites, sans construire les traces du plan.

— Construire la longueur donnée par la formule

$$x = \frac{a^2\sqrt{3}}{b\sqrt{2}}$$

— **Multiplier** $(\cos a + \sqrt{-1} \sin a)$ par $(\cos b + \sqrt{-1} \sin b)$; indiquer le résultat remarquable que l'on obtient.

— **Tirer** une relation géométrique connue de la relation

$$1 = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C.$$

— **Rendre** logarithmique l'expression

$$1 + \sin a + \cos a.$$

— **Dans** quelle direction doit-on lancer un corps ayant une vitesse donnée pour qu'il touche le plan horizontal dans le même temps que s'il tombait librement suivant la verticale?

— **Quelle** est la direction que prend un corps qui ne peut se mouvoir que dans le plan vertical du tableau et qui est sollicité par une force située dans un plan vertical faisant un angle α avec le plan du tableau, cette force étant inclinée d'un corps β sur le plan horizontal?

— **Une** barre cylindrique de 2^m pesant 150 kilog, s'appuie aux points O et M. En un point C distant de 80 cent. de M, on applique une force de 200 kilogr. Quelles sont les pressions en O et M ?

— **Construire** un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse et la différence des côtés de l'angle droit. On demande de trouver directement la somme des côtés de l'angle droit.

— **On donne** une demi-circonférence; à l'extrémité A du diamètre on mène la tangente AT, et on demande de mener par l'autre extrémité une sécante BCT, telle que la partie extérieure CT ait une longueur donnée.

— **Démontrer** que si, dans un triangle, on a

$$S = p(p - a)$$

le triangle est rectangle.

— **Construire** un carré, connaissant la différence entre la diagonale et le côté.

— **On** donne une corde AB, et du milieu C de l'arc AB, on mène une sécante CDE, rencontrant la corde en D, et la circonférence en E. Démontrer que le produit CD CE est constant.

— **On donne** un demi-cercle, on mène les tangentes aux deux extrémités du diamètre, et on demande de construire géométriquement une troisième tangente telle que la surface du triangle déterminé soit égale à celle d'un carré donné.

— **On** donne dans un cercle O une corde fixe AB, et un diamètre CD, qui coupe la corde au point E. Le diamètre CD tournant autour du centre O, on veut savoir si le rectangle $CE \times ED$ a un maximum et un minimum.

— **Démontrer** que, dans un parallélépipède circonscrit à une sphère, chaque arête est dans un rapport constant avec le sinus de l'angle formé par les deux autres.

— **Trouver** l'expression logarithmique de la somme

$$\sin a + \sin(a + h) + \sin(a + 2h) + \sin(a + 3h) + \ldots + \sin(a + nh).$$

— **Simplifier** l'expression $\dfrac{x^4 - 16}{x^3 + 2x^2 + 4x + 8}$.

— **En** un point d'une ellipse, on applique deux forces représentées en grandeur et en direction par les rayons vecteurs de ce point; trouver les conditions pour que le point soit en équilibre.

— **A** l'un des sommets d'un tétraèdre, on applique trois forces représentées

en grandeur et en direction par les trois arêtes issues de ce sommet. Montrer que la résultante passe par un point remarquable du tétraèdre, et trouver sa valeur.

— On projette un point A de l'espace sur une droite BC, mobile autour du point B dans le plan MN; on demande le lieu des points D, ainsi obtenus.

— Étant donné un triangle ABC, le transformer en un triangle isoscèle équivalent ayant son angle au sommet commun avec le précédent.

— Le triangle ABC étant rectangle, et AD étant perpendiculaire sur l'hypoténuse, on demande de calculer les rayons des cercles inscrits dans les triangles ABC, ADC, ADB, et de trouver une relation entre ces rayons.

— Quelles sont les conditions que doivent remplir les coefficients d'une équation bicarrée pour que les racines puissent être mises sous la forme d'une somme de deux radicaux simples?

— On mène deux tangentes communes à deux cercles qui se touchent extérieurement; connaissant les rayons R et R' des deux cercles, calculer l'angle α sous lequel se coupent les tangentes.

— Résoudre l'équation

$$x + 1 + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{a}{x-1}.$$

— Résoudre le système

$$x^3 + y^3 = a; \quad x + y = b.$$

Entre quelles limites doivent être renfermés a et b pour que le problème soit possible?

— Entre quelles limites peut varier x pour que l'on ait

$$\frac{ax - b}{a'x - b'} > 0.$$

— On a $\dfrac{\sin \alpha}{\sin (p - \alpha)} = m$; en déduire tg α.

— Soit R le rayon d'une sphère inscrite dans un cône droit dont l'angle au sommet est 2α; évaluer le volume du cône en fonction de R et de 2α.

— Deux nombres A et B, dont l'un A est plus grand que B, sont divisés successivement par leur différence A — B. Démontrer que les restes des deux divisions sont égaux et que les quotients diffèrent d'une unité.

— Résoudre $$\frac{x^2}{x^2 - 1} + \frac{x^2}{x^2 - 9} = 1.$$

— Trouver tous les diviseurs communs à trois nombres.

— Vérifier l'égalité $\cos 2\alpha = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} 2\alpha}$.

— Trouver la valeur de $\dfrac{\operatorname{tg} x}{1 - \cos x}$, lorsque x tend vers zéro.

— Vérifier l'égalité

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{\sin 2a}{1 + \cos 2a} + \frac{\cos a}{1 + \cos 2a}.$$

NOTE

SUR LA CLASSIFICATION DES PERMUTATIONS DE n OBJETS

Par M. **J. Bourget**.

Dans une note que contient l'année 1871 des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, j'ai donné le moyen de classer les permutations de n objets, en adoptant le système habituellement suivi pour les former. J'en ai tiré la solution de diverses questions intéressantes sur les dérangements. En réfléchissant de nouveau à cette question, j'ai été conduit à un autre mode de classification absolument différent du premier, que je me propose d'exposer dans cette nouvelle note.

1. — Pour fixer les idées, je me bornerai à considérer six objets que je désignerai par les chiffres :

$$1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Le *premier* arrangement d'où l'on part est formé par la juxtaposition de ces objets par numéros croissants.

Si on suppose faites toutes les permutations de ces six objets, elles peuvent se diviser en six groupes :

Le premier renfermant toutes les permutations commençant par 1 ;

Le second, les permutations commençant par 2 ; etc.

Le sixième, les permutations commençant par 6.

A la suite du premier objet se trouvent les cinq objets restants dans un certain ordre, donc il y a autant de résultats dans chaque groupe qu'il y a de permutations de cinq objets, donc : $P_6 = P_5 \cdot 6$;

et généralement $P_n = P_{n-1} \cdot n$;

d'où l'on déduit, comme on sait,

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n$$

et en particulier :

$$P_1 = 1,\ P_2 = 2,\ P_3 = 6,\ P_4 = 24,\ P_5 = 120,\ P_6 = 720.$$

Considérons l'un des groupes des permutations de six objets ; enlevons le premier objet de chaque permutation, il

restera la série des permutations des cinq objets restants. On peut classer aussi ces permutations en cinq groupes :

Le premier renfermant les permutations qui commencent par le premier des cinq objets restants classés par numéros croissants ;

Le second, les permutations qui commencent par le second objet, etc.;

Le cinquième, les permutations qui commencent par le dernier objet.

Considérons l'un quelconque de ces groupes ; enlevons le premier objet de chacune des permutations de cinq objets qu'il contient; il restera la série des permutations des quatre objets restants, qu'on peut classer d'une manière analogue.

En continuant ainsi nous arriverons aux permutations de trois objets, par exemple 2, 4, 6, qu'on peut classer en trois groupes par le premier objet, de la manière suivante :

246	426	624
264	462	642

Notre analyse classe les permutations en même temps qu'elle donne le moyen de les former régulièrement. Pour nous en convaincre, formons suivant cette méthode toutes les permutations de quatre objets. Ces permutations se divisent en quatre groupes contenus dans le tableau suivant :

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Nous pouvons maintenant résoudre divers problèmes :

2. — Problème I. — *Trouver une permutation de rang donné.*

1° Chaque groupe des permutations de six objets contient autant de termes qu'il y a de permutations de cinq objets, c'est-à-dire 120 ; donc si nous divisons ρ par 120, ce qui donnera

$$\rho = 120q + r, \tag{1}$$

nous en conclurons que la permutation demandée est dans le $(q+1)^e$ groupe, donc elle commence par le $(q+1)^e$ chiffre

de la suite (1, 2, 3, 4, 5, 6). D'un autre côté, puisque r est le reste de la division, la permutation demandée est la $(r)^e$ du groupe, en d'autres termes, elle correspond à la $(r)^e$ permutation des cinq éléments qui restent quand on enlève le premier élément de chacune des permutations de ce groupe.

Toutefois, pour que cette formule soit générale, il est à remarquer que r ne doit jamais être nul. Dans le cas où il devrait être nul, ou la division se ferait exactement, on diminuera le quotient d'une unité, et l'on posera

$$\rho = 120q + 120;$$

la permutation demandée fera toujours partie du $(q+1)^e$ groupe et sera la dernière du groupe.

Ainsi le quotient q sera l'un des nombres (0, 1, 2, 3, 4, 5), et le reste r l'un des nombres (1, 2 ... 120).

Nous sommes ramenés maintenant à trouver la r^e permutation de cinq objets.

2° Posons semblablement à ce qui a été fait ci-dessus :

$$r = 24q' + r', \qquad (2)$$

q' étant l'un des nombres (0, 1, 2, 3, 4), r' l'un des nombres (1, 2 ... 24).

Par un raisonnement semblable à celui qui vient d'être développé, nous dirons que la permutation demandée appartient au groupe $(q'+1)$; que, par suite, elle commence par le $(q'+1)^e$ des cinq objets considérés classés par numéros croissants. Nous voyons aussi qu'elle est la $(r')^e$ de ce groupe.

Mais si, de chaque permutation de ce groupe nous enlevons le premier objet que nous connaissons, il nous reste la série des permutations des quatre objets restants. Nous sommes ramenés à trouver la $(r')^e$ permutation de cette serie.

3° Posons
$$r' = 6q'' + r'' \qquad (3)$$

q'' étant l'un des nombres (0, 1, 2, 3) et r'' l'un des nombres (1, 2, 3, 4, 5, 6). Cette égalité nous apprend que la permutation cherchée appartient au groupe $(q''+1)$; que, par suite, elle commence par le $(q''+1)^e$ des quatre objets considérés. Elle nous montre en outre qu'elle est la $(r'')^e$ du groupe.

Mais si, de chaque permutation de ce groupe, nous enlevons le premier objet, il nous reste la série des trois objets

restants et il s'agit de déterminer la $(r'')^e$. Nous sommes ramenés à déterminer la $(r'')^e$ permutation de trois objets.

4° Nous poserons, en faisant la division de r'' par 2 :

$$r'' = 2 \cdot q''' + r''' \qquad (4)$$

q''' étant l'un des nombres (0, 1, 2) et r''' et l'un des nombres (1, 2). Cette égalité nous montre que la permutation demandée est du groupe $(q''' + 1)$, que par suite elle commence par le $(q''' + 1)^e$ des trois objets permutés. Elle nous montre en outre qu'elle est la $(r''')^e$ du groupe auquel elle appartient.

Mais si, de chaque permutation de ce groupe, nous enlevons le premier objet, il nous reste la série des permutations des deux objets restants. Il s'agit de trouver la $(r''')^e$. Nous voilà ramené à la recherche de la $(r''')^e$ des permutations de deux objets.

5° Posons enfin

$$r''' = 1 \cdot q'''' + (r'''' = 1) \qquad (5)$$

q'''' étant l'un des nombres (0, 1) et r'''' étant 1. Cette égalité nous fera connaître que le premier élément de la permutation cherchée est le $(q'''' + 1)^e$ des deux éléments considérés. Le dernier élément s'ensuivra.

On voit ainsi qu'après avoir établi les égalités (1), (2), (3), (4), (5), par suite après avoir déterminé les quotients (q, q', q'', q''', q''''), les nombres

$$(q + 1), \quad (q' + 1), \quad (q + 1), \quad (q''' + 1), \quad (q'''' + 1)$$

feront connaître les objets successifs qui composent la permutation de rang ρ:

$(q + 1)$ donnera le premier objet à prendre dans la suite (1, 2, 3, 4, 5, 6);

$(q' + 1)$ indiquera que le deuxième objet sera le $(q' + 1)$ de la série obtenue en barrant dans la suite (1, 2, 3, 4, 5, 6) le premier objet pris;

$(q'' + 1)$ indiquera que le troisième objet sera le $(q'' + 1)^e$ de la série obtenue en barrant dans la suite (1, 2, 3, 4, 5, 6) les deux premiers objets pris;

$(q'' + 1)$ indiquera que le quatrième objet sera le $(q''' + 1)^e$ de la série obtenue en barrant dans la suite (1, 2, 3, 4, 5, 6) les trois premiers objets pris;

$(q'''' + 1)$ indiquera que le cinquième objet sera le $(q'''' + 1)^e$ de la série obtenue en barrant dans la suite $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ les quatre premiers objets pris.

Le dernier objet restant terminera la permutation.

On voit ainsi qu'une permutation est déterminée aussitôt que les quotients $(q, q', q'', q''', q'''')$ sont déterminés, et ces quotients ne dépendent que de ρ.

EXEMPLE

Soit à déterminer la 638e permutation :

Nous avons dans ce cas :

$$\begin{aligned} 638 &= 120 \cdot 5 + 38 \\ 38 &= 24 \cdot 1 + 14 \\ 14 &= 6 \cdot 2 + 2 \\ 2 &= 2 \cdot 0 + 2 \\ 2 &= 1 \cdot 1 + 1 \end{aligned}$$

Les $q + 1$ seront ici successivement :

6, 2, 3, 1, 2

Le premier élément de la 638e permutation est 6;

Le second est le deuxième terme de la série (1, 2, 3, 4, 5) ou 2;

Le troisième est le troisième terme de la série (1, 3, 4, 5) ou 4;

Le quatrième est le premier terme de la série (1, 3, 5) ou 1;

Le cinquième est le deuxième terme de la série (3, 5) ou 5;

Le sixième est 3.

Donc la permutation demandée est :

624153

3. — PROBLÈME 2. — *Trouver le rang d'une permutation donnée.*

De la série des égalités :

$$\begin{aligned} \rho &= 120 \cdot q + r \\ r &= 24 \cdot q' + r' \\ r' &= 6 \cdot q'' + r'' \\ r'' &= 2 \cdot q''' + r''' \\ r''' &= 1 \cdot q'''' + 1 \end{aligned}$$

nous tirons

$$\rho = 120\,q + 24\,q' + 6\,q'' + 2\,q''' + q'''' + 1. \quad (6)$$

Or quand on connaît une permutation, on détermine facilement $q+1$, $q'+1$, $q''+1$, $q'''+1$, $q''''+1$,
par suite q, q', q'', q''', q'''';
donc aussi facilement ρ par la relation (6).

EXEMPLE

Soit à déterminer le rang de la permutation 526431.

On trouve sans peine en se reportant aux opérations du premier problème:

$$\begin{aligned} q + 1 &= 5 \text{ d'où } q = 4 \\ q' + 1 &= 2 \qquad q' = 2 \\ q'' + 1 &= 4 \qquad q'' = 3 \\ q''' + 1 &= 3 \qquad q''' = 2 \\ q'''' + 1 &= 2 \qquad q'''' = 1 \end{aligned}$$

donc

$$\rho = 120 \,.\, 4 + 24 \,.\, 2 + 6 \,.\, 3 + 2 \,.\, 2 + 1 + 1 = 552$$

4. — Problème 3. — *Trouver le nombre des dérangements d'une permutation donnée.*

En plaçant au premier rang l'élément $q+1$ de la série (1, 2, 3, 4, 5, 6), on produit q dérangements; c'est facile à voir.

En plaçant au premier rang des objets restants le $(q'+1)^{e}$, on produit de nouveau q' dérangements.

En plaçant au premier rang des objets restants, après la suppression des deux premiers objets, le $(q''+1)^{e}$, on produit encore q'' dérangements, etc.

Donc le nombre des dérangements d'une permutation sera

$$\Delta = q + q' + q'' + q''' + q''''.$$

Le maximum du nombre des dérangements sera pour n objets :

$$(n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

On pourrait se poser diverses questions analogues à celles que nous avons traitées dans notre premier article.

5. — Remarque. — Une question fort intéressante et qui

paraît simple au premier abord est celle-ci : *Trouver le rang des divers éléments d'une permutation déterminée par les quotients* (q, q', q'', q''', q''''). Je n'ai pas pu la résoudre et je la soumets à l'attention du lecteur. La première classification que j'ai donnée en 1871 ne se prête pas non plus à la solution de cette question.

CORRESPONDANCE

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE PAR M. **Laurens**, *professeur honoraire, à M. de Longchamps.*

.... En vous envoyant une solution du théorème que vous avez énoncé dans le journal (page 436), je vous soumets une question plus générale.

Si les trois côtés d'un triangle ABC *rencontrent deux droites quelconques,* MP, NR, *on a sur chaque côté quatre points. Si l'on détermine les points* α, α' *qui divisent harmoniquement les segments* BC, PR ; β *et* β', *divisant harmoniquement* AC, QS, *et* γ, γ', *divisant harmoniquement* AB, MN, *on a six points trois à trois en ligne droite, et trois à trois tels qu'en les joignant aux sommets opposés, les trois droites concourent au même point.*

La démonstration est fondée sur le même principe que la précédente ; elle exige seulement que l'on prouve d'abord que les milieux des distances $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ sont en ligne droite.

En étudiant les remarques que M. Kœhler a ajoutées à votre travail, j'ai rencontré ce théorème, qui a une grande analogie avec le précédent.

Si l'on joint les trois sommets d'un triangle ABC *à deux points* m, n *quelconques, ces points étant pris de telle sorte que les angles formés n'empiètent pas sur les angles du triangle, on obtient trois faisceaux de quatre droites ; les rayons doubles des trois faisceaux en involution sont au nombre de six ; quatre d'entre elles forment un quadrilatère ; les autres sont les diagonales de ce quadrilatère. On sait d'ailleurs que les six points de rencontre des droites passant par* m *et* n *avec les côtés du triangle sont sur une conique, et que les six droites passant par ces points forment un hexagone circonscrit à une conique.*

Voudriez-vous me permettre d'ajouter un mot relativement à votre élégante solution ? Ayant déterminé le point de rencontre des tangentes aux points A et B de votre figure, ou simplement, la direction *ox* de l'axe de la parabole, ainsi que les points de contact DD', on complète aisément la solution, en abaissant de D une perpendiculaire sur le diamètre, et déterminant le point de la parabole situé sur cette droite, ce qui est très facile ; le milieu de cette ligne donne l'axe, et à cause des tangentes connues, on a le sommet.

En étudiant votre solution, j'ai remarqué que le pôle de AB était sur la droite qui joint D au conjugué harmonique de M par rapport à AB, et aussi sur la droite qui joint D' au conjugué harmonique de M' par rapport à AB ; mais cette remarque n'a aucun avantage graphique pour déterminer dans le

parabole le pôle de AB ; votre construction fondée sur la propriété de la sous-tangente est préférable.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. **Lemoine**.

La question 375 du *Journal de Mathématiques* a un petit historique, que voici : c'est la question 97 des *Nouvelles Annales de mathématiques* (1re série, tome IV, 1845) proposée par Prouhet :

Couper un triangle par une transversale de manière que trois segments non consécutifs soient égaux.

Le tome VI, page 398, en contient une solution qui est fausse.

Le tome VII, page 424, donne une note rectificative, très peu claire, qui me paraît fausse aussi ; la question en est restée là, à ma connaissance ; en tous cas, je ne crois pas qu'il y ait eu de solution géométrique.

Voici une construction simple :

1. Il y a toujours douze droites distinctes répondant à la question.

2. Six d'entre elles coupent deux des côtés entre les sommets ; les six autres ne coupent aucun des côtés entre les sommets.

3. Les points où ces droites coupent les côtés sont deux à deux symétriques par rapport aux milieux de ces côtés. Il suit de là que les douze séries de trois segments égaux interceptés par ces droites ne donnent lieu, pour les segments égaux, qu'à *six longueurs différentes* au lieu de douze, car chaque couple formé par deux droites, coupant les côtés en des points symétriques par rapport au milieu de ces côtés, donne des segments de longueurs égales.

CELA POSÉ, *soient :*

ABC *un triangle ;*

H *le point où la perpendiculaire élevée au milieu de* AC *coupe la bissectrice de l'angle* CAB ;

K *le point où la perpendiculaire élevée au milieu de* CB *coupe la bissectrice extérieure de l'angle* BCA ;

Le segment capable de l'angle $\frac{B}{2}$ *décrit sur* HK *rencontre* AC *en deux points* M *et* N (M *situé entre* A *et* C, N *à l'extérieur*) *qui appartiennent chacun à l'une des douze droites cherchés* (*).

On construit alors immédiatement deux de ces droites, et deux autres coupant les côtés AC aux points symétriques des précédents par rapport au milieu de AC.

Deux constructions analogues appliquées respectivement aux angles B et A et aux angles C et B donnent les huit autres droites.

Remarque I. — La ligne KC coupe le segment capable décrit sur HK et contenant M et N en un point J tel que si l'on prend le point I de rencontre de KJ et de AC, on a CI = CB.

Remarque II. — Le cercle qui passe par H, K, et par le centre du cercle ex-inscrit tangent au côté B et C est le symétrique, par rapport à AK du cercle HKNJM.

M. Burat-Dubois nous adresse une brochure qu'il vient de publier en réponse à l'article de M. Bourget paru dans le numéro d'octobre (p. 442);

(*) Nous invitons nos lecteurs à nous démontrer cette construction intéressante. (*Note de la rédaction.*)

dans cette brochure, que l'impartialité nous fait un devoir de signaler, l'auteur combat la convention faite par M. Bourget, que $x = +\infty$ et $x = -\infty$ représentent le même point, convention qui sert de base à l'article que nous avons inséré, et qui amène M. Bourget à dire qu'il a toujours un maximum et un minimum, en admettant l'existence d'un point maximum ou minimum à l'infini; nous aurions analysé avec plus de détails la brochure que nous venons de recevoir, si nous n'avions publié, dans le numéro actuel, un article qui, nous l'espérons, terminera cette querelle, en indiquant d'où provient la divergence dans les résultats. Il n'y a, à notre avis, dans tout ceci qu'une contradiction apparente, contradiction prenant sa source dans une difficulté de forme dont nous devons dire un mot, qui n'est d'ailleurs que l'expression d'idées généralement admises.

Si, dans une équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = o,$$

on suppose que b n'est pas seul, et si l'on fait *brutalement*, pour ainsi dire, $a = o$, l'équation tombe *brusquement* au premier degré, et nous croyons contraire à l'esprit mathématique de dire qu'une équation du premier degré $bx + c = o$ a une racine finie *et une autre infinie*. On ne tarderait pas à tomber dans les contradictions les plus singulières. C'est ainsi que M. Lefébure de Fourcy, dans son *Algèbre* (p. 153, 7e édition) arrive à cette conclusion que nous citons textuellement : « Il est digne de remarque qu'on ait pour ce cas particulier trois valeurs de x, tandis que dans le cas général, il n'y en a que deux » Il n'y a pas de raison pour s'arrêter dans cette voie anti-mathématique, si on veut nous passer cette expression, et l'on arriverait facilement à considérer l'équation $bx + c = o$ comme ayant autant de racines infinies que l'on voudrait. Aussi, et nous n'avons pas la prétention d'apprendre par là quoi que ce soit à personne, ne doit-on pas dire et ne dit-on pas, si ce n'est par une mauvaise habitude : « Je fais $x = o$ ou $x = \infty$ », et M. Burat-Dubois (p. 10) le fait très justement observer. Il faut toujours supposer, quand on veut songer à l'infini, une quantité numérique qui dépasse tout nombre connu ou imaginé. Inversement, car les deux idées sont corrélatives, le zéro absolu n'est pas un nombre; et pour le concevoir, il faut imaginer un nombre, insaisissable d'ailleurs, mais qui possède cette propriété lui servant de définition, qu'on ne peut pas penser à un nombre positif, si petit soit-il, qui ne lui soit supérieur. Ce sont là des discussions métaphysiques, plutôt que mathématiques; elles ont occupé, elles occuperont encore les philosophes; mais elles touchent à l'enseignement par un point qui est délicat, puisqu'il a soulevé les discussions et motivé les articles que nous venons de rappeler. Elles ont attiré notre attention sur cette question élémentaire, et nous ont amené à publier plus haut un article dans lequel nous nous sommes efforcé de présenter cette question sous un jour que nous avons cherché à rendre bien clair et à l'abri d'objections qui, encore une fois, tombent bien plus sur les mots et sur les définitions que sur les choses elles-mêmes.

Disons enfin, pour terminer, que, en réalité, l'étude de la fraction du second degré telle qu'on la fait ordinairement, n'est pas, à proprement parler, une question de maximum; on fait varier x en lui donnant des valeurs *réelles toujours croissantes*, on prend les valeurs correspondantes de y, et on en cherche les variations; inversement on cherche quelles valeurs il faut *donner à* y, *pour que* x *soit réel;* on trouve que, en général, à chaque valeur de y correspondent deux valeurs différentes de x, et qu'il y a *deux valeurs limites de* y, à chacune desquelles correspond *une valeur réelle et une seule pour* x, ce sont ces valeurs que l'on appelle les valeurs maxima et minima de la fonction

y, sans dire si cette manière de parler éveille bien l'idée que les mêmes dénominations feront naître plus tard; M. Burat-Dubois avait signalé ce fait dans la première note, et c'est en cela, selon nous, que la méthode dite *indirecte* laisse à désirer; elle résout une question intéressante en elle-même, mais qui n'a qu'un rapport éloigné avec les questions de maximum.

QUESTION 333

Solution par M. Andrieu, élève au Lycée Corneille, à Rouen.

M *et* M' *étant des points d'une parabole,* P *le point de concours des tangentes en ces deux points,* F *le foyer, démontrer que l'on a*

$$\frac{\overline{PM}^2}{MF} = \frac{\overline{PM'}^2}{M'F}.$$

Existe-t-il un théorème analogue pour l'ellipse et l'hyperbole? (Le lecteur est prié de faire la figure).

Par le point P et le point M, menons des parallèles à l'axe de la parabole; on a entre les angles les égalités suivantes $PMB = MPA = PMF = M'PF$
et on sait que PF est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs FM et FM'. Les triangles MPF et M'PF sont donc semblables et donnent

$$\frac{PM}{MF} = \frac{PM'}{PF},$$

$$\frac{PM}{PF} = \frac{PM'}{M'F}.$$

Par suite

$$\frac{\overline{PM}^2}{MF} = \frac{\overline{PM'}^2}{P'F}.$$

Considérons maintenant une ellipse; abaissons des foyers F et F' les perpendiculaires FA, FB, F'A', F'B' sur les tangentes PM et PM'. On a évidemment

$$\frac{PM \times FA}{MF \times PF \sin MPF} = \frac{PM' \times FB}{M'F \times PF \sin PFM'};$$

mais comme PF est bissectrice de MFM', cette proportion devient

$$\frac{PM \times FA}{MF} = \frac{PM' \times FB}{M'F}.$$

On aurait de même en considérant les triangles PF'M et PF'M'

$$\frac{PM \times F'A'}{MF'} = \frac{PM' \times F'B'}{M'F'};$$

multipliant membre à membre et remarquant que

$$FA \times F'A' = FB \times F'B' = b^2,$$

on a
$$\frac{\overline{PM}^2}{MF \times MF'} = \frac{\overline{PM'}^2}{M'F \times M'F'}.$$

La démonstration de ce théorème pour l'hyperbole se ferait d'une manière analogue.

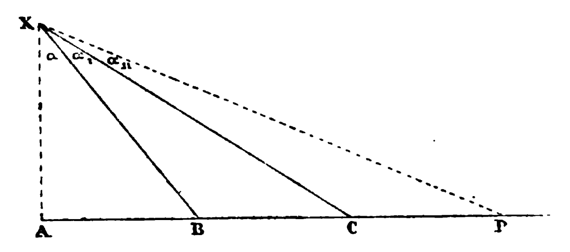
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Boulogne, à Lille ; Jourdan, à Rouen ; Petit, Dupuy, à Grenoble ; Goulard, au lycée Louis-le-Grand.

QUESTION 346

Solution par M. Ch. Fiévet, au Lycée de Lille.

Sur une droite à partir d'un point A *on prend des longueurs égales à la suite les unes des autres; au point* A *on élève une perpendiculaire* AX, *et l'on joint* X *aux divers points de division. Trouver une relation entre les angles sous lesquels on voit du point* X *les divers segments* AB, BC, CD. . . .

Soit α l'angle AXB. On voit que AB est la tangente de α,



que AC ou $2\,\text{tg}\,\alpha$ est la tangente de $\alpha + \alpha'$, par conséquent on a
$$\text{tg}\,(\alpha + \alpha') = 2\,\text{tg}\,\alpha;$$
d'où
$$\text{tg}\,\alpha' = \frac{\text{tg}\,\alpha}{1 + 2\,\text{tg}^2\alpha}. \qquad (1)$$

On aura de même
$$\text{tg}\,(\alpha + \alpha' + \alpha'') = 3\,\text{tg}\,\alpha;$$
d'où
$$\text{tg}\,\alpha'' = \frac{\text{tg}\,\alpha}{1 + 2.3\,\text{tg}^2\alpha}. \qquad (2)$$

On aurait de même

$$\operatorname{tg} \alpha'' = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + 3.4 \operatorname{tg}^2 \alpha} \qquad (3)$$

et ainsi de suite.

En comparant les formules (1), (2), (3) on reconnaît que la tangente d'un rang quelconque p est égale à la tangente du premier angle α divisée par l'unité augmentée du produit du carré de la tangente de l'angle primitif α par $p(p+1)$.

On aura ainsi

$$\operatorname{tg} \alpha_p = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + p(p+1) \operatorname{tg}^2 \alpha} .$$

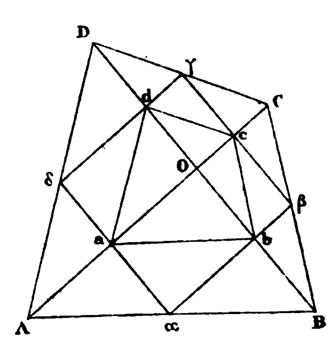
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Joly, à Tarbes ; La Chesnais, à Saint-Louis ; Henry, à Bréchaincourt ; Vigy, à Vitry-le-François.

QUESTION 349

Solution par M. A. Prevost, élève au Lycée du Mans.

Dans tout quadrilatère, les diagonales coupent les côtés du parallélogramme maximum inscrit aux sommets d'un deuxième quadrilatère, inscrit dans le parallélogramme, semblable au quadrilatère donné et égal au quart de ce premier quadrilatère.

Soit ABCD le quadrilatère donné ; $\alpha\beta\gamma\delta$ le parallélogramme maximum inscrit (ce parallélogramme est comme l'on sait, celui obtenu en joignant les milieux des côtés du quadrilatère). Soit enfin le second quadrilatère $abcd$.



Nous remarquerons d'abord que a est le milieu de AO ; de même que b, c, d sont les milieux respectifs de BO, CO, DO. Par suite ab est parallèle à AB et égale à sa moitié. De même ad et AD sont parallèles, et par suite les angles en A et a sont égaux. Il en est de même pour les autres angles.

Donc le quadrilatère *abcd* est semblable au quadrilatère ABCD. Le rapport de similitude étant $\frac{1}{2}$,

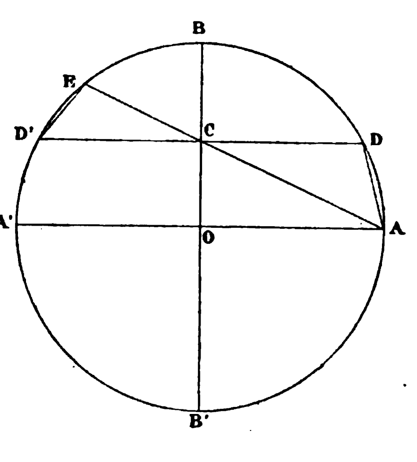
on a $$\frac{abcd}{\text{ABCD}} = \frac{1}{4}.$$

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Gino-Loria, à Mantoue; Hoover, à Dayton (États-Unis); Debray, à Chauvency-Saint-Hubert; Henry, à Bréchincourt; Fievet, à Lille; La Chesnais, au lycée Saint-Louis; Joly, à Tarbes; Vigy, à Vitry-le-François.

QUESTION 351

Solution par M. BARON, élève au Lycée Henri IV.

On donne un cercle O, *deux diamètres rectangulaires* AA', BB'. *Trouver sur* OB *un point* C *tel qu'en joignant* AC *et en menant* DCD' *parallèle à* AA', *le prolongement de* AC *partage l'arc* BD' *en deux parties égales.*



Les triangles D'EC, CDA étant semblables on a

$$\frac{\text{ED}'}{\text{DA}} = \frac{\text{D}'\text{C}}{\text{DC}} = 1.$$

Donc les trois arcs AD', D'E, EB sont égaux et la corde de l'arc D'EB égale le rayon du cercle.

Dès lors les triangles rectangles D'BC, D'CO sont égaux et BC = OC. Donc C est le milieu du rayon OB.

BIBLIOGRAPHIE

COURS D'ARITHMÉTIQUE *à l'usage des aspirants au baccalauréat ès sciences et des candidats aux écoles du Gouvernement par M.* **Combette,** *professeur au Lycée Saint-Louis.* — Paris, librairie Germer-Baillière.

Ce Cours d'arithmétique, que nous avons lu avec beaucoup de plaisir, nous a immédiatement frappé par un caractère qui le distingue de la plupart des ouvrages classiques que nous possédons sur ce sujet: on sent que l'auteur a professé son cours avant de l'écrire, et qu'il s'est parfaitement pénétré de toutes les exigences des examens; aussi avons-nous trouvé dans cet ouvrage les questions qui se demandent constamment dans les concours pour l'École de Saint-Cyr, l'École polytechnique et l'École navale, principalement ces questions souvent si délicates, relatives à la théorie élémentaire des nombres ; de plus, nous y avons vu figurer avec plaisir des théorèmes, tels que les théorèmes de Fermat et de Wilson, qui devraient être inscrits dans les programmes. L'auteur a indiqué, au moyen d'astérisques, les parties qui s'adressent plus particulièrement aux candidats de l'École Polytechnique, ce qui lui a permis de laisser ces compléments à la place même que la théorie leur indique.

Les candidats à l'École forestière consulteront avec fruit les chapitres relatifs aux anciennes mesures françaises et à leur conversion en mesures nouvelles, question qui revient assez souvent dans les examens de cette école. Nous devons signaler comme particulièrement intéressant le chapitre sur le calcul des nombres incommensurables et le calcul des radicaux, et tout un livre consacré à l'étude des approximations numériques et des erreurs relatives. Nous croyons que, après avoir lu attentivement cette partie de l'ouvrage de M. Combette, les élèves seront en état de résoudre les principales questions qui se rapportent à cette théorie si délicate et si importante du calcul des nombres approchés. Enfin les nombreux problèmes qui accompagnent les différents livres de ce cours d'arithmétique en augmentent encore l'intérêt par leur choix judicieux qui a consisté, dans bien des cas, à énoncer des théorèmes servant de complément aux questions développées par l'auteur.

COURS D'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE, *à l'usage des aspirants au baccalauréat ès sciences et des candidats aux écoles du Gouvernement par M.* **Combette,** *professeur au Lycée Saint-Louis.* — Paris, librairie Germer-Baillière.

Ce nouvel ouvrage de M. Combette possède les mêmes qualités que nous avons si fort appréciées dans son *Arithmétique*. Comme le précédent ouvrage, il est évident que l'*Algèbre* est le cours même du professeur. Il contient beaucoup de choses, et quelques personnes même sont tentées de trouver qu'il contient trop de choses; mais c'est précisément, selon nous, ce qui fera le succès de cet ouvrage. Ce livre, si substantiel, acquerra bientôt une réputation. Il sera lu avec intérêt non seulement en France, mais aussi à l'étranger. Les élèves studieux et plus d'un professeur consulteront avec fruit un livre qui marque un progrès considérable dans l'enseignement des mathématiques élémentaires, et qui précède même peut-être un peu le mouvement moderne. Quelques personnes lui reprocheront d'être au-dessus de l'enseignement général

et de ne pas avoir assez de souci de la lettre des programmes; c'est, à nos yeux, son réel mérite, et le titre qu'il nous paraît avoir à un succès qui sera très grand.

A. M.

NOTE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Par M. H. Le Pont, élève au Lycée Saint-Louis.

I. — Sur les Courbes $y^m = mpx^n$.

Considérons la courbe donnée par l'équation

$$y^m = mpx^n \qquad (1)$$

où nous supposons toujours $m - n > 0$.

En formant l'équation d'une tangente, et en exprimant qu'elle passe par un point $(x_0\, y_0)$, nous obtenons la condition

$$np(x - x_0)\, x^{n-1} = (y - y_0) y^{m-1} \qquad (2)$$

x et y désignant les coordonnées du point de contact.

Des équations (1) et (2), nous tirons l'équation

$$mx\,(y - y_0) = ny\,(x - x_0),$$

ou, en développant

$$(m - n)\, xy - my_0\, x + nx_0\, y = 0. \qquad (3)$$

Cette équation est celle d'une hyperbole qui passe par l'origine et par le point $(x_0\, y_0)$. Nous pouvons donc énoncer ce théorème. :

Les points de contact des tangentes menées d'un point à la courbe considérée sont sur une hyperbole passant par l'origine et le point d'où l'on mène les tangentes. Cette hyperbole reste la même, quel que soit le paramètre p.

Cherchons l'enveloppe de cette hyperbole lorsque le point $(x_0\, y_0)$ décrit la courbe $y^\mu = \mu\theta x^\nu$. (4)

Il nous suffira d'éliminer x_0 et y_0 entre les équations

$$\left.\begin{aligned} y_0^\mu &= \mu\theta x^\nu \\ nyy_0^{\mu-1} &= m\nu\theta x x_0^{\nu-1} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

et l'équation (3) Divisant les équations (5) membre à membre nous avons l'équation

$$\mu n y x_0 = \nu m x y_0 .$$

De cette équation et de l'équation (3), nous tirons x_0 et

portant leurs valeurs dans la première des équations (5), nous obtenons l'équation de l'enveloppe

$$y^{\mu} = \frac{m^{\mu}\nu^{\nu}}{\mu^{\mu}n^{\nu}}\left(\frac{\mu - \nu}{m - n}\right)^{\mu-\nu} \mu\theta x^{\nu}. \qquad (6)$$

Donc *lorsque le point* (x_0 y_0) *décrit une courbe du même genre que la courbe considérée, l'enveloppe de l'hyperbole qui passe par les points de contact des tangentes est une courbe semblable à la courbe décrite par le point* (x_0 y_0).

Si nous faisons varier m et n de façon que la différence $m - n$ reste constante, le point (x_0 y_0) restant fixe, *le centre de l'hyperbole qui passe par les points de contact décrit une droite.*

Car si nous posons $m - n = K$ (7)
les équations du centre sont

$$Ky - my_0 = o; \quad Kx + nx_0 = o; \qquad (8)$$

en éliminant m et n entre ces équations et l'équation (7), nous trouvons pour le lieu du centre

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1, \qquad (9)$$

équation d'une droite indépendante de la valeur de la différence $m - n$.

Cherchons l'enveloppe de cette droite lorsque le point (x_0 y_0) décrit la courbe (4).

Pour cela nous éliminerons x_0 et y_0 entre l'équation (9) et les deux équations $y_0^{\mu} = \mu\theta x_0^{\nu}$

$$(y - y_0)\, y^{\mu - 1} - \nu\theta\,(x - x_0)\, x^{\nu - 1} = o.$$

Nous obtenons par un calcul absolument semblable à celui que nous avons fait pour trouver l'enveloppe de l'hyperbole, l'équation

$$y_0^{\mu} = \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{\mu}\left(\frac{\mu}{\mu - \nu}\right)^{\mu - \nu} \mu\theta x^{\nu}. \qquad (10)$$

D'où ce théorème :

L'enveloppe de la droite lieu des centres des hyperboles qui passent par les points de contact des tangentes lorsque le point (x_0, y_0) décrit la parabole $y = \mu\theta x^{\nu}$, est une courbe semblable à cette parabole.

II. — Sur les surfaces $\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^p}{c^p} = 0$.

Considérons en coordonnées rectangulaires la surface ayant pour équation

$$\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^p}{c^p} = 0. \qquad (1)$$

Les équations d'une normale menée du point $P(x_0, y_0, z_0)$ à la surface, sont en désignant par (x, y, z) son pied :

$$\frac{a^m(x - x_0)}{mx^{m-1}} = \frac{b^n(y - y_0)}{ny^{n-1}} = \frac{c^p(z - z_0)}{pz^{p-1}}; \qquad (2)$$

on tire de ces équations et de l'équation (1)

$$\frac{x(x - x_0)}{m} + \frac{y(y - y_0)}{n} + \frac{z(z - z_0)}{p} = 0. \qquad (3)$$

On voit que les pieds des normales menées du point P à la surface sont sur une surface du second ordre, dont l'équation est l'équation (3). Cette surface passe par l'origine et par le point P. Son centre est au milieu de la droite OP, et son équation est indépendante des paramètres a, b, c de la surface. Nous en déduisons immédiatement les deux théorèmes suivants :

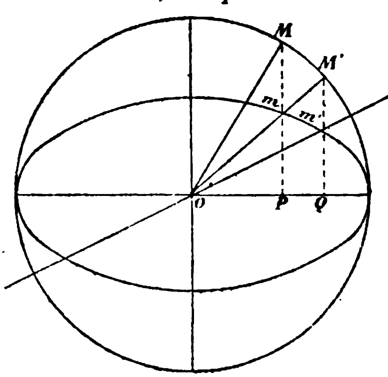
1° Si par un point P *de l'espace on mène les normales à tous les cônes du second degré ayant même sommet* O *et mêmes directions d'axes, leurs pieds sont sur une sphère ayant pour diamètre la droite* OP.

2° Si par un point P *de l'espace on mène les normales à tous les paraboloïdes ayant pour sommet un point* O, *et pour axe une droite* OH, *leurs pieds sont sur un ellipsoïde de révolution passant par le sommet et par le point* P, *dont le centre est au milieu de la droite* OP, *et dont l'axe de révolution est parallèle à* OH.

QUESTION 310

Solution par M. Rouhard, élève au Lycée Saint-Louis (classe de M. Lucas).

Sur une corde AB *de l'ellipse comme diamètre on décrit un cercle qui coupe l'ellipse en deux autres points* C *et* D. *On demande le lieu des points* M *où les sécantes communes* AB *et* CD *se rencontrent, lorsque* AB *se meut parallèlement à elle-même.*



Prenons pour axes les axes de l'ellipse. Soient α et β les coordonnées du point M et m le coefficient angulaire de la direction donnée.

Puisque les points A, B, C, D sont sur un cercle, les droites AB et CD sont également inclinées sur l'axe OX; leurs équations sont donc

$$y - \beta = m(x - \alpha) \quad \text{(AB)}$$

$$y - \beta = -m(x - \alpha) \quad \text{(CD)}$$

D'ailleurs un cercle passant par AB et CD aura pour équation

$$\lambda(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) - (y - \beta)^2 + m^2(x - \alpha)^2 = 0;$$

en posant $\lambda = \dfrac{1 + m^2}{c^2}$

ou bien

$$(b^2 + a^2m^2)(x^2 + y^2) - 2\alpha m^2c^2x + 2c^2\beta y + \ldots = 0$$

Exprimant que ce cercle a son centre sur la droite AB, on a

$$\beta\left(\frac{c^2}{b^2 + a^2m^2} + 1\right) = -m\alpha\left(\frac{m^2c^2}{b^2 + a^2m^2} - 1\right).$$

ou bien $a^2\beta = mb^2\alpha.$

Le lieu est donc une droite passant par l'origine

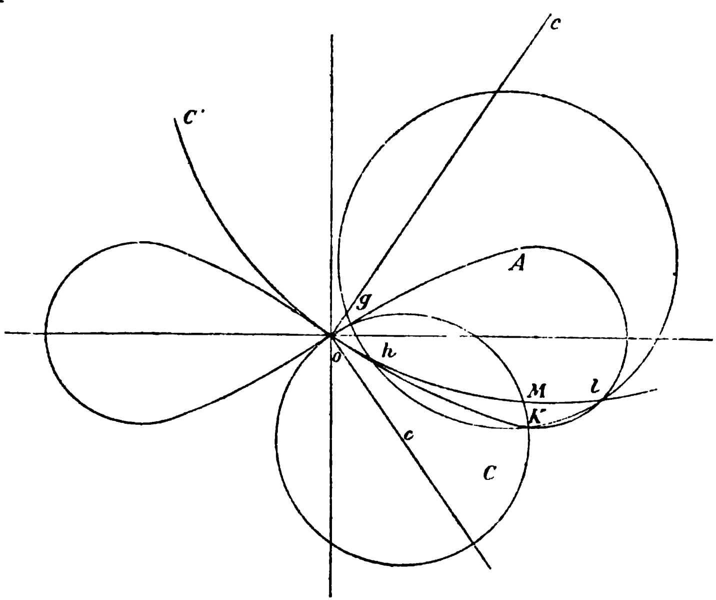
$$\left(y = m\,\frac{b^2}{a^2}\,x\right).$$

Cette droite peut se construire facilement; cela revient à multiplier deux fois le rapport $m = \dfrac{y}{x}$ par le rapport $\dfrac{b}{a}$.

Soient une ellipse et le cercle principal; OXI la direction donnée; on a
$$\frac{MP}{OP} = m\frac{mP}{OP} = \frac{b}{a},$$
$$\frac{m'Q}{OQ} = m\frac{b^2}{a^2}.$$

Si la conique donnée était une hyperbole, il suffirait de changer dans le résultat b^2 en $-b^2$.

Remarque. — Si l'on applique à cette propriété la méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques, on obtient pour toutes les courbes inverses des coniques et pour la lemniscate en particulier, la proposition suivante que l'on peut chercher à démontrer directement.



Soit une lemniscate ayant son centre à l'origine et deux circonférences C et C' passant par l'origine et dont les centres C et C' sont situés sur des droites *oc* et *oc'* symétriques par rapport à l'axe des x.

1° Les quatre points d'intersection g, h, k, l de ces deux circonférences avec la lemniscate sont sur un cercle A.

2° Si on fait varier les rayons OC, OC′ de manière que ce cercle A coupe toujours orthogonalement l'un des cercles C ou C′, le lieu des points d'intersection M de C avec C′ est une droite passant par l'origine.

Cela résulte immédiatement de la propriété précédente, en remarquant que les sécantes considérées se transforment en cercles passant par l'origine et dont les centres sont sur des droites symétriques par rapport à OX. La conique se transforme en lemniscate, le cercle décrit sur AB comme diamètre se transforme en un autre cercle et comme la droite AB le coupe orthogonalement et que les angles se conservent dans la transformation, l'inverse du cercle décrit sur AB comme diamètre coupera orthogonalement l'inverse de la droite AB.

Donc le lieu du point d'intersection des deux cercles C et C′ est l'inverse du lieu des points d'intersection des sécantes communes. C'est donc une droite.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Rabau, à Melun ; Savary, lycée Henry IV ; Gilly, à Montpellier ; Aubry, à Nancy ; Dupuy, Boudenès, à Grenoble ; du Motet, lycée Saint-Louis ; Haure, lycée Louis-le-Grand ; Andrieu, à Rouen ; Quiquet, à Lille.

QUESTION 334

Solution par M. Paul Boulogne, élève au Lycée de Lille.

Étant donnée la fraction

$$\varphi(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}};$$

On demande de calculer la fraction analogue $\varphi(2x)$ en fonction de $\varphi(x)$.

La fraction donnée peut s'écrire

$$\varphi(x) = \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{e^x - \frac{1}{e^x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

d'où

$$e^{2x} = \frac{\varphi(x) + 1}{\varphi(x) - 1}.$$

Substituant à e^{2x} cette valeur dans

$$\varphi(2x) = \frac{e^{2x} + \frac{1}{e^{2x}}}{e^{2x} - \frac{1}{e^{2x}}},$$

on trouve après réduction

$$\varphi(2x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2\,\varphi(x)}.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Dupuy, Petit, à Grenoble; Baron, au lycée Henri IV; Rabau, à Melun; Gino-Loria, à Mantoue; Quiquet, à Lille; Jourdan, à Rouen.

QUESTION 329

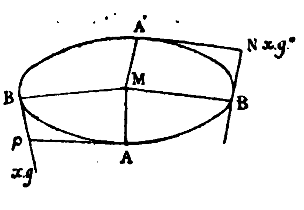
Solution par M. du Motel, élève au Lycée Saint-Louis (Classe de M. E. Lucas).

On considère une ellipse et deux normales à cette courbe, faisant entre elles un angle droit. Soit M *le point de rencontre de ces normales. Par ce point* M *on mène à l'ellipse deux autres normales, dont les pieds sont* A *et* B. *En* A *et* B *on mène les tangentes à l'ellipse.*

Trouver le lieu des points P *de rencontre de ces tangentes, quand le point* M *décrit le lieu des sommets des angles droits les côtés sont normaux à l'ellipse.*

Rapportons l'ellipse à ses axes. Son équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$



Menons les tangentes à l'ellipse aux points A' et B', pieds des normales rectangulaires issues de M. Elle se coupent en un point N (x_0, y_0) qui appartient au lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'ellipse

$$x_0^2 + y_0^2 - a^2 - b^2 = 0. \qquad (1)$$

Il suffit donc pour avoir l'équation du lieu, de remplacer

dans l'équation (1) x_0 et y_0 respectivement par

$$\frac{a^2}{x} - \frac{b^2}{y},$$

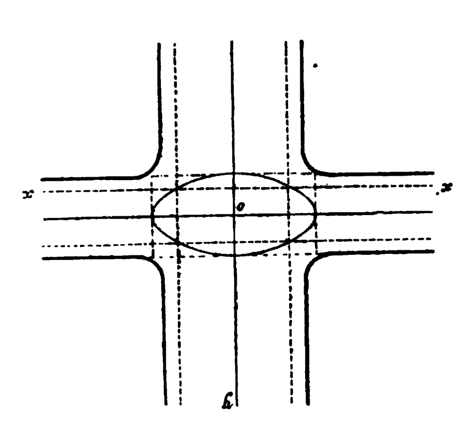
ce qui donne
$$\frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2} - a^2 - b^2 = 0,$$

courbe du quatrième degré ayant pour asymptotes les quatre droites

$$y^2 (a^2 + b^2) = b^4, \quad x^2 (a^2 + b^2) = a^4$$

qui forment un rectangle inscrit dans l'ellipse. Le lieu passe par les sommets du rectangle circonscrit à l'ellipse, car si le point M vient au centre, le point P devient l'un quelconque de ces points.

Remarque. — On peut tout aussi facilement, en appliquant le même procédé, résoudre le même problème dans l'espace.



On considère un point M d'où l'on peut mener trois normales rectangulaires à l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

On abaisse de ce point les trois autres normales, dont les pieds sont A′, B′, C′. Les plans tangents en ces points forment un trièdre de sommet P. Lieu du point P, quand M décrit le lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les côtés sont normaux à l'ellipsoïde.

On considère le point N (x_0 ,y_0 z_0), où se coupent les plans tangents aux trois points A, B, C, pieds des normales rectangulaires issues de M. On a

$$x^2_0 + y^2_0 + z^2_0 - a^2 - b^2 - c^2 = 0$$

et x, y, z étant les coordonnées du point P

$$xx_0 = -a^2, \quad yy_0 = -b^2, \quad zz_0 = -c^2;$$

d'où l'équation du lieu

$$\frac{a^4}{x^2}+\frac{b^4}{y^2}+\frac{c^4}{z^2}-a^2-b^2-c^2=0$$

surface du 6e degré.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Andrieu, Jourdan, à Rouen; Boulogne, à Lille; Le Pont, au lycée Saint-Louis.

QUESTION 331

Solution par M. DU MOTEL, élève au Lycée Saint-Louis.
(Classe de M. Ed. Lucas.)

On considère deux ellipses homofocales; par un point P *de leur plan on mène à une d'elles deux tangentes* A *et* B *d'une part,* C *et* D *d'autre part étant les points où ces tangentes rencontrent la seconde ellipse, démontrer que l'on a*

$$\frac{1}{PA}\pm\frac{1}{PB}=\frac{1}{PC}\pm\frac{1}{PD}.$$

A quelles positions du point P *correspondent respectivement les signes* + *et* — *?*

Rapportons les ellipses à leurs axes. Elles auront pour équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2-h}+\frac{y^2}{b^2-h}=1.$$

Soient x_0, y_0 les coordonnées du point P. Par ce point, menons une droite et sur la parallèle à cette droite menée par l'origine prenons une distance OM égale à l'unité. Soient α, β les coordonnées du point M. La droite menée par P pourra être représentée par les équations

$$x=x_0+\alpha\rho,\quad y=y_0+\beta\rho;$$

Les ρ des points d'intersection avec la première ellipse sont donnés par l'équation

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1+2\rho\left(\frac{\alpha x_0}{a^2}+\frac{\beta y_0}{b^2}\right)+\rho^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}\right)=0.$$

Pour que la droite soit tangente à cette ellipse, on doit

avoir

$$\left(\frac{\alpha x_0}{a^2}+\frac{\beta y_0}{b^2}\right)^2-\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}\right)=0,$$

condition qui se réduit à

$$(\alpha y_0-\beta x_0)^2-a^2\beta^2-b^2\alpha^2=0. \qquad (1)$$

En outre, on a $\alpha^2+\beta^2=1.$ (2)

Ces deux équations donnent les valeurs d'α et β. Soit α_1, β_1 une solution. La droite correspondante rencontre la seconde courbe en deux points dont les ρ, (ρ_1 et ρ_2) sont donnés par l'équation

$$\frac{x_0^2}{a^2-h}+\frac{y_0^2}{b^2-h}-1+2\rho\left(\frac{\alpha_1 x_0}{a^2-h}+\frac{\beta_1 y_0}{b^2-h}\right)+\rho^2\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2-h}+\frac{\beta_1^2}{b^2-h}\right)=0;$$

d'où

$$\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}=\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1\rho_2}$$

$$=\frac{2\sqrt{(\alpha_1 y_0-\beta_1 x_0)^2-(\alpha^2-h)\beta_1^2-(b^2-h)\alpha_1^2}}{(b^2-h)x_0+(a^2-h)y_0^2-(a^2-h)(b^2-h)}.$$

La quantité sous le radical se compose de $(\alpha_1 y_0-\beta_1 x_0)^2-a^2\beta_1^2-b^2\alpha_1^2$ qui est nulle, en vertu de (1) et de $h(\alpha_1^2+\beta_1^2)$ qui est égale à h en vertu de (2). Donc

$$\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}=\frac{2\sqrt{h}}{(b^2-h)x_0^2+(a^2-h)y_0^2-(a^2-h)(b^2-h)}$$

On aurait évidemment trouvé le même résultat en prenant la deuxième solution α_2. β_2 du système des équations (1) et (2), car dans le raisonnement précédent, rien ne spécifie quelle est celle des deux solutions que l'on choisit.

Si ρ_1 et ρ_2 sont de même signe, c'est-à-dire si le point P est extérieur à la seconde conique, la relation trouvée s'écrira

$$\frac{1}{PA}-\frac{1}{PB}=\frac{1}{PC}-\frac{1}{PD}.$$

Si ρ_1 et ρ_2 sont de signes contraires, c'est-à-dire si le point P est intérieur à la seconde conique

on aura $$\frac{1}{PA}+\frac{1}{PB}=\frac{1}{PC}+\frac{1}{PD}.$$

QUESTION 335

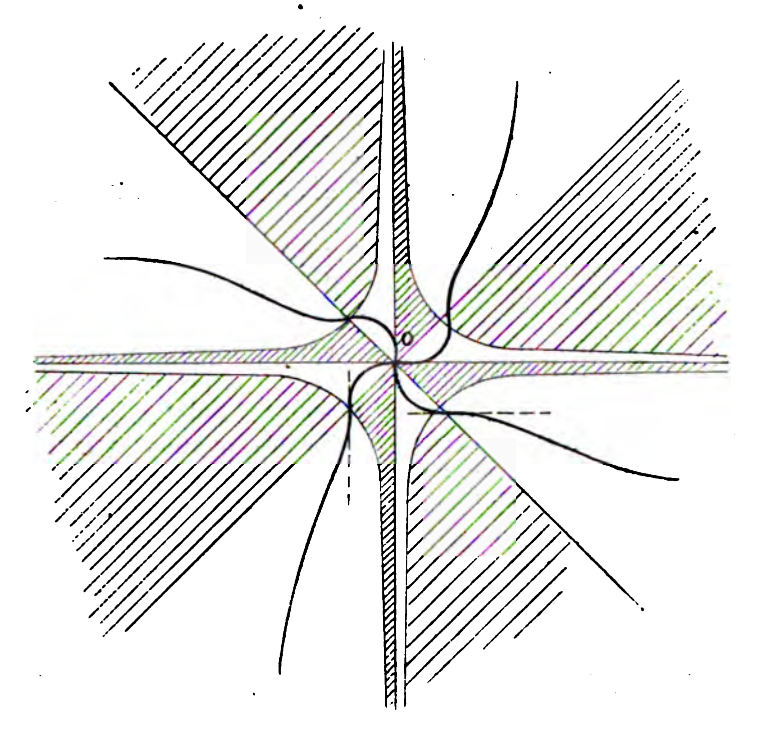
Solution par M. Baron, élève au Lycée Henri IV.

1° *Construire la courbe* $2x^2y^2 + x^4 - y^4 - 2xy = 0$.

Cette équation peut s'écrire

$$2xy\,(xy - 1)(xy + 1) + (x - y)(x + y)(x^2 + y^2) = 0.$$

Construisons les courbes $x = 0, y = 0, xy = 1, xy = -1$, $x = y$, $x = -y$. On partage ainsi le plan en régions.



Les parties couvertes de hachures ne peuvent renfermer des points de la courbe.

La courbe est symétrique par rapport à l'origine ; elle

présente des branches paraboliques dans les directions des deux axes.

On a $$y'_x = -\frac{2x^2(y^3+x)+y(x^2y^2-1)}{2y^2(x^3-y)+x(x^2y^2-1)}.$$

L'origine est un point double et les tangentes sont les deux axes. Les points $xy = \pm 1$, $x = \pm y$ sont sur la courbe pour $x = y = 1$. Nous avons une tangente parallèle à oy car $y'_x = \infty$.

Coupons par $x = 1$, nous trouvons

$$y^4 \; 2y^3 - 2y - 1 = 0,$$

ou

$$(y^2 - 1)(y - 1)^2 = 0.$$

Il y a trois points confondus en $x = 1$, $y = 1$; donc il y a une inflexion.

De même on verrait qu'en $x = -1$, $y = 1$, il y a une tangente d'inflexion parallèle à ox. On aura donc la forme indiquée ci-contre.

2° *Construire*

$$4x^5y^5 + x^6 - y^6 + 5x^2y^2(x^2 - y^2) - 4xy = 0.$$

Mettons l'équation sous la forme

$$4xy(xy-1)(xy+1)(x^2y^2+1) + (x-y)(x+y)(x^4+6xy^2+y^4) = 0.$$

Je partage le plan en régions comme pour la courbe précédente étudiée. Il y a des branches paraboliques dont les directions sont celles des axes.

Les points $xy = \pm 1$, $x = \pm y$ sont des points d'inflexion du 5e ordre. Il suffit pour le voir de couper par $x = \pm 1$. Les tangentes d'inflexion sont parallèles aux axes.

Quant à la forme générale de la courbe, elle est la même que celle de la figure précédente.

CHOIX DE QUESTIONS

POSÉES AUX EXAMENS ORAUX DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1881

Géométrie analytique.

Construire $\frac{1}{\rho} = \frac{\cos\omega - \sin\omega + 1}{2}$. Passer à l'équation de la courbe en coordonnées cartésiennes.

— On donne deux plans et une droite. Quelles sont les conditions pour que l'on puisse faire passer par la droite un plan perpendiculaire à l'intersection des deux plans ?

— On donne l'équation d'une ellipse et les coordonnées d'un point ; de ce point on mène les deux tangentes. Trouver l'équation du cercle passant par le point donné et les deux points de contact.

Comment vérifie-t-on qu'une droite passant par le pôle et faisant un angle α avec l'axe polaire est un axe de la courbe $\rho = f(\omega)$?

— On donne une tangente à une parabole, le point de contact et le lieu du pied de la directrice sur l'axe, lequel lieu est un cercle ayant le point de contact pour centre ; équation de la courbe.

— On donne une tangente à une parabole, le point où la tangente est coupée par la directrice, et le lieu du sommet ; équation de la courbe.

— Expression de la surface du triangle dont les sommets ont pour coordonnées polaires (ρ_1, ω_1), (ρ_2, ω_2), (ρ_3, ω_3)

— Équation générale des tangentes à la courbe définie par l'équation

$$\varphi(x, y) + \psi(x, y) + \chi(x, y) + \ldots = 0,$$

chacune des fonctions mise en évidence étant homogène, la première de degré m, la seconde de degré $m - 1$, etc. ; en déduire l'équation des asymptotes.

— Ligne représentée par l'équation

$$(xy' - yx')^2 + (xy'' - yx'')^2 = (x'y'' - y'x'')^2,$$

dans laquelle x, y représentent les coordonnées courantes, et les lettres affectées d'accents désignent des nombres donnés. Démontrer que les droites qui joignent les points (x', y'), (x'', y'') au centre sont des diamètres conjugués.

— On a la courbe $\rho = \dfrac{1}{f(\omega)}$, et l'on suppose que $f(\omega)$ s'annule pour $\omega = \alpha$ trouver l'équation de l'asymptote.

— Lieu des projections de l'origine sur les génératrices rectilignes de la surface ayant pour équations

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}.$$

— On donne la surface $Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 = 1$; on coupe par le plan $lx + my + nz = 0$, les axes étant rectangulaires. On demande l'angle des asymptotes de la section. Si l'on trouvait $\cot g\, \omega = \varphi(A, A', A'', l, m, n)$, pourrait-on en conclure la condition pour que la section soit un cercle ?

— On donne, en coordonnées polaires, deux paraboles ayant même foyer, et dont l'angle des axes est α ; on demande l'angle des deux tangentes en un point de l'intersection des deux paraboles.

— Équation qui a pour racines les carrés des longueurs des demi-axes de la section faite dans un ellipsoïde par un plan passant par le centre.

— On donne une tangente inclinée à 45° sur l'axe, son point de contact, un point de la conique et l'excentricité. Équation de la courbe.

— A combien de conditions équivaut un plan coupant une surface du second ordre suivant deux droites ?

— On donne le foyer et deux tangentes rectangulaires d'une ellipse ; équation de la courbe et lieu du centre.

— Surface représentée par l'équation

$$y^2 + z^2 + (z + 1)^2 - (2z + 3)^2 = 0,$$

trouver les équations de l'une des droites qui, en tournant autour de l'axe de z, engendrent la surface.

— Surface représentée par l'équation

$$3(x^2 + y^2 + z^2) = (x + y + z)^2;$$

si l'on coupait la surface par une sphère ayant son centre à l'origine, que devrait-on trouver ?

— Trouver les foyers d'une conique, connaissant deux points et une directrice.

— Chercher la condition pour que l'équation

$$a(x^2 + yz) + b(y^2 + zx) + c(z^2 + xy) = 1,$$

représente une surface de révolution.

— D'un point M, on mène les quatre normales MA, MB, MC, MD à une ellipse; on joint le point D à la seconde extrémité C' du diamètre qui passe par le point C; démontrer que les droites AB et DC' sont également inclinées sur l'axe; il en résulte que les quatre points B, A, C', D sont sur une même circonférence.

— Construire la courbe représentée par l'équation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{3} (\operatorname{tg} \omega \sin \omega + \operatorname{cotg} \omega \cos \omega).$$

— Comment trouve-t-on les points d'une courbe pour lesquels la tangente est parallèle à l'axe polaire?

— Étant donnée l'équation

$$x^2 + z^2 + 2y(x + z) + m(y^2 + 2zx) = 1,$$

déterminer m de façon que la surface représentée par cette équation soit de révolution.

— Quand on donne dans une surface deux génératrices d'un système et une génératrice de l'autre système, combien cela fait-il de conditions ?

— Combien faut-il de points pour déterminer un cylindre de révolution ?

— Démontrer que si, par un point, on mène les trois normales à la parabole, et que l'on fasse passer un cercle par les pieds de ces trois droites, ce cercle passe par le sommet de la courbe.

— Lieu des points du paraboloïde pour lesquels les génératrices sont rectangulaires.

— L'équation du second degré à trois variables peut-elle représenter une droite ?

— On donne une droite et deux points. Trouver le lieu des pôles de la droite par rapport aux ellipses ayant les deux points pour foyers.

— Que représente l'équation $Ax^4 + 2Bx^2y^2 + Cy^4 = 0$? Condition pour que ces quatre droites coïncident deux à deux.

— Équation d'un hyperboloïde à une nappe dont on donne deux génératrices rectilignes parallèles et un diamètre.

— On donne une tangente à l'ellipse, les points où elle rencontre les deux directrices et l'aire de l'ellipse. Trouver l'équation de la courbe.

— A combien de conditions équivaut la connaissance d'un plan cyclique?

— On prend la surface $\dfrac{y^2}{a} + \dfrac{x^2}{b} = z$; on la coupe par le plan $y = mx$; trouver le sommet et le foyer de la section.

— Quand on donne un plan directeur et deux génératrices de systèmes différents d'une surface du second ordre, combien donne-t-on de conditions pour déterminer la surface?

— Surface représentée par l'équation $y \cos z - x \sin z = o$. Cette surface admet-elle des génératrices rectilignes? Comment est-elle engendrée?

— Chercher l'équation générale des coniques doublement tangentes à une conique donnée aux points où cette conique est rencontrée par une droite donnée.

Géométrie descriptive.

On donne deux axes verticaux et une droite dans le plan vertical. Cette droite, en tournant autour des axes, engendre deux surfaces. Trouver un point de l'intersection, et mener une tangente en ce point.

— On donne un axe vertical et un cercle dans le plan vertical; trouver la méridienne de la surface engendrée par le cercle tournant autour de l'axe.

— On donne un cône par sa trace horizontale et son sommet; on donne trois points du cône, et on demande de mener un plan tangent perpendiculaire au plan qui passe par les points considérés.

— Trouver les projections de l'axe d'un cône de révolution dont on connait le sommet et les traces horizontales de trois génératrices.

— Connaissant la courbe génératrice d'une surface de révolution, trouver un point de la méridienne et la tangente en ce point.

— On donne une droite et un cercle dans le plan vertical; la droite, en tournant autour de la ligne de terre, engendre un cône de révolution; le cercle est la directrice d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles au plan horizontal; trouver un point de l'intersection de ces deux surfaces.

— On donne un cône de révolution par son axe, son sommet, et l'angle au sommet; on donne la projection horizontale d'un point du cône; trouver sa projection verticale.

— On donne la droite AB dans le plan vertical; cette droite tourne autour de la ligne de terre et engendre un cône; on coupe le cône par un plan, et on demande le point de la section pour lequel la tangente, en projection horizontale, passe par un plan *m* du plan horizontal.

Mathématiques élémentaires.

Deux longueurs a et b étant données, construire une longueur représentée par $\sqrt[4]{a^4 - b^4}$.

— Mener par un point pris dans l'intérieur d'un angle une droite telle que la somme des segments qu'elle intercepte sur les côtés de l'angle soit minima.

— Démontrer que si a_1 est une racine carrée approchée de A, la quantité $\frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{A}{a_1}\right)$ est une autre valeur approchée de la racine carrée de A.

— Étant donnée l'équation $10^x = 2$, calculer x en fraction continue.

— Démontrer que la résolution trigonométrique de l'équation du troisième degré suppose les racines réelles.

— Reste de la division d'un polynôme par le produit $(x - a)(x - b)$.

— Condition à établir entre a et b pour que deux racines de l'équation $x^4 - 2x^3 + ax^2 + bx - 1 = o$ soient réciproques.

— Nombre de solutions de $\sin \frac{a}{4}$ en fonction de $\sin a$.

— **Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'expression**

$$\frac{(x-1)(x-3)^2(x^2+1)}{(x+5)(x^2+x+3)(x-4)}$$

est positive.

— Construire une conique dont on connait cinq points, en se servant du théorème de Pascal.

— **Démontrer** que si **deux fractions irréductibles ont leurs dénominateurs premiers entre eux, la somme de ces fractions est une fraction irréductible.**

— On demande le minimum de

$$(ax+b)^2 + (a'x+b')^2$$

si a, b, a', b' **sont des nombres réels.**

— **α, β, γ étant trois nombres différents,** démontrer qu'on peut trouver une infinité de polynômes entiers en y qui prendront les valeurs a, b, c, quand x prendra les valeurs α, β, γ ; mais il n'y a qu'un seul polynôme du second degré répondant à la question.

Algèbre.

Étant donnée l'équation $f(x) = 0$, former l'équation qui aurait pour racines les différentes valeurs que prend la fonction

$$y = \varphi(x', x''),$$

x' et x'' étant deux racines de l'équation $f(x) = 0$.

— Dérivée de $y = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

— Trouver la condition pour qu'un polynôme du second degré à trois variables soit un carré parfait.

— Dérivée de $\operatorname{arc} \sin \sqrt{1 - \cos x}$.

— Trouver la dérivée d'ordre p de

$$\frac{x^p}{(x+1)(x-1)^3},$$

p étant plus grand que 4.

— Un polynôme $f(x)$, entier en x, est toujours décomposable en un produit de facteurs du premier degré.

— Abaisser le degré de l'équation algébrique $f(x) = 0$, sachant que les racines prises deux à deux satisfont à la condition

$$\frac{x' + x''}{x' x''} = 1.$$

— Démontrer que tout polynôme entier Q, de degré p, peut se mettre sous la forme

$$Q = R_0 + R_1(x-\alpha) + R_2(x-\alpha)^2 + \ldots + R_p(x-\alpha)^p$$

R_0, R_1, R_2... étant des constantes, α un nombre donné.

— **Séparer les racines de l'équation**

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} - \operatorname{tg} x = 0.$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE 1881

Composition supplémentaire.

On donne une asymptote d'une hyperbole, et un point P de la courbe; on sait que l'un des foyers décrit la perpendiculaire menée du point P sur l'asymptote considérée; on demande le lieu du point M d'intersection de la seconde asymptote avec la directrice correspondant au foyer donné.

ECOLE CENTRALE 1881

SECONDE SESSION

Mathématiques.

On donne une parabole $y^2 = 2px$ rapportée à son axe et à son sommet, et un point (α, β) dans le plan de la courbe.

1° Démontrer que, du point P, on peut en général mener trois normales à la parabole; former l'équation du troisième degré qui donne les ordonnées des pieds A, B, C de ces normales.

2° Démontrer que chacune des deux courbes

$$xy + (p - \alpha)y - p\beta = 0$$
$$y^2 + 2x^2 - \beta y - 2\alpha x = 0$$

passe par les quatre points A, B, C, P, et trouver l'équation générale de toutes les coniques passant par ces quatre points.

3° Chacune de ces coniques coupe la parabole donnée aux trois points fixes A, B, C, et en un quatrième point D. Trouver les coordonnées de D.

4° Par le sommet de la parabole donnée, on imagine deux droites parallèles aux asymptotes de l'une quelconque des coniques précédentes; on mène la droite joignant les points d'intersection de ces deux droites avec la conique, et on la prolonge jusqu'à sa rencontre avec la parallèle DD' menée à l'axe de la parabole par le point D. Trouver et discuter l'équation du lieu de ce point de rencontre.

Épure.

Représenter par ses deux projections la partie extérieure à une sphère donnée du solide compris entre un hyperboloïde de révolution à une nappe, son cône asymptote, un plan horizontal à la cote $0^m,200$, et le plan horizontal de projection. L'hyperboloïde a son axe (Z, Z') vertical, à $0^m,110$ du plan vertical de projection, et au milieu de la feuille; son collier dont la cote vaut $0^m,120$ et sa trace horizontale ont respectivement des rayons égaux à $0^m,050$ et $0^m,110$. La sphère, dont le centre (O, O') se trouve sur le plan

de profil conduit par l'axe de l'hyperboloïde, à $0^m,198$ du plan vertical, et à $0^m,102$ du plan horizontal, passe par le sommet (S, S') du cône asymptote.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour déterminer un point quelconque de l'intersection de la sphère avec l'hyperboloïde et le cône asymptote en ces points.

EXAMENS DES BOURSES DE LICENCE

FACULTÉ DE MARSEILLE

1878. — On donne un point et une droite. On fait passer par le point des circonférences tangentes à la droite, et on demande le lieu des points des circonférences tels que les tangentes menées en ces points soient perpendiculaires à la droite.

1880. — On fait tourner le plan d'un cercle autour de son centre ; par ce dernier point, on imagine un plan fixe sur lequel on projette le cercle dans toutes ses positions. On demande le lieu des sommets des ellipses *ainsi obtenues*. On remplacera le cercle par une ellipse, et on discutera la forme des lieux obtenus.

1881. — 1. On considère la cubique

$$x^3 + y^3 - 3K\,xy = 1 ;$$

on demande de déterminer ses points d'inflexion et d'indiquer pour quelle valeur de K elle se réduit à trois droites.

2. Lieu des foyers des coniques qui passent par l'intersection d'un cercle et de deux droites parallèles. Discussion.

FACULTÉ DE CAEN

1880. — On projette orthogonalement un cercle donné sur tous les plans passant par son centre O ; trouver l'équation de la surface S qui est le lieu géométrique des sommets de toutes les ellipses ainsi obtenues. Examiner quelles sont les sections de ces surfaces par des plans menés par le point O perpendiculairement au plan du cercle donné. Trouver le lieu géométrique Σ des points μ obtenus en joignant un point M de la surface S au point O en prenant sur la droite OM une longueur $O\mu$ telle que $OM . O\mu = K^2$. — Même question pour une ellipse.

CONCOURS GÉNÉRAUX DE BELGIQUE

Faire voir comment le système des deux équations

$$\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\ \frac{3}{2}\left(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2}\right) = ay$$

$$\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\ \left[\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1+y^2}\right) + \frac{}{9} = \sqrt[3]{x^3y^2}$$

e transforme dans les deux systèmes

$$A \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - y^2} = \frac{2}{3} \\ \sqrt{1 - x^2)(- y^2)} = xy. \end{array} \right.$$

$$B \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - y^2} = \frac{1}{3} \\ \sqrt[4]{(1 - x^2)(1 - y^2)} = xy \end{array} \right.$$

— Résoudre le système
$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{xy} = a$$
$$\frac{\log (b^2 - xy)}{\log \sqrt{\ ^2\ }} = 2.$$

— Partager une pyramide quadrangulaire en deux parties équivalentes par un plan passant par le sommet et un point donné sur un des côtés; les côtés de la base sont supposés inégaux. Examiner comment la solution se modifie quand la base devient un parallélogramme.

RAPPEL D'ÉNONCÉS

DE QUESTIONS PROPOSÉES NON RÉSOLUES

Parmi les questions que nous avons proposées depuis la fondation du Journal, il en existe un certain nombre dont nous n'avons pas eu la solution. Nous venons, pour permettre à nos lecteurs de les résoudre, en rappeler les énoncés avec les numéros.

198. — Par quel nombre faut-il multiplier un nombre donné pour que la somme des valeurs absolues de ses chiffres significatifs reste la même?

227. — Trouver les racines communes aux équations du système

$$(\beta - \gamma)^3(x - \alpha)^3 = (\gamma - \alpha)^3(x - \beta)^3 = (\alpha - \beta)^3(x - \gamma)^3.$$

236. — Lieu du sommet d'un triangle dont les deux côtés issus du sommet touchent une conique donnée, tandis que les deux autres sommets parcourent une seconde conique donnée.

237. — Étant donnée une conique à centre rapportée à un foyer, trouver l'expression de la longueur de l'axe non focal. Application au lieu des sommets des éllipses qui ont

un foyer et un point commun, et pour lesquelles la longueur du petit axe est la même.

247. — Étant donnée l'équation

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=e^2(x\cos\lambda+y\sin\lambda-p)^2,$$

on demande de calculer en fonction des coefficients de cette équation : 1° Les carrés des demi-axes de la courbe qu'elle représente, en distinguant dans les formules le grand axe et le petit axe lorsqu'il s'agit d'une ellipse ; 2° les carrés a^2 et $-b^2$ du demi-axe transverse et du demi-axe imaginaire, lorsqu'il s'agit d'une hyperbole. En conclure le lieu des sommets des ellipses qui ont un foyer, un point et la longueur du petit axe communs, en distinguant les sommets des grands axes de ceux des petits axes, et résoudre le même problème dans le cas de l'hyperbole.

254. — Si l'on désigne par S_n la somme

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \dots\ +\frac{1}{n},$$

démontrer les identités suivantes :

1. $$nS_n=n+\left[\frac{n-1}{1}+\frac{n-2}{2}+\dots+\frac{1}{n-1}\right]$$

2. $$S_{2p}=\frac{3}{2p}+2p\left[\frac{1}{1(2p-1)}+\frac{1}{2(2p-2)}+\dots+\frac{1}{(p-1)(p+1)}\right]$$

3. $$S_{2p}=(2p+1)\left[\frac{1}{1.2p}+\frac{1}{2(2p-1)}+\frac{1}{3(2p-2)}+\dots+\frac{1}{p(p+1)}\right]$$

4. $$S_{2p}=\left(p+\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{p}+\frac{1}{2p-C_2^2}+\frac{1}{3p-C_3^2}+\dots+\frac{1}{p^2-C_p^2}\right]$$

5. $$S_n=\frac{n+1}{2}-\left[\frac{1}{n(n-1)}+\frac{2}{(n-1)(n-2)}+\dots+\frac{n-2}{2.3}\right]$$

6. $(n-1)\,S_n = (n+1)\left[\frac{n-1}{1.n} + \frac{n-2}{2(n-1)} + \frac{n-3}{3(n-2)} + \dots + \frac{1}{(n-1).2}\right]$

$$S_n = n - \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n-1}{n}\right]$$

8. $S_n = 1 + \frac{n+2}{n-2}\left[\frac{1}{2n} + \frac{1}{3(n-1)} + \dots + \frac{1}{(n-1).3}\right]$

9. $2S_n = (n+1) - \left[\frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \dots + \frac{n-2}{n}\right]$

10. $S_n - S_p = \frac{n+p-1}{n-p+1}\left[\frac{n-p}{(p+1)n} + \frac{n-p-1}{(p+2)(n-1)} + \dots + \frac{1}{n(p+1)}\right]$

263. — Établir la relation qui doit exister entre les coefficients d'une équation du sixième degré complète pour que la somme de trois racines soit égale à la somme des trois autres.

264. — Démontrer que, lorsque n est un entier supérieur à 5, on a la double inégalité

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n > 1\,.\,2\,.\,3\,\dots\,n > \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

280. — On joint un point quelconque de l'axe radical de deux cercles aux points de contact d'une tangente commune ; des points d'intersection de ces lignes prolongées avec une droite quelconque partant du centre de similitude, on mène des tangentes en A et B aux cercles ; on demande : 1° de trouver le lieu de leur point de concours M ; 2° de prouver que la droite AB passe par un point fixe.

283. — Etant donnée une parabole P et deux points A et B de cette courbe, situés sur une même corde principale (c'est-à-dire sur une même perpendiculaire à l'axe), on fait passer par les deux points A et B une hyperbole équilatère de forme constante c'est-à-dire dont l'axe est invariable en

grandeur; on demande le lieu du point de rencontre des tangentes communes à la parabole fixe et à l'hyperbole mobile, lorsque cello-ci se déplace en passant toujours par les points fixes A et B.

Les autres questions dont nous n'avons pas reçu de solutions sont énoncées dans le présent volume; nous rappellerons donc seulement leurs numéros; ce sont les questions :

285, 309, 317, 318, 319, 320, 330, 332, 342, 344, 355, 356, 359, 360, 369, 371, 374, 375, 376, 378, 379, 382, 384, 385, 386, 387.

Les solutions de toutes les autres questions ont été publiées ou paraîtront prochainement.

NOTE DE LA RÉDACTION

A partir du premier janvier 1882 nous reprendrons la traduction de l'*Histoire des mathématiques*, de M. Süter.

Le Rédacteur-Gérant,
J. KŒHLER.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 23896-1

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE METHODIQUE

Géométrie analytique.

Pages.

Géométrie descriptive.

Cosmographie.

Trigonométrie.

Questions proposées.

Bibliographie.